



揭阳职业技术学院

电子商务创业学院

《统计学》教案

(2025-2026 学年第 2 学期)

教师姓名：詹扬

所授专业：电子商务(专本协同)

授课班级：241

课程整体教学设计

一、课程的性质和任务

《统计学》课程是国家教育部批准、经济学教学指导委员会和工商管理类教学指导委员会通过的经济类和管理类各专业的核心课程之一。通过本课程的学习，使学生具备基本的统计思想，掌握基本的统计方法，加强数量分析和解决经济管理中实际问题的能力。

二、教学目标与要求

（一）总体目标和要求

《统计学》课程是国家教育部批准、经济学教学指导委员会和工商管理类教学指导委员会通过的经济类和管理类各专业的核心课程之一。在当今大数据时代，社会对各类数据信息的需求日益增加，无论是国家管理、经济发展、企业或各类组织的运营及决策，还是科学与自然科学的研究，都越来越依赖于数量分析和统计分析方法。统计方法已经成为理、工、农、医、人文、社会、管理、军事等几乎所有学科领域科学研究的基本方法。近年来，数量分析尤其在社会经济领域的应用越来越深入广泛，如金融工程、保险精算、证券投资分析、市场调查与分析等等。**统计学是关于如何收集数据资料，如何整理数据资料，以及统计推断的一门方法论的科学，其目的是研究和掌握数据中的数量规律，以达到对事物客观规律的认识。**本课程的先修课程为《高等数学》和《概率论》等课程。本课程的总体目标是系统地介绍统计学的基本思想、基本方法及其在经济管理领域中的应用，通过本课程的学习，使学生具备基本的统计思想，掌握基本的统计方法，加强数量分析和解决经济管理中实际问题的能力。

（二）课程目标和要求

统计学是一门实用性很强的方法科学，它既包括适用于各个领域的一般性统计方法，如描述统计、参数估计、假设检验、方差分析、列联分析、相关与回归、时间序列分析等，也包括某些特殊统计方法，如指数分析方法等。**该门课程的特点是不着重于统计方法数学原理的推导，而是侧重于阐明统计方法背后隐含的统计思想，以及这些方法在实际各领域中的具体应用。**从内容上看，统计学主要包括统计数据的收集、整理、描述与推断分析。考虑到电子商务专业的实际需要，除绪论外，本课程的内容大体包括四大部分：第一部分是描述统计（含统计指数）、第二部分是推断统计（区间估计与假设检验）、第三部分是试验设计中常用的单因素与多因素方差分析、第四部分是常用的列联分析、相关分析、回归分析和时间序列分析。

统计学作为本专业核心必修课程，其目标是：

分目标 1：培养学生掌握统计学的基础知识并理解各种统计方法中所包含的统计思想，使学生了解统计学在大数据时代的角色、统计学的应用范围，能使用各种方法收集数据资料，整理数据资料，并能够绘制统计图表，获取数据中的信息。

分目标 2：培养学生的统计量化思维能力，掌握各种主要统计方法的不同特点、内在联系、应用条件及适用场合。掌握利用计算机统计分析软件以解决问题的能力，并通过实例数据的操

作训练学生的实践能力。

分目标 3: 培养学生统计方法的创新运用能力和发现现实问题、分析问题和解决问题的能力,能够熟练应用 Excel、SPSS 等相关软件进行统计计算和结果分析与解释,能进行统计方案设计、统计数据建模、统计软件运行、数据处理报告、统计研究报告等,具备系统性解决实际问题的决策与分析能力。

三、教学方法与手段

课堂理论教学——社会实践调查——课堂小组讨论:

具体安排:

第 1 周-第 3 周: 理论教学、总体安排、自由分组、选题: 完成作业 1(调查方案)

第 4 周-第 6 周: 理论教学、理论教学、选题、方案设计、问卷设计: 完成作业 2(调查问卷)

第 7 周-第 9 周: 理论教学、开展实地调查、数据整理: 完成作业 3(描述性统计分析)

第 9 周-第 14 周: 理论教学、数据处理、结论探讨: 完成作业(统计推断、模型预测)

第 14 周-第 18 周: 理论教学、课堂小组讲解、小组讨论

四、理论与实践课程内容与学时分配

课程内容和学时分配表

章节	章节内容	学时分配	章节	章节内容
第一章	导论	3	第一章	绪论
第二章、第三章	统计资料的搜集与整理、展示	6	第二、三章	统计资料的搜集与整理
第四章	数据的概括性度量	6	第四章	总量指标、相对指标 频数分布基本

				特征—集中趋势与离散趋势
第五、六章	概率与概率分布、统计量及其抽样分布	9	第五、六章	统计推断理论基础：概率分布与抽样分布
第七、八章	参数估计与假设检验	6	第七、八章	参数估计与假设检验
第十章	方差分析	6	第十章	方差分析
第九章	R×C 交叉列联表分析	3	第九章	R×C 交叉列联表分析
第十一、十二章	相关与回归分析	9	第十一、十二章	相关与回归分析
第十四章	统计指数	3	第十四章	统计指数
第十三章	时间数列	3	第十三章	时间数列

第一章 导论

一、教学目的和要求

理解统计的含义与本质；对统计学产生与发展的简要历史，特别是对主要学派有所了解；比较全面地认识统计学的学科性质和作用；熟知统计数据的各种类型、特征以及计量尺度，掌握统计数据的研究过程和基本方法；对总体、个体、样本、标志、变量、指标和指标体系等统计学的基本概念有比较系统、全面的掌握。

二、教学重点与难点

教学重点：理解统计的含义与本质；总体、个体、样本、标志、变量、指标和指标体系等统计学的基本概念有比较系统、全面的掌握

教学难点：

1. 统计学的涵义
2. 统计学的性质
3. 统计学中几个重要的概念

三、教学方法

介绍统计学产生历史及思想，分析统计学及方法的用处，以案例、课程论文、选题激发学生的学习积极性；进一步理解统计的基础知识、概念和思想。

四、教学学时：3 课时

五、教学内容（或教学过程）

第一节 统计及其应用领域

一. 统计的含义与本质

1. 统计的含义及其关系：

a) **统计数据：**二手资料和原始数据；经过观察、调查所取得具有信息价值的数字资料

b) **统计活动：**即统计实践活动，是对统计数据进行搜索、整理和分析的全过程

c) **统计学：**理论概括和总结。“收集和分析数据的科学和艺术”。统计学是一

门关于数据资料的收集、整理、分析和推断的科学。复旦大学《统计规律》案例分析。

2. **统计的本质：**关于为何统计，统计什么和如何统计的思想。

二. 统计学的产生和发展

1. 古典统计学时期：

(1) 亚里斯多德撰写“城邦政情”或“城邦纪要”

(2) 英国威廉·配第 (W. Petty, 1623-1670)，《政治算术》政治经济学之父

(3) 英国约克大学约翰·格朗特 (John Graunt)，1662 年，出版《关于死亡率的自然观察和政治观察》。被称为统计学的创始人，政治算术学派的代表。

2. 近代统计学时期（统计分析科学）

数理统计学派：创始人和代表人物，比利时凯特莱 (L. A. J. Quetelet, 1796-1874)，现代统计学之父。

雅各布·伯努利 (Jacob Bernoulli) (1654~1705) 荷兰人；1713 年出版《猜度术》，给出“伯努利数”、“伯努利大数定律”。

贝叶斯 (Thomas R. Bayes, 1702-1761) 英国数学家。首先将归纳理论法用于机率理论，创立贝叶斯统计理论。

费歇尔 (Fisher, 1890-1962) 伟大的英国统计学家、数理统计学最主要的奠基者。由费歇尔所确立的统计推断理论，样本分布理论，试验计划法及分布理论对奠定 20 世纪统计学的基础理论作出了很大的贡献

3. 现代统计学时期

小样本思想、t 分布理论、卡方分布、方差分析、假设检验、估计理论、误差理论、决策理论、多元统计、时间序列、面板数据等方法的出现

医学统计学、天文统计学、传媒统计学、管理统计学、金融统计学、国民经济统计学、社会统计学、教育统计学、心理统计学、生物统计学等学科的出现

三、统计学的学科性质

1. 研究对象

数量性：统计研究对象是客观事物的数量方面

总体性：社会经济统计认识社会经济现象时，主要是研究社会经济现象的总体数量规律，即通过大量的观察，获得足够多的统计资料，说明、认知总体现象的变化情况及规律。

差异性：就是要从所研究现象总体的各个个体之间的差异中概括出共同普遍的特征，并对差异情况作出必要的反映

2. 学科地位

方法性：统计学是一门方法论科学，其任务是为研究现象的数量提供科学的理论、原则和方法，就是提供工具和手段。

层次性：统计学是一门一级学科，拥有完整、严密的学科体系，具有很强的层次性，其二级学科包括理论统计学、应用统计学、统计学史和统计学其他学科等。

通用性：统计学是一门通用的方法论科学，其一般的理论、原则和方法在任何研究数量的领域均可用。

3. 构成内容

描述性：研究如何取得反映客观现象的数据，并通过图表形式对所收集的数据进行加工处理和显示，进而通过综合、概括与分析得出反映客观现象的规律性数量特征。

推断性：研究如何通过样本数据去推断总体数量特征。是在对样本数据进行描述的基础上，对统计总体的未知数量特征作出以概率形式表述的推断。

四. 统计学的作用

- (一) 统计学为我们认识自然、认识社会提供了必需的方法和途径
- (二) 统计学在指导生产活动中发挥着重要作用
- (三) 统计学在社会经济管理活动中的作用更显著
- (四) 统计学为科学研究提供了有力手段

第二节 统计数据类型

一. 统计数据类型

1. 按照所采用的计量尺度不同，可以分为定性数据与定量数据

定性数据是指只能用文字或数字代码来表现事物的品质特征或属性特征的数据，具体又分为定类数据与定序数据两种。

定类数据：按照事物的某种属性对其进行平行的分类或分组所形成的数据。

定序数据：对事物之间等级或顺序差别测度所形成的数据。

定量数据是指用数值来表现事物数量特征的数据，具体又分为定距数据与定比数据两种

定距数据：对事物类别或次序之间间距的测度所形成的数据。

定比数据（比率尺度）：是能够测算两个测度值之间比值的数据。

2. 按照其表现形式不同，可以分为绝对数、相对数和平均数

绝对数：反映现象或事物绝对数量特征的数据，它以最直观、最基本的形式体现现象或事物的外数量特征，有明确的计量单位。

相对数：反映现象或事物相对数量特征的数据，它通过另外两个相关统计数据的对比来体现现象（事物）内部或现象（事物）之间的联系关系，其结果主要表现为没有明确计量单位的无名数，少部分表现为有明确计量单位的有名数（限于强度相对数）。

平均数：反映现象或事物平均数量特征的数据，体现现象某一方面的一般数量水平。

3. 按照其来源不同，可以分为观测数据与实验数据

4. 按照其加工程度不同，可以分为原始数据与次级数据

5. 按照其时间或空间状态不同，可以分为时序数据与截面数据

二. 统计数据研究过程

包括四个基本环节：

1.统计设计：制定统计数据研究方案

2.数据搜集：按照统计设计的要求，有针对地获取所需的统计数据的环节，也称为统计调查环节

3.数据整理：通过统计观测或实验所获得的原始数据，进行必要的系统化处理，使之条理化、综合化，成为能反映总体特征的统计数据的环节

4.数据分析与解释：数据分析是在数据整理的基础上，围绕统计设计所确定的研究任务，运用各种统计方法对数据进行各种统计分析，得出某些有用的定量结论的环节

三. 统计数据研究方法

基本方法有五种：

- 1.大量观察法：大数定律
- 2.统计分组法：传统分组法、判别分析法和聚类分析法等
- 3.综合指标法：常见的综合指标有总量指标、相对指标和平均指标
- 4.统计推断法：根据概率论和样本分布理论，由样本观测数据来推断总体数量特征——参数估计或假设检验
- 5.统计模型法：建立回归模型、相关模型等

第三节 统计中的几个基本概念

一. 总体与样本

1. 总体：统计研究的客观对象的全体，是具有某种共同性质的事物所组成的集合体（也称为母体）

(1) 总体的含义与特征

大量性、同质性和差异性三个特征

(2) 总体的分类

a)总体单位是否有限——有限总体和无限总体

要检验一批灯泡的寿命—有限总体

要全面考察该企业生产的灯泡的寿命—无限总体

b)总体存在形式——具体总体和抽象总体

今天来上统计学的所有学生总体—具体总体

某种工艺条件下生产的产品形成的总体—抽象总体

c)总体单位是否能计数——可计数总体和不可计数总体

d)总体单位是否人为划分——自然总体和人为总体

自然确定：个人、企业、家庭等自然形成的总体

人为划定：一公斤小麦、一百公斤小麦、一吨小麦等人为划分的总体；一公顷草地、一百公顷草地、一平方公里草地等人为形成的总体。

(3) 个体的含义：构成统计总体的个别事物称为个体（也称总体单位）

(4) 总体与个体的关系

- a.) 总体容量随着个体数的增减变化
- b.) 随着研究目的不同，总体中的个体可发生变化
- c.) 随着研究范围的变化，总体与个体的角色可以变换

2. 样本：

(1) 样本的含义：所谓样本就是从总体中抽取一部分个体所组成的集合，也称子样。

(2) 样本与总体的关系

- a.) 样本是总体的代表和缩影
- b.) 样本是用来推断总体的
- c.) 总体和样本的角色是可以改变的

二. 标志和变量

1. 标志

(1) 标志的含义：所谓标志，就是用以描述个体所具有的特征的名称。标志在每个个体上的具体表现结果称为标志表现。

(2) 标志的种类：

a)按其结果表现方式不同 品质标志：只能用文字表示；

数量标志：用数值表示的。

b)按其在每个个体上表现的结果是否相同：

- 不变标志：在每个个体上的标志表现完全相同；
- 可变标志：在每个个体上的表现不尽相同。

c)按其表现个体的直接程度不同：

- 直接标志：直接表现个体特征的标志；
- 间接标志：间接表现个体特征的标志。

2. 变量

(1) 变量的含义：

- a.) 狭义：可变的数量标志。
- b.) 广义：变量是可变的数量标志和可变的品质标志。

(2) 变量的分类：

- a) 按其反映数据的计量尺度不同，可以分为定性变量和定量变量
- b) 按其所受的影响因素分：确定性变量和随机变量。
- c) 按其变量值的变化是否连续：连续性变量和离散性变量。

三. 统计指标和指标体系

1. 统计指标

(1) 含义：反映社会经济现象总体数量特征的概念及其具体数值

- a.) 说明总体数量特征的;
- b.) 有广义与狭义之分

广义：说明总体数量特征的概念和数值。包括六个基本要素

狭义：说明总体数量特征的概念和名称。包括三个基本要素 c.) 注意问题：指

标都必须用数字表示。

(2) 统计指标与标志的关系

区别： a.) 研究对象不同; b.) 表现形式不同.

联系： a.) 依据与结果; b.) 相互转化。

(3) 统计指标的种类

- a.) 按计算范围分：总体指标和样本指标

总体指标也称总体参数，是惟一的但往往未知；样本指标也称样本统计量，是可知的但非唯一。

- b.) 按反映现象的内容分：数量指标和质量指标

数量指标也称为总量指标，按照其反映现象内容的不同，分为总体标志总量和总体容量，按照其反映现象时间状况的不同，分为时期指标与时点指标。

质量指标分为相对指标和平均指标，相对指标反映事物内部或相关事物之间相对数量关系，包括：

结构相对指标（总体中部分总量与总体总量之比）

比例相对指标（总体中某部分总量与其他部分总量之比）

比较相对指标（两个同类指标之比）

动态相对指标（同一指标在不同时间之比）

强度相对指标（两个性质不同但有联系的总量指标之比）

计划完成程度相对指标（实际指标与计划指标之比）

平均指标是反映变量分布集中趋势或中心位置的指标，表明变量的一般数量水

平，包括算术平均指标、几何平均指标、调和平均指标、众数指标和中位数指标。

c) 按反映的时间分：静态指标和动态指标。

(4) **统计指标的设计**：对指标的名称和涵义、计算范围和方法、资料搜集和统计量化、计量单位等进行具体规定。

(5) **总体与个体、指标与标志的关系**

总体由个体组成，指标是由标志构成

2. 指标体系

反映同一总体或样本多个方面数量特征的一系列相互联系的统计指标所形成的体系，成为统计指标体系。

(1) **含义**：若干统计指标组成，互相制约有机整体。

(2) **形式**：数学等式关系、相互补充关系、因果关系、相关关系。

(3) **指标体系的设计**：目的性原则、科学性原则、可行性原则、灵活性原则、层次性原则、联系性原则、协调性原则

本章总结：

本章是学习《统计学》的入门章节，篇中涉及了大量的概念性知识，并且相对容易混淆，希望同学们在课后要认真复习这些基础知识，为我们学习以后各章打好基础，练习主要完成《学习指导》和我刻印的习题，复习教材的“本章小节”，将其系统化，理解再记忆。

作业布置：习题第一题 1.2、1.3、1.4、第二题 1.3

第二、三章 统计资料的搜集与整理、展示

一、教学目的：

本章阐述统计数据收集、整理与显示的理论方法，理解统计数据收集的含义和要求，熟悉统计数据收集的各种方式、方法，掌握统计整理得而理论和方法，包括分组，和统计表格的设计，了解统计图的意义，统计数据整理与显示中的应用。

二、教学重点与难点

教学重点： 1. 统计数据收集以及收集几种方法。

2. 设计统计调查方案的方法。

3. 统计数据分组的类型原则和方法。
4. 分组的方法，统计分布的编制。
5. 熟练了解统计图和掌握 Excel 的相关应用。

- 教学难点：**
1. 几种调查方法的特点和应用。
 2. 统计收集的方法之间的区别与联系。
 3. 了解统计表的编制。

三、教学方法

1. 直接讲陈法；练习与新课相结合，示例加以巩固。

四、教学学时：6 学时

五、教学内容（或教学过程）

第一节 统计数据的搜集

一、统计数据收集的含义和要求

统计数据收集是整个统计活动的基础阶段，通常也称为统计调查阶段。统计数据收集的基本要求是准确性、及时性和完整性。

二、统计数据收集方案设计

统计数据收集方案应包括以下一些内容：

数据收集目的、数据及其类型、数据收集对象和观测单位、观测标志和调查表、数据收集方式与方法、数据所属时间和数据收集期限、数据收集地点和数据收集的组织。

三、统计数据收集方式

统计数据收集方式有两种：统计调查方式和实验方式。

（一）统计调查方式

统计调查就是按照预定的统计任务，运用科学的统计调查方法，有计划有组织地向客观对象搜集资料的过程。

1、普查

概念：根据特定的统计研究目的而专门组织的一次性的全面调查，用以收集

所研究现象总体的全面资料。

组织方式：{ a)专门组织普查机构调查；
b)利用现有统计资料；

统一性原则 { 基本原则： a)标准时点（避免重复和遗漏）
b)调查步骤（同一次调查在不同阶段）
c)指标口径（内涵）
d)调查时间（起止）
e)普查周期：我国为期十年的普查制度

2、抽样调查

抽样调查是一种非全面调查，就是从总体中抽取样本，以样本推断总体的统计调查方式。抽样调查是目前我国应用最广泛的统计调查方式。抽样调查可分为概率抽样和非概率抽样两类。

你觉的“随机”和“随意”有区别吗？

(1) 概率抽样

a) 概率抽样是按照随机原则抽取样本，即总体中的每个个体都有已知的、非零的概率被抽取到样本中来。

b) 特点：

{ 在样本的抽取上遵循随机原则
在调查的功能上能以部分推断总体
在推断的手段上运用概率估计的方法
在推断的理论上，以大数定律和中心极限定理为依据
在推断的效果上，抽样误差可以计算并加以控制

c) 概率抽样从抽样方法上看，可以分为重复抽样和不重复抽样两种。重复抽样的特点是：总体的每个个体都有数次被抽中的可能性，次抽样之间相互独立。不重复抽样的特点是：总体中每个个体都只有一次被抽中的可能性，次抽样之间不相互独立

d) 概率抽样从抽样组织形式上看，可分为简单随机抽样、分层抽样、等距抽样、整群抽样和多阶段抽样五种。

简单随机抽样是抽样调查最基本的组织形式，具体的样本抽取方式有抽签法

和随机数表法等；

分层抽样特点是必须具备总体所有个体的名录和至少一个分层标志的全面资料，各层的抽样相互独立，尽量把总体差异通过分层而转化为层间差异；

等距抽样的特点依固定的间隔和规定的顺序来抽取个体，属于不重复抽样；

整群抽样要尽量把总体差异转化为群内差异等，一般属于不重复抽样；多阶段抽样特点是整群抽样和分层抽样两种组织形式的综合。

(2) 非概率抽样

非概率抽样是非随机抽样调查，是凭人们的主观判断或根据便利性原则来抽取样本。有任意抽样、典型抽样、定额抽样和流动总体抽样等几种。

任意抽样，也称随意抽样，即抽样者随意地或任意地（通常是遵循简便性原则）从总体中抽取样本。

典型抽样，也称有目的抽样、代表性抽样，即抽样者根据自己的知识、经验和判断从总体中挑选出“典型的”或“有代表性”的单位来组成样本。

定额抽样也称配额抽样，抽样者按照规定的定额获得一个在某些特征上与总体结构大致成比例的样本。它是先对总体按一定标志分类，并按比例分配每类应调查单位的定额，然后由抽样者在每类进行判断抽样。

流动总体抽样，也称“捕获——标记——再捕获”(Capture-Tag-Recapture) 抽样，即抽样者先从流动总体中获取部分单位，加以标记后放回总体，过一段时间后再获取部分单位，然后根据再获取单位中有标记单位的比例来推算总体的数量。

3、重点调查

重点调查是对数据收集对象总体中的部分重点个体进行观测的统计调查方式。

特点： { 以客观原则来确定观测单位；
 { 属于范围较小的全面调查。

关键是选择重点单位 { 确定最低标志值
 { 确定最低重点单位累计标志值比重

4、统计推算

统计推算的概念和特点；统计推算方法。统计推算是以已掌握的各种统计数据为基础，根据事物之间的内在联系或发展规律，对被研究现象数量特征做出估算或测算的一种间接统计调查方式； 例如插值法、平均值估计法等。

（二）实验方式

含义：所谓实验方式，就是运用自然科学的试验法，通过观测人为安排条件下试验产生的各种结果并加以记录的方式来获取数据，或通过人为安排条件下的试验来探求某个或某些因素对所研究事物的数量影响程度和作用方式，凭借实验结果来揭示所考察因素与所研究事物之间的数量因果关系。

原则：均衡分散性原则；整齐可比性原则

常用的实验设计：（1）完全随机试验

（2）随机区组试验

（3）拉丁方试验

（4）正交试验

（三）数据收集误差

数据收集误差存在两种误差：观测性误差和代表性误差。

观测性误差也叫登记性误差或调查性误差，在全面调查和非全面调查中都会产生，是一种非一致性误差；代表性误差是指在抽样调查中，因样本不能完全代表总体而产生，又分为系统性代表性误差和偶然性代表性误差两种。

四、统计数据收集方法

统计数据收集方法，是指获取被调查对象数据的渠道或途径，常用的方法有直接观察法、通讯法、采访法、登记法等几种。

五、问卷设计

问卷是依据统计研究目的和要求，按照一定的理论假设设计出来的、由一系列问题、项目、备选答案及说明所组成的、向被调查者搜集资料的一种工具。

问卷一般由引言、被调查者基本情况、问题和答案、结语四个部分组成。设计时应考虑三个方面问题：问题的编排顺序；提问方式和措辞要点；问卷调查说明等。

引言和注释 (WWH 三原则)

首先 要说明调查者的身份 (who)

其次 要说明调查的大致内容和进行这项调查的目的(why)

最后 要说明调查对象的选取方法和对 调查结果保密的措施(how)

问题设计的原则

1、所列问题必须符合客观实际情况

- 2、问题不能太多
- 3、问题必须是被调查者有能力回答的
- 4、不要直接提社会上禁忌的和敏感性的问题
- 5、问题不能带有诱导性
- 6、问题的内容要具体、单一
- 7、问题的语言要简单易懂、标准规范
- 8、问题的排列要讲究逻辑性

第二节 统计数据的整理

一、统计整理的含义与要求

统计整理的含义：统计资料整理是根据统计研究的目的，按照统计整理方案的要求，对统计调查所得到的大量的原始资料进行科学的加工、汇总、或对已经加工过的资料进行再加工，使之系统化、条理化、成为能够反映总体特征的综合资料的工作过程

- | | |
|---|----------------------------------|
| { | 1) 依据： 研究目的； |
| | 2) 内容： 原始资料、次级资料； |
| | 3) 目的： 反映个体的资料转化为反映总体的资料。 |
| | 4) 意义： 调查的继续，分析的基础。 |

要求：科学性、条理性和充分性。

二、统计整理的内容和步骤

分组、汇总、编表（图），其中汇总是中心内容：

- ①根据研究任务的要求，选择应整理的指标，并根据分析的需要确立具体的分组。
- ②对统计资料进行汇总，计算。
- ③ 使用统计图表描述汇总计算的结果。

统计整理的步骤：

- ①设计整理方案
- ②统计资料的审核
- ③进行科学的统计分组
- ④统计汇总

⑤编制统计图表

三、统计分组

(一) 含义与性质

统计分组是根据事物内在的特点和统计研究的任务，按一定的标志，将统计总体划分为若干个不同的类型或部分（组）的一种统计方法。分组之后应保持组内资料的同质性和组间资料的差异性。

统计分组的关键——选择分组标志。

(二) 统计分组的种类

- a.) 按分组标志性质分：品质标志分组和数量标志分组
- b.) 按分组标志多少：简单分组和复合分组。

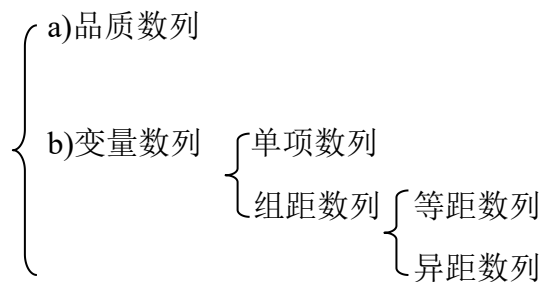
四、分布数列

(一) 分布数列的概念和种类

1. 分布数列的概念：在统计分组的基础上，把总体的所有单位按组归并排列，形成总体中各个单位在各组间的分布，称为分布数列，也称为统计分布或次数分布。

分布数列的组成要素：总体按某标志所分的组(组别)和分配在各组的单位数(频数)及各组单位数占总体单位数的比重(频率)

2. 分布数列的种类



3. 分布数列的构成： a) 组别 b)分配在各组的单位数。

(二) 分布数列的编制

1、单项数列

a)概念——单一变量值为一组；

b)适用范围:变动范围不大的离散变量和取整数的连续变量。

c)编制步骤：确定组数；把总体单位分配在相应各组。

2、组距数列

- a) 概念——以区间表示一个组;
- b) 适用范围: 连续变量、变动范围大的离散变量;
- c) 步骤: 确定组距、组数; 确定等距或异距;确定组限;算组中值。

3、组距数列编制中应该注意的问题

- a) 组距和组数: 组距的概念; 组数的概念; 关系
- b) 组限的确定: 组限的概念、确定的方法、确定的原则;
- c) 等距数列或异距数列的选择

消除不可比因素的方法: 次数密度

- d) 组中值计算: 作用、计算条件、计算方法、注意问题: 开口组

(三) 频率分布

1. 频率分布的性质: 频率在 0 到 1 之间; 各频率之和等于 1
2. 频率分布图:
3. 累计频率的计算:
 - a) 累计频率的概念: 累计频数和累计频率; 累计频率计算的方法;
 - b) 向上累计和向下累计
 - 向上累计是将各组频数(率)曲线标志值低的组向标志值高的组依次累计, 说明至某组上限以下的各组频数(率)累计分布状况。
 - 向下累计是将各组频数(率)由标志高的组向标志值低的组依次累计, 说明至某组下限以上各组频数(率)累计分布状况。

第三节 统计数据的显示

一、统计表

(一) 概念

经过汇总, 得到一系列总量指标的数字资料, 把这些数字按一定的逻辑顺序在表格上表现出来, 这种表称为统计表。广义上看, 任何用以反映统计资料的表格都是统计表。统计表是表现统计资料的最常用的形式, 也是统计分析的重要工具。

(二) 结构

统计表的结构从外表形式看, 由总标题、横行标题和纵栏标题、指标数值等部分构成。1、从内容看: 主词、宾词

2、从形式看：总标题、横行标题、纵栏标题、指标

(三) 种类

- 简单表——未分组资料；
- 分组表——按一个标志分组；
- 复合表——两个以上标志并层叠分组。

二、统计图

1.直方图：用矩形的宽度和高度来表示频数分布的图形，实际上是用矩形的面积来表示各组的频数分布。

2.折线图：折线图也称频数多边形图(Frequency polygon)，是在直方图的基础上，把直方图顶部的中点(组中值)用直线连接起来，再把原来的直方图抹掉，折线图的两个终点要与横轴相交。

3.曲线图：U型分布是一种刚好与钟型分布相反的分布，其标准是越靠近中心变量值，分布次数越少；越远离中心变量值则分布次数越多。形成“中间小，两头大”的分布特征。象英文的“U”字。J型分布的特征有正反两种情况，一种是次数随变量的增大而逐渐增多，称为正J形分布；若次数随变量值的增大反而减少，则称为反J型分布，象英文的“J”字。

4.茎叶图和箱形图的含义和编制方法。

- A.用于显示未分组的原始数据的分布
- B.由“茎”和“叶”两部分构成，其图形是由数字组成的
- C.以该组数据的高位数值作树茎，低位数字作树叶
- D.对于 $n(20 \leq n \leq 300)$ 个数据，茎叶图最大行数不超过

$$L = [10 \times \log 10 n]$$

E.茎叶图类似于横置的直方图，但又有区别

直方图可大体上看出一组数据的分布状况，但没有给出具体的数值

茎叶图既能给出数据的分布状况，又能给出每一个原始数值，保留了原始数据的信息

5.雷达图：先做一个圆，然后将圆P等分，得到P个点，令这P个点分别对应P个变量，在将这P个点与圆心连线，得到P个辐射状的半径，这P个半径分别作为P个变量的坐标轴，每个变量值的大小由半径上的点到圆心的距离表示。再将同一样本的值在P个坐标上的点连线。这样，n个样本形成的n个多边形就是一

个雷达图。

本章总结：1. 统计收集的内容和方法、统计调查的组织。

2. 掌握统计资料的整理的方法及技术和统计表。

作业布置：作业布置：习题 2.4、2.6、2.7、P54 习题二 3.2、3.3

第四章数据的概括性赌脸

一、教学目的：

理解变量分布的三大特征，即集中趋势、离中趋势和分布形状的含义；理解平均指标、离散指标和形状指标的意义与作用，熟练掌握各种平均数、各种离散指标的计算方法并加以应用。

二、教学重点难点

教学重点：理解变量分布的三大特征，即集中趋势、离中趋势和分布形状的含义。掌握各种平均数、各种离散指标的计算方法。掌握偏系数和峰度系数的计算方法。

教学难点：熟练各种平均数、离散指标的计算方法，了解区别和联系。

三：教学方法设计：示例法、软件演示法、教案法

四：教学课时：6 学时

五、教学内容（或教学过程）

第一节 集中趋势的度量

学习要求：

①理解变量分布三大特征即集中趋势、离中趋势和分布形状的的含义；

②理解平均指标、离散指标和形状指标的意义与作用；

③熟练掌握各种平均数的计算方法并加以正确的应用，科学理解加权平均数中权数的意义，正确认识算术平均数与调和平均数之间的应用关系，以及算术平均数、中位数和众数三者之间的数量关系；

④熟练掌握各种离散指标的计算方法并加以正确的应用，尤其是要深刻理解方差、标准差和离散系数的内涵；

⑤熟练掌握偏度系数和峰度系数的计算方法并加以正确的应用，尤其是要了解动差的含义。

变量分布特征可以从以下三个方面加以描述：

集中趋势：反映变量分布中各变量值向中心值靠拢的程度；

离中趋势：反映变量分布中各变量值远离中心值的程度；

分布形状：反映变量分布的偏斜程度和尖陡程度。

一、集中趋势与平均指标

集中趋势亦称为趋中性，是指变量分布以某一数值为中心的倾向。用平均指标来反映，

平均指标的种类。

平均指标主要用来表明同质总体中某一标志值，在一定时间、地点条件下所达到的一般水平。其数值表现平均数。

数值平均数：从总体各单位变量值中抽象出具有一般水平的量，这个量是根据各个单位的具体标志值计算出来的，有算术平均数、调和平均数、几何平均数等形式。

数值平均数包括：

算术平均数：简单算术平均 加权算术平均

调和平均数：简单调和平均 加权调和平均

几何平均数：简单几和平均 加权几和平均

位置平均数：先将总体各单位的变量值按一定顺序排列，然后取某一位置的

变量值来反映总体各单位的一般水平。位置平均数有众数、中位数、四分位数等形式

位置平均数包括：众数 中位数 分位数

平均指标的作用：

(1) 通过反映变量分布的一般水平，帮助人们对研究现象的一般数量特征有一个客观的认识。

(2) 利用平均指标可以对不同空间的发展水平进行比较。

(3) 利用平均指标可以对某一现象总体在不同时间上的发展水平进行比较，以说明这种现象发展变化的趋势或规律性。

(4) 利用平均指标可以分析现象之间的依存关系或进行数量上的推算。

(5) 平均指标还可以作为研究和评价事物的一种数量标准或参考。

二、数值平均数

(一) 算术平均数

算术平均数一般就称为平均数 (mean)。其定义是：观察值的总和除以观察值个数的商。

在实际工作中，由于所掌握的统计资料的不同，利用上述公式进行计算时，可分为简单算术平均数和加权算术平均数两种。

1、基本计算公式：总体标志总量/总体单位总数

2、简单算术平均数：简单算术平均数的公式根据未经分组整理的原始数据计算的均值。设一组数据为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 。则简单算术平均数的计算公式如下：

(1) 计算公式：

$$\text{简单算术平均数：} \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

(2) 适用范围：末分组资料。

3、加权算术平均数：根据分组整理的资料计算的算术平均数

(1) 计算公式：

(2)

注意点

$$\begin{aligned} \text{加权算术平均数：} \bar{x} &= \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_kf_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} \\ &= \sum \left(x \cdot \frac{f}{\sum f} \right) \end{aligned}$$

(3) **适用范围**: 分组资料中已知分母加总资料。

(4) 注意问题——权数及权数的作用

---算术平均数的大小, 不仅取决于研究对象的变量值(x), 而且受各变量值重复出现的频数(f)或频率($f/\sum f$)大小的影响, 频数或频率较大, 该组数据的大小对算术平均数的影响就大, 反之则小。

4、算术平均数的数学性质

(1)各变量值与其算术平均数的离差之和等于零.

(2)各变量值与其算术平均数的离差平方和最小.

(3)两个独立的同性质变量代数和的平均数等于各变量平均数的代数和.

(4)两个独立的同性质变量乘积的平均数等于各变量平均数的乘积.

5、算术平均数的优缺点: **优点**: a.)可推算总体标志总量;

b.)便于代数运算;

c.)抽样中具有良好稳定性。

缺点: a.)受极端值的影响大;

b.)组距数列中有较大假设性。

(二) 调和平均数

1. 问题的提出

例: 市场上苹果的价格有三种: 3 元/斤; 2.4 元/斤; 1.2 元/斤, 现有两种可供选择的方案: 甲各买 30 元或乙各买 15 斤, 问选择何方案为优?

2. 调和平均数的概念

(1) **概念**: 标志值倒数的算术平均数的倒数。调和平均数是变量值倒数的算术平均数的倒数。又称倒数平均数。调和平均通常是作为算术平均数的变形来使用的。但一些特殊的领域, 如综合评价, 调和平均却是一种独立的统计平均数, 有着特定的应用价值。

(2) **特点**: a) 常作为算术平均数的变形

b) 标志值中有数

据为零时无法

计算。

$$\text{简单调和平均数: } H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$$

(3) 简单调和平均数

适用范围：末分组资料。

(4) 加权调和平均数

$$\text{加权调和平均数: } H = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}$$

实质：加权算术平均数的变形。调和平均数易受极端值的影响，且受极小值的影响比受极大值的影响更大。只要有一个变量值为零，就不能计算调和平均数。当组距数列有开口组时，其组中值即使按相邻组距计算了，假定性也很大，这时，调和平均数的代表性就很不可靠。调和平均数应用的范围较小。

适用范围：分组资料已知基本公式分子加总资料。

(三) 由相对数或平均数计算平均数

基本步骤：1.)写出基本公式；

2.)确定计算公式；

3.)具体计算。

(四) 几何平均数

几何平均数也称几何均值，它是 n 个变量值乘积的 n 次方根。

适用对象：现象的总比率是若干项变量的乘积，或现象的总发展速度是各时期发展速度的连乘积时，计算平均比率或平均发展速度。

1、简单几何平均数：直接将 n 项变量连乘，对其连乘积开 n 次方根所得的平均数即为简单几何平均数。

$$\text{简单几何平均数: } G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod x}$$

适用范围：资料末分组，变量值互相影响。

2、加权几何平均数：与算术平均数一样，当资料中的某些变量值重复出现时，相应地，简单几何平均数就变成了加权几何平均数。

$$\text{加权几何平均数: } G = \sqrt[f_1+f_2+\cdots+f_n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_n^{f_n}} = \sqrt[\sum f]{\prod x^f}$$

适用范围：分组资料，变量值互相影响。

几何平均数特点：

- (1) 受极端值的影响较算术平均数小。
- (2) 如果变量值有负值，计算出的几何平均数就会成为负数或虚数。
- (3) 仅适用于具有等比或近似等比关系的数据。

(4) 其对数是各变量值对数的算术平均数

(五) 算术平均数、调和平均数、几何平均数的数学关系

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$
$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$$
$$M(p) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^p w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right]^{1/p}$$

可以证明： $M(p)$ 为 p 的增函数。

同一资料计算结果： $x \geq G \geq H$

三、位置平均数

位置平均数，就是根据总体中处于特殊位置上的个别单位或部分单位的标志值来确定的代表值，它对于整个总体来说，具有非常直观的代表性，因此，常用来反映分布的集中趋势。常用的众数、中位数。

(一) 中位数

1、中位数的概念：总体单位按某一标志值排队后中间位置的标志值。中位数是将数据按大小顺序排列起来，形成一个数列，居于数列中间位置的那个数据就是中位数。

2、中位数的计算

确定中位数，必须将总体各单位的标志值按大小顺序排列，最好是编制出变量数列。这里有两种情况：

(1) 未分组资料中位数的计算

基本步骤：1)将总体单位按某一标志进行排队；

2)确定中数的位置： $(n+1)/2$

3)中间位置上的那个标志值即为中位数。

$$M_e = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

(2) 分组资料中位数的计算

基本步骤：1.)计算累计频数(向上累计频数或向下累计频数);

2.)确定中位数的位置: $\sum f/2$

3.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{单项数列: 该组的标志值即为中位数;} \\ \text{组距数列, 根据上下限公式计算中位数。} \end{array} \right.$

$$\text{中位数: } M_e = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m-1}}{f_m} \cdot d$$

$$M_e = U - \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m+1}}{f_m} \cdot d$$

(3) 中位数的特点: 中位数是以它在所有标志值中所处的位置确定的全体单位标志值的代表值, 不受分布数列的极大或极小值影响, 从而在一定程度上提高了中位数对分布数列的代表性。有些离散型变量的单项式数列, 当次数分布偏态时, 中位数的代表性会受到影响。3) 缺乏敏感性。

(二) 分位数

1、概念

将变量的数值按大小顺序排列并等分为若干部分后, 处于等分点位置的数值。常用的分位数有四分位数、十分位数和百分位数。

Q_L , Q_M 和 Q_U 分别表示第一个、第二个和第三个四分位数, 则他们的位置分别为: $\frac{n+1}{4}$, $\frac{2(n+1)}{4}$ 和 $\frac{3(n+1)}{4}$, 根据位置即可确定各个四分位数。

(三) 众数

1、众数的概念: 众数是指总体中出现次数最多的那个标志值。用 M_o 表示。它主要用于定类(品质标志)数据的集中趋势, 当然也适用于作为定序(品质标志)数据以及定距和定比(数量标志)数据集中趋势的测度值。众数也不受数列中极端变量值的影响, 它可反映总体各单位某一标志值的集中趋势。

2、末分组资料众数的计算: 直接根据众数概念(单项数列同)。

3、分组资料众数的计算:

a.)确定众数组;

b.)根据上下限公式计算众数的具体数值。

$$\text{众数: } M_0 = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d$$

$$M_0 = U - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d$$

4. 众数的特点

众数不受分布数列的极大或极小值的影响；当分组数列没有任何一组的次数占多数，而是近似于均匀分布时，则该次数分配数列无众数。若将无众数的分布数列重新分组或各组频数依序合并，又会使分配数列再现出明显的集中趋势。如与众数组相比邻的上下两组的次数相等，则众数组的组中值就是众数值；如果与众数组比邻的上一组的次数较多，而下一组的次数较少，则众数在众数组内会偏向该组下限；如果与众数组比邻的上一组的次数较少，而下一组的次数较多，则众数在众数组内会偏向该组上限。缺乏敏感性。这是由于众数的计算只利用了众数组的数据信息，不象数值平均数那样利用了全部数据信息。

(四) 中位数、众数、算术平均数的关系

在对称分布（即正态）时： $\bar{x} = M_e = M_o$

在右偏时： $M_o \neq M_e < \bar{x}$

在左偏时： $\bar{x} \neq M_e < M_o$

适度偏态时： $M_o - \bar{x} = 3(M_e - \bar{x})$

第二节 离中程度的度量

一、离中趋势和离散指标

离中趋势，就是变量分布中各变量值背离中心值的倾向。如果说集中趋势是总体或变量分布同质性的体现，那么离中趋势就是总体或变量分布变异性的体现。离散指标就是反映变量值变动范围和差异程度的指标，即反映变量分布中各变量值远离中心值或代表值程度的指标，亦称为变异指标或标志变动度指标。离散指标是衡量平均指标代表性的尺度。一般来讲，数据分布越分散，变异指标越大，平均指标的代表性越小；数据分布越集中，变异指标越小，平均指标的代表性越大。

常用的离散指标主要有：全距（亦称极差）、四分位差、异众比率、平均差、标准差、离散系数等。离散指标的作用：用离散指标衡量和比较平均指标的代表

性。用离散指标反映经济活动过程的均衡性、稳定性和节奏性。离散指标为统计推断提供依据。

二、离散指标的测度

(一) 全距

1、概念：总体各单位标志值中最大标志值与最小标志值之差。 $R = x_{\max} - x_{\min}$

2、特点：(1) 简明；(2) 只反映变异范围；(3) 只受两个数值影响；最容易受极端值影响。没有反映中间数值的影响，没有反映分布情况。

(二) 四分位差

四分位差是四分位数中第一个四分位数与第三个四分位数之差，也称为内距或四分间距，通常用 Q_d 表示，即： $Q_d = Q_U - Q_L$

通常与中位数相结合，用以表明变量分布中间 50%数值的离散程度，

(三) 异众比率

异众比率是分布数列中非众数组的频数与总频数之比，通常用 V_r 来表示，即：

$$V_r = \frac{\sum f_i - f_{m_0}}{\sum f_i} = 1 - \frac{f_{m_0}}{\sum f_i}$$

其中 f_{m_0} 为众数组的频数。

通常与众数相结合，用以表明众数代表性的高低。

(四) 平均差

1、概念：总体各单位标志值与其算术平均数的离差绝对值的算术平均数。特点：(1) 反映了全部标志值的变动情况；(2) 受平均数水平高低、计量单位（不同性质的现象）影响；(3) 取绝对值的方法消除离差正负号，不便于代数处理。

2、平均差的计算：

$$A \cdot D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot f}{\sum f}$$

优点：利用了全部数据信息，能比较客观反映变量分布的离散程度。

不足：取了绝对值，因而数学处理不是很方便，数学性质也不是最优，应用上受到了一些限制。

(五) 方差和标准差

1、概念

方差是变量的各变量值与其均值的离差平方的算术平均数，标准差则是方差

的平方根。方差和标准差是测度变量分布离散程度最重要的指标。

2、方差的计算公式为：

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (\text{根据未分组数据})$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \quad (\text{根据变量数列})$$

标准差的计算公式为：

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (\text{根据未分组数据})$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}} \quad (\text{根据变量数列})$$

优点：方差和标准差利用了全部数据信息，因而能准确反映变量分布的离散程度。尤其是标准差与平均差相比，不仅具有平均差的优点，而且弥补了平均差的不足，再加上标准差的计量单位与变量相同，意义比方差明确，所以标准差在实践中得到了广泛的应用。

说明：一是根据组距式数列计算的方差和标准差只是一个近似值；二是在根据样本数据（甚至是有限总体数据）计算方差和标准差时，分母应该是 $n-1$ ($n = \sum f_i$)，但当 n 很大时，可以忽略 n 与 $n-1$ 之间的区别。

3、方差和标准差的性质

(1) 常数的方差为 0。

(2) 若 $y = a + bx$ ， a, b 为常数，则 y 的方差 s_y^2 与 x 的方差 s_x^2 之间的关系为：

$$s_y^2 = b^2 s_x^2$$

(3) 标准差 s 是计算标准化值的依据。假设变量的标准化统计量用 Z 表示，

标准化值用 Z_i 表示，则 $Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

Z 服从均值为 0、标准差为 1 的标准正态分布。 Z_i 也叫标准得分或标准统计值。

(六) 离散系数

为了不同变量分布之间离散程度的可比性，就必须消除不同均值水平和不同计量单位的影响，就应该计算相对离散指标。

相对离散指标也叫离散系数变异系数或标准差系数，是变量的标准差与均值之比，通常用 V_s 来表示，即：

$$V_s = \frac{S}{\bar{x}}$$

$V\sigma$ 和 V_s 分别表示总体离散系数和样本离散系数。离散系数要是用于对不同组别数据的离散程度进行比较，离散系数越大，说明变量分布的离散程度越强，平均数的代表性越差。

三、是非标志的平均数和标准差

是非标志，又称交替标志，它是用“是”“否”或“有”“无”来表示的。由于是非标志只有两个标志表现，使得研究问题大为简化。

常用 1 表示具有某种标志表现，其单位数用 N_1 表示，用 0 表示不具有某种标志表现，其单位数用 N_0 表示，全部总体单位数用 N 表示。这两部分单位数(N_1 和 N_0)在总体单位数(N)中所占的比例，即“是”或“非”的单位数在全体单位数中所占比例，称为“成数”，分别记为 p 和 q 。

1、是非标志的概念：品质标志中能用 1 或 0 进行描述的标志。

2、成数：总体中标志值为 1 或标志值为 0 的单位数(N_1 和 N_0)占总体单位总数 (N) 的比重，用 P 或 Q 表示。

其中： $P=N_1/N$ ； $Q=N_0/N$ ； $P+Q=1$

3、是非标志的平均数：是非标志的平均数= P

4、是非标志的标准差： $s = \sqrt{PQ}$

5. 是非标志的标准差系数： $V_s = \frac{\sqrt{PQ}}{P}$

例 1：某批产品共 500 件，其中合格品 480 件，不合格品 20 件，要求计算成数、标准差和标准差系数。

解： $P=480/500=96\%$

$Q=20/500=4\%$

标准差： $(96\% \times 4\%)^{0.5} = 19.6\%$

标准差系数： $19.6\% / 96\% = 0.2041$

第三节 分布形状的度量

一、分布形状和形状指标

变量分布的形状要用形状指标来反映。形状指标就是反映变量分布具体形状，即左右是否对称、偏斜程度与陡峭程度如何的指标。

反映变量分布偏斜程度的指标，称为偏度系数；

反映变量分布陡峭程度的指标，称为峰度系数。

二、偏度系数

偏度指变量分布偏斜的方向及其程度。偏度系数来实现的，通常用 S_k 来表示。

偏度系数的计算主要有以下三种方法：

1、利用算术平均数与众数或中位数的离差计算 $S_k^{(1)} = \frac{\bar{x} - m_0}{s}$

一般情况下，偏度系数的变动范围为 $(-3, 3)$ 。当 > 0 时，为正值，变量分布属于正偏；当 < 0 时，为负值，变量分布属于负偏；当 $= 0$ ，变量分布属于无偏（即对称分布）。的绝对值越接近于 3，表明变量分布的偏斜程度越严重；的绝对值越接近于 0，表明变量分布的偏斜程度越轻微。

2、利用四分位数计算 $S_k^{(2)} = \frac{Q_U + Q_U - 2m_e}{Q_U - Q_L}$

偏度系数的取值范围为 $(-1, 1)$ 。偏度系数的绝对值越接近于 1，表明变量分布的偏斜程度越严重；偏度系数的绝对值越接近于 0，表明变量分布的偏斜程度越轻微。

3、利用动差法计算 $S_k^{(3)} = \frac{m_3}{s^3}$

若 $S_k^{(3)} > 0$ ，表示变量分布正偏；若 $S_k^{(3)} < 0$ ，表示变量分布负偏；若 $S_k^{(3)} = 0$ ，表

示变量分布两边对称，无偏。 $S_k^{(3)}$ 的绝对值越接近 0，表示变量分布的偏度越轻微； $S_k^{(3)}$ 的绝对值越大于 0，表示变量分布的偏度越严重；

三、峰度系数

1、概念

峰度的概念首先由统计学家皮尔逊于 1905 年提出，是对变量分布扁平性或尖锐性的测度，峰度通常是指钟型分布的顶峰与标准正态分布相比偏扁平或偏尖锐的程度。分为三种情况：标准正态峰度、尖顶峰度和平顶峰度。峰度系数通常用 K 来表示。

2、峰度系数的计算

主要采用动差法 $K = \frac{m_4}{s^4}$ ，当 $K = 3$ 时，变量分布的峰度为标准正态峰度；当 $K < 3$ 时，变量分布的峰度为平顶峰度；当 $K > 3$ 时，变量分布的峰度为尖顶峰度。

峰度系数的标准值为 3。当 $k=3$ 时，变量分布的峰度为标准正态峰度；当 $k < 3$ 时，变量分布的峰度为平顶峰度；当 $k > 3$ 时，变量分布的峰度为尖顶峰度。

更进一步，当值接近于 1.8 时，变量分布曲线就趋向于一条水平线，表示各组分分配的频数接近于相同。当值小于 1.8 时，则变量分布曲线为“U”型曲线，表示变量分布的频数分配是“中间少，两头多”。

本章总结：熟悉变量分布的三大特征，即集中趋势、离中趋势和分布形状。b

作业布置：习题一 4.3、4.4 习题二 4.3、4.4。

第五章 概率与概率分布

5.1 随机变量及其概率 5.2 离散型随机变量及其分布律

一、教学目的：

基本目标：

- (1) 理解随机变量的概念，会用随机变量表示随机事件；
- (2) 理解离散型随机变量及其概率分布的概念，会求离散型随机变量的分布律，能表述常见的离散型随机变量的分布律：两点分布、二项分布及泊松分布；

培养能力目标：

- (1) 掌握概率论和数理统计中的基本概念和性质并能够运用到复杂工程问题的适当表述之中；

(2) 能够针对工程应用系统或过程的特点选择合适的概率分布来描述随机现象的统计规律性;

二、教学重点与难点

教学重点:

1. 随机变量的概念; 离散型随机变量及其分布律(分布列)的概念;
2. 分布函数的概念; 连续型随机变量及其概率密度的概念;
3. 连续型随机变量常见分布: 均匀分布、指数分布和正态分布的几何特征; 正态分布上 α 分位点的含义和如何查表确定。
4. 离散型随机变量函数分布的求解过程; 连续型随机变量函数分布的求解过程。

教学难点:

1. 离散型随机变量的分布律的求解
2. 概率密度与分布函数的关系, 分布函数与密度函数的性质
3. 连续型随机变量常见分布: 均匀分布、指数分布和正态分布的参数内涵。
4. 连续型随机变量函数分布的求解过程。

三、教学方法: 提问、讲授、启发、讨论

四、教学学时: 6 学时

五、教学内容(或教学过程)

第一部分: 旧知识点复习和新课内容概述(10 分钟)

随机变量的引入:

为全面研究随机试验的结果, 揭示随机现象的统计规律性, 需将随机试验的结果数量化, 即把随机试验的结果与实数对应起来. 1. 在有些随机试验中, 试验的结果本身就由数量来表示. 2. 在另一些随机试验中, 试验结果看起来与数量无关, 但可以指定一个数量来表示之.

第二部分: 随机变量的概念(35 分钟)

一、随机变量的定义:

设随机试验的样本空间为 $S = X(e)$, 称定义在样本空间 S 上的实值单值函数

$X = X(e)$ 为**随机变量**.

二、随机变量与数学分析中函数的比较:

(1) 都是实值函数, 但前者在试验前只知道它可能取值的范围, 而不能预

先肯定它将取哪个值；

(2) 试验结果的出现有一定的概率, 故前者取每个值和每个确定范围内的值也有一定的概率.

三、引入随机变量的意义

随机变量的引入, 使得随机试验中的各种事件可通过随机变量的关系式表达出来. 由此可见, 随机事件这个概念实际上是包容在随机变量这个更广的概念内. 也可以说, 随机事件是从静态的观点来研究随机现象, 而随机变量则以动态的观点来研究之. 其关系类似高等数学中常量与变量的关系. 随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件. 引入随机变量后, 对随机现象统计规律的研究, 就由对事件及事件概率的研究转化为随机变量及其取值规律的研究, 使人们可利用数学分析的方法对随机试验的结果进行广泛而深入的研究.

随机变量因其取值方式不同, 通常分为离散型和非离散型两类. 而非非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量. 今后, 我们主要讨论离散型随机变量和连续型随机变量.

四、例题:

例1 在抛掷一枚硬币进行打赌时, 若规定出现正面时抛掷者赢 1 元钱, 出现反面时输 1 元钱, 则其样本空间为 $S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$, 记赢钱数为随机变量 X , 则 X 作为样本空间 S 的实值函数定义为:

$$X(e) = \begin{cases} 1 & e = \text{正面} \\ -1 & e = \text{反面} \end{cases}$$

例2 在将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 、反面 T 出现情况的试验中, 其样本空间

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

记每次试验出现正面 H 的总次数为随机变量 X , 那么, X 的可能取值为 $\{0, 1, 2, 3\}$. 则 X

作为样本空间 S 上的函数定义为:

$$X = \begin{cases} 3 & \{HHH\} \\ 2 & \{HHT, HTH, THH\} \\ 1 & \{HTT, THT, TTH\} \\ 0 & \{TTT\} \end{cases}$$

例 3 在测试灯泡寿命的试验中, 每一个灯泡的实际使用寿命可能是 $[0, +\infty)$ 中任何一个实数. 若用 X 表示灯泡的寿命 (小时), 则 X 是定义在样本空间 $S = \{t | t \geq 0\}$ 上的函数, 即 $X = X(t) = t$, 是随机变量.

第三部分: 离散型随机变量及其分布函数 (40 分钟)

一、离散型随机变量及概率分布律的定义:

1. 离散型随机变量的定义:

若随机变量 X 的全部可能取值为有限个或可列无穷多个, 则称随机变量 X 为离散型随机变量.

2. 离散型随机变量概率分布律的定义:

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i (i = 1, 2, \dots)$, 称 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \dots$

为 X 的**概率分布**或**分布律**.

常用表格形式来表示 X 的概率分布:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P_i	p_1	p_2	\dots	p_n

例 在将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 、反面 T 出现情况的试验中, 其样本空间 $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$; 记每次试验出现正面 H 的总次数为随机变量 X , 那么, X 的可能取值为 $\{0, 1, 2, 3\}$. 则 X 作为样本空间 S 上的函数

$$\text{数定义为: } X = \begin{cases} 3 & \{HHH\} \\ 2 & \{HHT, HTH, THH\} \\ 1 & \{HTT, THT, TTH\} \\ 0 & \{TTT\} \end{cases}$$

概率密度函数的性质:

1° 非负性: $p(x_i) \geq 0$;

2° 规范性: $\sum p(x_i) = 1$

例 1 一汽车在开往目的地的道路上需要经过四组信号灯的. 假设一汽车在开往目的地的道路上需经过四组信号灯, 这组信号灯以 p 的概率允许或者禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯的组数 (设各组信号灯的工作是相互独立的), 求 X 的分布律?

二常见离散型随机变量的概率分布规律:

1. 两点分布

如果 X 的分布律为: $P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, x = 0, 1.$

概率分布列为:

X	0 1
p_k	$1 - p$ p

则称 X 服从**两点分布 (或 0-1 分布)** 记作: $X \sim b(1, p)$ 。

2. 二项分布

若 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = C^k p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

其中 $0 < p < 1, p + q = 1$, 则称 X 服从参数为 n, p 的**二项分布**. 记作: $X \sim b(n, p)$

特别, 当 $n = 1$ 时, 二项分布为 $P\{X = k\} = p^k q^{1-k}$ ($k = 0, 1$) 就化为 0—1 分布. 可见 0—1 分布是二项分布的特殊情形。

例2 按规定, 某种型号的电子元件的使用寿命超过 1500 小时的为一级品。已知某一大批该产品的一级品率为 0.2, 现从中随机抽取 20 只, 问 20 只样品中恰有 k 只为一级品的概率是多少?

例3 某人进行射击, 设每次射击的命中率为 0.02, 独立射击 400 次, 试求至少击中两次的概率。

例4 设有 80 台同类型设备各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是 0.01, 且一台设备的故障能由一个人处理, 考虑两种配备维修工人的方法, 其一是由 4 人维

护, 每人负责 20 台; 其二是由 3 人共同维护 80 台, 试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率大小。

3. 泊松分布 (1837 年法国数学家泊松 (1781-1840) 提出) 若随机变量 X 的分布列为:

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $X \sim P(\lambda)$, 或 $X \sim \pi(\lambda)$ 。

二项分布的泊松近似

定理 2.4.1 (泊松定理) 在 n 重贝努利试验中, 记事件 A 在一次试验中发生的概率为 p_n (与试验次数 n 有关)

若当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $np_n \rightarrow \lambda$,

(证明略)

泊松定理是在 $np_n \rightarrow \lambda$ 条件下获得的故在计算二项分布 $b(n, p)$ 时, 当 $n \rightarrow +\infty$,

$p \rightarrow 0$, 而 $\lambda = np$ 适中时, 可用泊松分布作近似.

例 5 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片, 次品率达 0.1%, 各芯片成为次

品相对独立, 求在 1000 只产品中至少有 2 只次品的概率. 以 X 记产品中的次品数,

$X \sim b(1000, 0.001)$.

第四部分: 总结离散型的概率分布率(5 分钟)

一、设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i (i = 1, 2, \dots)$, 称 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2,$

为 X 的**概率分布或分布律**。

常用表格形式来表示 X 的概率分布:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P_i	p_1	p_2	\dots	p_n

5.3、5.4 随机变量的分布函数 连续型随机变量及其概率密度

第一部分: 旧知识点复习和新课内容概述(10 分钟)

上一次课我们学习了离散型随机变量的分布律问题, 但对于非离散型随机变量 X , 由于其可能取值不能一个一个的列举而无法用分布律来描述

另外, 所遇到的非离散型随机变量通常取任一指定的实数值的概率都等于 0, 下一节具体学习。这也就是第一章提到的概率为 0 的事件不一定为空集的情况实际问题中有很多此类变量: 误差 ε , 元件寿命 T 等.

对于此类问题, 主要研究随机变量取值落在某一个区间的概率, 即:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} \quad \text{物理意义}$$

问题变为计算 $P\{X \leq x_2\}$ 及 $P\{X \leq x_1\}$, 于是引入分布函数的概念。

第二部分: 随机变量的分布函数 (35 分钟)

分布函数定义:

设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数 $F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < \infty$

称为 X 的分布函数。

左开右闭区间上的概率:

对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

\therefore 已知分布函数, 就可以计算出 x 落在任意区间 $(x_1, x_2]$ 上的概率, **分布函数**

完整地描述了随机变量的统计规律性。

分布函数的物理意义:

将 X 看成是数轴上的随机点的坐标, 那么, 分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值就表示

X 落在 $(-\infty, x]$ 上的概率。

分布函数具有以下基本性质

1° $F(x)$ 是一个不减函数

对任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$

2° $0 \leq F(x) \leq 1$ 且 $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

仅从物理意义上加以说明: 当 x 趋于 $-\infty$ 时, 即区间端点沿 x 轴无限左移, $\{X < x$

逐渐趋于 **不可能事件**, 从而其概率趋于 0, 即有 $F(-\infty) = 0$; 反之, 若点 x 无限右移

3° $F(x+0) = F(x)$ 即 $F(x)$ 为右连续的

$F(x)$ 在点 x 处的右极限等于点 x 处的函数值, 即 $F(x)$ 是右连续的。

例 1: 随机变量的分布律用分布函数来表示

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
pk	1/4	1/2	1/4

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leq 1/2\}, P\{3/2 < X \leq 5/2\}, P\{2 \leq X \leq 3\}$

解: 随机变量落在 $-1, 2, 3$ 三个点上的概率为非 0, 落在其它点上为不可能事件, 因此有

※ 1° 概率函数与普通的代数函数不同之处在于物理意义不同, 前者自变量

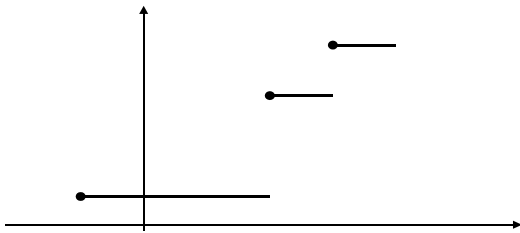
是随机变

量 X 的取值落在 $(-\infty, x]$ 区间上的概率

※ 2° 求分布函数，一定要讨论区间 $(-\infty, \infty)$ 上的所有情况

※ 3° $F(x)$ 的值即为所有 $\leq x$ 的 X 取值中落在 x_k 处的概率 p_k 之和

※ 4° $F(x)$ 的图形是一条阶梯形曲线，在 $x=-1, 2, 3$ 处有阶跃点，阶跃值分别为 $1/4$,



※ 在阶跃点处，下面是空心，上面是实心，体现右连续性

$$P\{X \leq 1/2\} = F(1/2) = 1/4$$

$$P\{3/2 < X \leq 5/2\} = F(5/2) - F(3/2) = 3/4 - 1/4 = 1/2$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\} = F(3) - F(2) + P\{X=2\} = 1 - 3/4 + 1/2 = 3/4 \quad \text{注意区间左端的等号}$$

分布律用分布函数表示的一般方法：

一般的，设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\} = p_k, \quad k=1, 2, \dots$$

$$\text{即 } F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

这里和式是对所有满足 $x_k \leq x$ 的 k 求和的，分布函数在点 $x=x_k$ ($k=1, 2, \dots$) 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k = P\{X=x_k\}$

例2 一般随机变量的分布函数的求解方法

一个靶子是半径 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该同心圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离，试求随机变量 X 的分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$

解：分段讨论：

1° 当 $x < 0$ 时， $\{X \leq x\}$ 是不可能事件， $F(x) = 0$

2° 在圆盘上， $0 \leq x \leq 2$ ，由题意， $P\{0 \leq X \leq x\} = k\pi x^2$

当 $x=2$ 时由于假定每次射击都能中靶，有 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$

$$\leq \therefore 1 = k\pi^2$$

\leq

即 $k\pi = 1/4$ 代入得 $F(x) = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = 0 + (1/4)x^2 = (1/4)x^2$

※注意区间端点的取值

※注意对 x 的讨论一定要全，在 $(-\infty, \infty)$ 上都要考虑

※注意 x 是值， X 是随机变量

现在对 $F(x)$ 求导数（不可导的点的导数设为 0）

这样有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ，即 $F(x)$ 是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$

上的积分， $f(t)$ 即为下一节要学习的概率密度函数，其中 X 是连续型。

第三部分：连续型随机变量及概率密度的定义

连续型随机变量及概率密度 定义： 由例 2

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ ，存在非负函数 $f(x)$ ，使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

则称 X 为**连续型随机变量**，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**

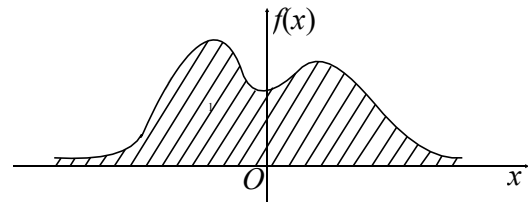
※由数学分析的知识，**连续型随机变量的分布函数是连续函数**

※在实际应用中遇到的基本上是离散和连续型随机变量

概率密度函数的性质：

1° 非负性： $f(x) \geq 0$ 。 由定义可知

2° 规范性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1$



曲线 $y=f(x)$ 与 Ox 轴之间的面积等于 1

3° 对任意实数 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

概率 $P\{x_1 < X \leq x_2\}$ 等于区间 $(x_1, x_2]$ 上曲线 $y=f(x)$ 之下的曲边梯形的面积

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处**连续**，则有 $F(x)' = f(x)$

a) 线密度定义:

由连续性定义, 在连续点 x 处有 $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] / \Delta x$

这正好与物理学中的线密度的定义类似: 随机点落在单位区间上概率的大小 当 Δx 充分小时, 点 x 处的曲边梯形可近似为长 Δx 高 $f(x)$ 的矩形。

即 $P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$, 随机变量 X 落在 $(x, x + \Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$, 忽略了高阶无穷小。

b) 对于连续型随机变量, 单点概率为 0

即若 X 为连续型随机变量, 对任意的实数 a , 有 $P\{X=a\}=0$

证: 显然有包含关系 $\{X=a\} \subset \{a - \Delta x < X \leq a\}$

$$\therefore 0 \leq P\{X=a\} \leq P\{a - \Delta x < X \leq a\} = F(a) - F(a - \Delta x)$$

$F(x)$ 是连续的, (也满足左连续) 连续型随机变量的分布函数是连续的

\therefore 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时有

$$0 \leq P\{X=a\} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(a) - F(a - \Delta x)) = F(a) - F(a) = 0$$

即 $P\{X=a\} = 0$

要注意几点:

1° 只有当 X 为连续型时, 才一定有 $P\{X=a\}=0$, 否则不一定

2° 尽管 $P\{X=a\}=0$, 但 $\{X=a\}$ 不是不可能事件

3° 连续型随机变量中区间的端点不影响概率值, 即对以下概率不加区分

课后小结

以下几个方面应该给出更为准确清晰的讲解

1. 随机变量的定义
2. 离散型随机变量的分布律如何确定
3. 泊松定理的证明
4. 分布函数的意义和性质
5. 离散型和连续型随机变量的分布函数如何确定
6. 连续型随机变量的概率密度性质

作业: 课后习题 1, 2, 3;

第六章统计量及其抽样分布

一、教学目的:

理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本矩及样本方差的概念。

了解 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的概念及性质，了解分位数的概念并会查表计算。

了解正态总体的某些常用抽样分布。

二、教学重点与难点

教学重点:

总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本矩及样本方差的概念、 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的概念及性质、分位数的概念并会查表、正态总体的某些常用抽样分布。

教学难点:

统计量、样本均值、样本矩及样本方差 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的性质，正态总体某些常用抽样分布、

三、教学方法：讲授、课堂提问、讨论、启发、自学

四、教学学时：6 学时

五、教学内容（或教学过程）

一. 总体与样本

1. 总体与个体：把研究对象的全体称为总体，构成总体的每个成员称为个体。

2. 有限总体与无限总体：若总体中的个体数是有限的，此总体称为有限总体；否则称为无限总体。

3. 样本容量：在相同的条件下从总体中随机地抽取 n 个个体，记为 X_1, X_2, \dots, X_n ，我们将 X_1, X_2, \dots, X_n 称为来自总体 X 的一个样本， n 称为样本容量。

4. 简单随机样本：若样本 X_1, X_2, \dots, X_n 与所考察的总体具有相同的分布，且 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，则称 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，简称样本。

5. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本，则 X_1, X_2, \dots, X_n 的分布函数为

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i).$$

6. 若总体 X 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_i\} = p(x_i)$ ， x_i 取遍 X 所有可能取值，则样本的概率分布为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n p(x_i).$$

7. 若总体 X 为连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 则样本的概率密度为

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i).$$

二. 统计量

1. 统计量: 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为取自某总体的样本, 若样本函数 $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 中不含有任何未知参数, 则称 T 为统计量. 统计量的分布称为抽样分布.

2. 几个常见统计量: 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是总体 X 的样本, 常用的统计量有

$$(1) \text{ 样本均值: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$$

$$(2) \text{ 样本方差: } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2;$$

$$(3) \text{ 样本标准差: } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2};$$

$$(4) \text{ 样本 } k \text{ 阶 (原点) 矩: } A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k=1, 2, \dots;$$

$$(5) \text{ 样本 } k \text{ 阶中心矩: } B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k=1, 2, \dots.$$

3. 性质: 设总体 X 具有二阶矩, 即 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2 < +\infty$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, \bar{X} 和 S^2 分别是样本均值与样本方差, 则

$$(1) E(\bar{X}) = E(X) = \mu;$$

$$(2) D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$(3) E(S^2) = D(X) = \sigma^2.$$

三. 例题讲解

例 1. 从某班级的英语期末考试成绩中, 随机抽取 10 名同学的成绩, 分别为: 100, 85, 70, 65, 90, 95, 63, 50, 77, 86. 求样本均值, 样本方差及二阶原点矩.

例 2. 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 求 $E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right]$.

抽样分布

1. χ^2 分布 (卡方分布)

(1) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的样本, 则称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

$$(2) \chi^2(n) \text{ 分布的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 设 $X \sim \chi^2(n)$, 则有 $E(X) = n$, $D(X) = 2n$.

(4) 若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 且 X 与 Y 独立, 则 $X+Y \sim \chi^2(n_1+n_2)$.

2. t 分布

(1) 设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则称随机变量 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 T 分布, 记为 $T \sim t(n)$. t 分布, 又称学生 (*Student*) 分布.

$$(2) t \text{ 分布的概率密度为 } f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. F 分布

(1) 设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 相互独立, 则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

(2) $F(n_1, n_2)$ 分布的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(3) 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.

4. 上侧 α 分位数 (点)

(1) 设有随机变量 X , 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 若存在实数 x_α 满足 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 为 X 的上侧 α 分位数 (点).

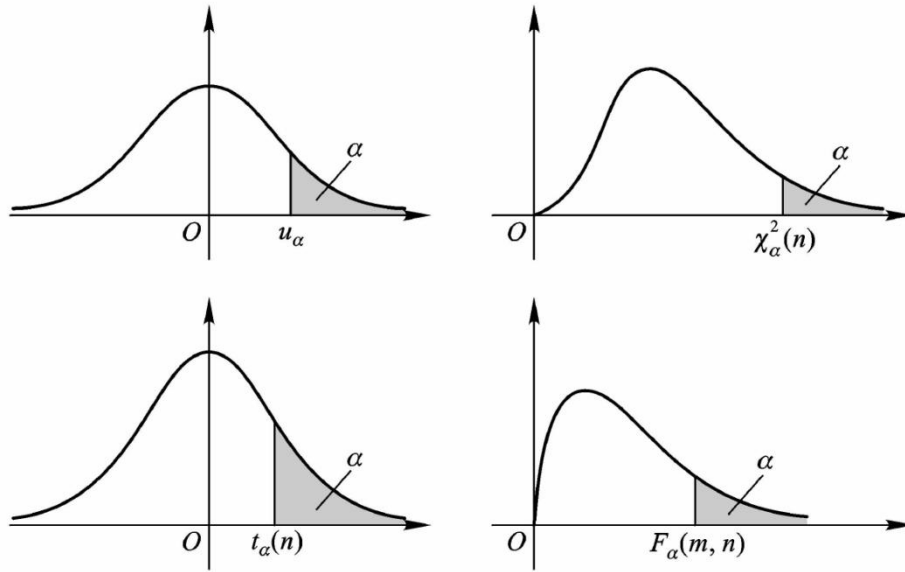
(2) 标准正态分布、自由度为 n 的卡方分布、自由度为 n 的 t 分布、自由度为 n_1, n_2 的 F 分布的上侧 α 分位数分别记为 u_α 、 $\chi_\alpha^2(n)$ 、 $t_\alpha(n)$ 、 $F_\alpha(n_1, n_2)$, 图像如下图所示. 即有

(1) $X \sim N(0,1)$, 则 $P(X > u_\alpha) = \alpha$;

(2) $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha$;

(3) $T \sim t(n)$, 则 $P\{T > t_\alpha(n)\} = \alpha$;

(4) $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$.



四大抽样分布的上侧 α 分位数

(5) 性质

(i) 由标准正态分布和 t 分布的对称性有: $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$; $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$.

(ii) 由 F 分布的定义可以得到: $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_1, n_2)}$.

(iii) 由于 n 比较大时 t 分布近似 $N(0, 1)$, 一般的, 当 $n > 45$ 时, 有 $t_\alpha(n) \approx u_\alpha$.

二. 正态总体的抽样分布

1. 来自单一正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的统计量的分布

定理: 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, \bar{X} 、 S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有

$$(1) \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ 即 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1);$$

$$(2) \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

2. 来自两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的统计量的分布

定理: 设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 其样本均值分别记为 \bar{x}, \bar{y} , 样本方差分别记为 S_1^2, S_2^2 , 则

$$(1) \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1);$$

$$(2) \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

$$(3) \text{ 当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 时, } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2); \quad \text{其中}$$

$$S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

例 5.4 设 $X \sim N(0, 3^2), Y \sim N(0, 3^2)$, 且 X, Y 相互独立, $(X_1, \dots, X_9), (Y_1, \dots, Y_9)$ 分

别为来自 X 和 Y 的样本, 求 $U = \frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}}$ 的分布.

例 5.5 设 X_1, X_2, \dots, X_{15} 是来自总体 $N(0, 2^2)$ 的样本, 求统计量

$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$
 的分布.

例 5.6 某公司生产瓶装洗洁精, 规定每瓶装 500 毫升, 但是在实际罐装的过程中, 总会出现一定的误差, 误差要求控制在一定范围内. 假定灌装量的方差 $\sigma^2 = 1$, 如果每箱装 25 瓶这样的洗洁精, 试问 25 瓶洗洁精的平均灌装量和标准值 500 毫升相差不超过 0.3 毫升的概率是多少?

例 5.7 设总体 X 服从正态分布 $N(72, 100)$, 为使样本均值大于 70 的概率不小于 90%, 则样本容量应取多少?

例 5.8 在设计导弹发射装置时, 重要事情之一是研究弹着点偏离目标中心的距离的方差. 对于一类导弹发射装置, 弹着点偏离目标中心的距离服从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$, 这里 $\sigma^2 = 100$ 平方米, 现在进行了 21 次发射试验, 用 S^2 表示这 21 次试验中弹着点偏离目标中心的距离的样本方差, 试估计 S^2 不超过 170.85 平方米的概率.

第七章参数估计

一、教学目的:

(1) 使学生了解参数估计中最基本的点估计及相关概念;

(2) 使学生掌握矩估计及最大似然估计的方法;

(3) 使学生掌握评价估计量优劣的四个标准, 尤其是前三个标准;

(4) 使学生了解矩估计、最大似然估计的原理.

二、教学重点与难点

教学重点:

本章重点是求未知参数的矩估计与最大似然估计的方法以及如何对求出的估计量的优良性进行评价. 矩法估计、最大似然估计. 相合估计、无偏估计和有效性.

教学难点:

运用矩法估计、最大似然估计对参数进行估计. 如何确定相合估计、无偏估计和有效性.

三、教学方法: 讲授、课堂提问、讨论、启发、自学

四、教学学时: 3 学时

五. 教学内容 (或教学过程)

一、参数估计问题

这里所指的参数是指如下三类未知参数:

1、 类型已知的分布中所含的未知参数 θ . 如二点分布 $b(1, p)$ 中的概率 p ; 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 μ 和 σ^2 ;

2、 分布中所含的未知参数 θ 的函数: 如正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的变量 X 不超过给定值 a 的概率 $P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$ 是未知参数 μ, σ 的函数;

3、 分布的各种特征数也都是未知参数, 如均值 EX , 方差 $VarX$, 分布中位

数等等.

一般场合, 常用 θ 表示参数, 参数 θ 所有可能取值的集合称为参数空间, 记为

①. 参数估计问题就是根据样本对上述各种参数做出估计.

二、概率函数

总体 X 的概率函数 $p(x, \theta)$ 是指: 当 X 为离散型总体时, $p(x, \theta)$ 就是总体的分布列; 当 X 为连续性总体时, $p(x, \theta)$ 就是总体的密度函数.

三、参数估计形式

分为点估计与区间估计.

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体的样本, 我们用一个统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 的取值作为 θ 的估计值, $\hat{\theta}$ 称为 θ 的点估计量, 简称估计. 若给出参数 θ 的估计是一个随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, 使这个区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 包含参数真值的概率大到一定程度, 此时称 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为参数 θ 的区间估计.

用样本矩去替换总体矩 (矩可以是原点矩也可以是中心矩), 用样本矩的函数去替换总体矩的函数, 这就是替换原理.

用替换原理得到的未知参数的估计量称为矩法估计.

注 矩法估计适用于总体分布形式未知场合, 因此只要知道总体相应的矩即可, 而不必知道其具体分布.

一 矩法估计

在总体分布位置的情况下，用样本矩去替换总体矩

如 用样本均值 \bar{x} 估计总体均值 $E(X)$ ，即 $\hat{E}(X)=\bar{x}$ 。

用样本方差 s_n^2 估计总体方差 $\text{Var}(X)$ ，即 $\hat{\text{Var}}(X)=s_n^2$

用事件 A 出现的频率 估计事件 A 发生的概率

用样本 P 分位数估计总体的 P 分位数, 特别地, 用样本中位数去估计总体中位数.

例 6.1.1 对某型号的 20 辆汽车记录其每 5L 汽油的行驶里程, 观测数据如下:

29.8 27.6 28.3 27.9 30.1 28.7 29.9 28.0 27.9 28.7

28.4 27.2 29.5 28.5 28.0 30.0 29.1 29.8 29.6 26.9

经计算可得 $\bar{x}=28.695$, $s_n^2=0.9185$, $m_{0.5}=28.6$, 由此给出总体均值, 方差和中位数的估计分别为 28.695, 0.9185, 28.6.

二 概率函数 $p(x, \theta)$ 已知时未知参数的矩法估计

设总体的概率函数 $p(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$, $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta$ 是未知参数, x_1, x_2, \dots, x_n 是

总体 X 的样本, 若 $E(X^k)$ 存在, 则 $\forall j < k, E(X^j)$ 存在. 设

$$\mu_j = E(X^j) = v_j(\theta_1, \dots, \theta_k), j = 1, 2, \dots, k,$$

如果 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 也能够表示成 μ_1, \dots, μ_k 的函数 $\theta_j = \theta_j(\mu_1, \dots, \mu_k), j = 1, 2, \dots, k$, 则可给出 θ_j 的矩估计量为 $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(a_1, \dots, a_k), j = 1, 2, \dots, k$, 其中

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j, j = 1, 2, \dots, k$$

设 $\eta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$ 是 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 的函数, 则利用替换原理可得到 η 的矩估计量 $\hat{\eta} = g(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$, 其中 $\hat{\theta}_j$ 是 θ_j 的矩估计, $j = 1, 2, \dots, k$.

例 6.1.2 设总体为指数分布, 其密度函数为 $p(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本, $\lambda > 0$ 为未知参数, 求 λ 的矩估计.

解 $\because X \sim \text{Exp}(\lambda), \therefore EX = \frac{1}{\lambda}, \therefore \lambda = \frac{1}{EX}, \therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ 为 λ 的矩估计.

注 $\because X \sim \text{Exp}(\lambda), \therefore \text{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}, \therefore \lambda = \sqrt{\frac{1}{\text{Var}X}}, \therefore \hat{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{S^2}} = \frac{1}{S}$ 也为 λ 的矩估计. 因此矩估计不唯一, 此时, 尽量采用低阶矩给出未知参数的估计.

例 6.1.3 设总体 $X \sim U[a, b], x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本, 求 a, b 的矩估计.

解 $\because X \sim U[a, b], \therefore EX = \frac{a+b}{2}, \text{Var}X = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$\text{由} \begin{cases} EX = \frac{a+b}{2} \\ \text{Var}X = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a = EX - \sqrt{3\text{Var}X} \\ b = EX + \sqrt{3\text{Var}X} \end{cases},$$

$$\text{所以 } a, b \text{ 的矩估计为} \begin{cases} \hat{a} = \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3}s \end{cases}$$

三 矩估计的步骤

(1) 计算总体的各阶矩 EX^j , $j=1,2,\dots,k$, 令

$$\mu_j = EX^j = v_j(\theta_1, \dots, \theta_k), j=1,2,\dots,k;$$

(2) 解出 θ_j , 即 $\theta_j = \theta_j(\mu_1, \dots, \mu_k), j=1,2,\dots,k$;

(3) 令 $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(a_1, \dots, a_k), j=1,2,\dots,k$, 其中 $a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j, j=1,2,\dots,k$;

(4) 若 $\eta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$, 则 $\hat{\eta} = g(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ 为 η 的矩估计量.

最大似然原理

一个试验有若干个可能的结果 A, B, C, \dots , 若在一次试验中结果 A 出现, 则一般认为试验条件对结果 A 出现有利, 也即 A 出现的概率最大.

例 6.1.4 设有外形完全相同的两个箱子, 甲箱有 99 个白球和一个黑球, 乙箱有 99 个黑球和一个白球, 今随机抽取一箱, 并从中随机抽取一球, 如果取出白球,

问这球是从哪一箱取出的？

解 从甲乙两箱均可取出白球，但计算得

$$P(\text{取出白球} \mid \text{甲箱}) = \frac{99}{100} \gg P(\text{取出白球} \mid \text{乙箱}) = \frac{1}{100}$$

据最大似然原理，则认为该球是从甲箱取出的。

例 6.1.5 产品分为合格品和不合格品两类，用随机变量 X 表示某个产品是否合格， $X=0$ 表示合格品， $X=1$ 表示不合格品，从而 $X \sim b(1, p)$ ，其中 p 未知是不合格品率，现抽取 n 个产品看是否合格，得到样本 x_1, x_2, \dots, x_n ，这批观测值发生的概率为：

$$\begin{aligned} L(p) &= p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

当 x_1, x_2, \dots, x_n 已知时， $L(p)$ 仅是 p 的函数，既然一次抽样观测到 x_1, x_2, \dots, x_n ，此时应认为试验条件对该组样本的出现有利，即该组样本出现的概率最大，从而可求出当 $p=?$ 时 $L(p)$ 达到最大，此时把求出的 $p=?$ 做为参数 p 的估计就得到 p 的最大似然估计，问题转化为求 $L(p)$ 的最大值点。

如果总体为连续型的，求未知参数的最大似然估计仍可转化为求 $L(p)$ 的最大值点问题。为此给出似然函数与最大似然估计的定义。

似然函数与最大似然估计

定义 6.1.1 设总体 X 的概率函数为 $p(x; \theta), \theta \in \Theta$ 是一个未知参数或几个未知参数组成的参数向量, x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体 X 的样本, 称样本的联合概率函数为似然函数, 用 $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$ 表示, 简记为 $L(\theta)$, 即

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

如果统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的最大似然估计, 简记为 MLE.

由于 $\ln x$ 是 x 的单调增函数, 因此对数似然函数 $\ln L(\theta)$ 达到最大与似然函数 $L(\theta)$ 达到最大是等价的.

求最大似然估计的两种方法

(1) 似然方程法

当 $L(\theta)$ 是可微函数时, $L(\theta)$ 的极大值点一定是驻点, 从而求最大似然估计往往借助于求下列似然方程 (组)

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

的解得到, 而后利用最大值点的条件验证求出的是最大值点.

例 6.1.6 设一个试验有三种可能结果，其发生概率分别为 $p_1 = \theta^2, p_2 = 2\theta(1-\theta), p_3 = (1-\theta)^2$ ，现做了 n 次实验，观测到三种结果发生的次数分别是 n_1, n_2, n_3 ，求 θ 的最大似然估计。

解 略。

例 6.1.7 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ， $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 是二维参数， x_1, x_2, \dots, x_n 为其样本，求 μ, σ^2 的最大似然估计。

解：
$$\because X \sim f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R$$

所以似然函数为：
$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

取对数：
$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

分别对 μ, σ^2 求导数：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu}(\ln L) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \hat{=} 0 & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2}(\ln L) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \hat{=} 0 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

由 (1) $\Rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ ，代入 (2) $\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$\therefore \mu, \sigma^2$ 的极大似然估计值分别为: $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

μ, σ^2 的极大似然估计量分别为: $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S^{*2}$

(2) 定义法

虽然求导函数是求最大似然估计量最常用的方法, 但并不是所有场合求导都是有效的.

例 6.1.8 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是均匀分布 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本, 求 θ 的最大似然估计.

解: 由已知 X 概率函数为

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , \quad 0 < x \leq \theta \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为取自 X 的样本

$$\text{则, } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & , \quad 0 < x_i \leq \theta \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & , \quad 0 < \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \leq \theta \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases}$$

由于 $p(x, \theta)$ 与 θ 有关, 不存在易解的似然方程, 我们由定义, 找 $L(\theta)$ 的最大

值点, 由 $L(\theta)$ 的表达式, θ 越小 $L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}$ 就越大

因 $\theta_L \geq \max\{x_i\} = x_{(n)}$, 所以 $\theta = x_{(n)}$ 时 $L(\theta)$ 达极大.

最大似然估计的不变性

性质 如果 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计, 则对任一函数 $g(\theta)$, $g(\hat{\theta})$ 是 $g(\theta)$ 的最大似然估计.

注 上述性质称为最大似然估计的不变性, 从而使求复杂结构的参数的最大似然估计变得容易, 具体应用略.

例 6.1.9 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 是二维参数, x_1, x_2, \dots, x_n 为其样

本, 已知 μ, σ^2 的最大似然估计: $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{x}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^{*2}$, 有最大

似然估计的不变性可得标准差 σ 的 MLE 为 $\hat{\sigma} = s^*$,

概率 $P(X < 3) = \Phi\left(\frac{3 - \mu}{\sigma}\right)$ 的 MLE 为 $\Phi\left(\frac{3 - \bar{x}}{s^*}\right)$,

总体 0.90 分位数 $x_{0.90} = \mu + \sigma \cdot u_{0.90}$ 的 MLE 为 $\bar{x} + s^* \cdot u_{0.90}$.

我们已经看到, 点估计有各种不同的求法, 为了在不同的点估计间进行比较选择, 就必须对各种点估计的好坏给出评价标准. 数理统计中给出了众多的估计量评价标准, 对同一估计量使用不同的评价标准可能会得到完全不同的结论, 因此, 在评价某一个估计好坏时, 首先要说明是在哪一个标准下, 否则所论好坏则毫无意义.

但不管怎么说，有一个基本标准是所有的估计都应该满足的，它是衡量估计是否可行的必要条件，这就是估计的相合性。

6.2.1 相合性

定义 6.2.1 设 $\theta \in \Theta$ 为未知参数， $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的一个估计量， n 是样本容量，若对任一 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

即 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 依概率收敛于 θ ，则称 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的相合估计。

相合性被认为是对估计的一个最基本要求，如果一个估计量在样本量不断增大时，它都不能把被估参数估计到任意指定的精度，那么这个估计是很值得怀疑的，通常，不满足相合性要求的估计一般不予考虑。

注 证明估计的相合性一般可应用大数定律或直接用定义来证，有时借助于依概率收敛的性质。

例 6.2.1 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则由辛钦大数定律及依概率收敛的性质知： \bar{x} 是 μ 的相合估计， s^{*2} 是 σ^2 的相合估计， s^2 也是 σ^2 的相合估计。

相合性的判别定理

定理 6.2.1 设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的一个估计量，若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \hat{\theta}_n = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \hat{\theta}_n = 0$$

则 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的相合估计.

证明 由切比雪夫不等式知: $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{\varepsilon^2}$$

$$E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = E(\hat{\theta}_n^2) - 2\theta E(\hat{\theta}_n) + \theta^2 = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + E^2(\hat{\theta}_n) - 2\theta E(\hat{\theta}_n) + \theta^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{Var} \hat{\theta}_n + (E \hat{\theta}_n)^2 - 2\theta E \hat{\theta}_n + \theta^2] = 0 + \theta^2 - 2\theta \times \theta + \theta^2 = 0$$

所以
$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{\varepsilon^2} = 0$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

例 6.2.2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是均匀分布 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本, 证明: θ 的最大似然估计 $\hat{\theta} = x_{(n)}$ 是 θ 的相合估计.

分析 直接验证定理 6.2.1 的条件.

证明 略.

定理 6.2.2 若 $\hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}, \dots, \hat{\theta}_{nk}$ 分别是 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 的相合估计, $\eta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$ 是 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 的连续函数, 则 $\hat{\eta}_n = g(\hat{\theta}_{n1}, \dots, \hat{\theta}_{nk})$ 是 $\eta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$ 的相合估计,

证明 略.

例 6.2.3 设一个试验有三种可能结果, 其发生概率分别为 $p_1 = \theta^2, p_2 = 2\theta(1-\theta), p_3 = (1-\theta)^2$, 现做了 n 次实验, 观测到三种结果发生的次数

分别是 n_1, n_2, n_3 , $n_1 + n_2 + n_3 = n$ 证明: $\hat{\theta}_1 = \sqrt{\frac{n_1}{n}}$, $\hat{\theta}_2 = 1 - \sqrt{\frac{n_3}{n}}$, $\hat{\theta}_3 = \frac{n_1 + \frac{n_2}{2}}{n}$ 均是 θ 的相合估计.

分析 直接验证定理 6.2.2 的条件.

证明 略.

6.2.2 无偏性

定义 6.2.2 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的一个估计, $\theta \in \Theta$, 若对 $\forall \theta \in \Theta$, 有 $E\hat{\theta} = \theta$, 则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的无偏估计, 否则称为有偏估计.

注 相合性是大样本所具有的性质, 而无偏性对一切样本均可以用.

无偏性可以改写成 $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$, 这表明无偏估计没有系统偏差, 当我们使用 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 估计 θ 时, 由于样本的随机性, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 θ 总是有偏差的, 这种偏差时而正, 时而负, 时而大, 时而小, 无偏性表示, 把这些偏差平均起来其值为零, 这就是无偏性的含义.

例 6.2.4 对任一总体而言,当总体的 k 阶矩 μ_k 存在时,样本的 k 阶原点矩 a_k 是总体的 k 阶矩 μ_k 的无偏估计. 当总体的 2 阶矩存在时, 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{是总体方差 } \text{Var}X \text{ 的无偏估计, 但} \quad S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{不是总}$$

体方差 $\text{Var}X$ 的无偏估计.

注 无偏性不具有不变性, 即若 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的一个无偏估计, 一般而言 $g(\hat{\theta})$ 不是 $g(\theta)$ 的无偏估计, 除非 $g(\hat{\theta})$ 是 $\hat{\theta}$ 的线性函数.

例 6.2.5 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, x_1, x_2, \dots, x_n 为其样本,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{是 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计, 证明: } S = \sqrt{S^2} \text{ 不是 } \sigma \text{ 的无偏估计.}$$

证明 略.

注 (1) 无偏估计可以不存在; (2) 无偏估计可以不唯一; (3) 无偏估计未必是一个好的估计. 具体例子略.

6.2.3 有效性

参数的无偏估计可以有很多, 如何在无偏估计中进行选择? 直观的想法是希望该估计围绕在参数真值的波动越小越好, 波动大小可用方差来衡量, 因此人们常用无偏估计的方差的大小作为度量无偏估计优劣的标准, 这就是有效性.

定义 6.2.3 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计, 如果对任意的 $\theta \in \Theta$, 有

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) \leq \text{Var}(\hat{\theta}_2)$$

且至少有一个 $\theta \in \Theta$ 使得上述不等式严格成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例 6.2.6 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为取自某总体的样本, 记总体均值为 μ , 总体方差为 σ^2 , 则 $\hat{\mu}_1 = x_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{x}$ 都是 μ 的无偏估计, 且 $\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效.

证明 略.

例 6.2.7 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为取自 $X \sim U(0, \theta)$ 总体的样本, 对 θ 的两个无偏估计 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{x}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}x_{(n)}$, 证明: $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

证明 略.

6 无偏估计是估计的一个优良性质, 对无偏估计我们还可以通过其方差进行有效性的比较, 然而不能由此认为: 有偏估计一定是不好的估计, 在有些场合, 有偏估计比无偏估计更优, 这就涉及如何对有偏估计进行评价. 一般而言, 在样本量一定时, 评价一个点估计的好坏使用的度量指标总是点估计值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与参数真值 θ 的距离的函数, 最常用的函数是距离的平方. 由于具有随机性, 可以

对该函数求期望, 这就是下式给出的均方误差 $MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

简单的推导可得到

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)^2$$

若 $E\hat{\theta} = \theta$, 则 $MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$. 当 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 不是 θ 的无偏估计时, 对均方误差 $MSE(\hat{\theta})$, 不仅要看其方差的大小, 还要看偏差大小. 在均方误差的标准下, 有些有偏估计优于无偏估计.

例 6.2.8 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为取自 $X \sim U(0, \theta)$ 总体的样本, 在均方误差的标准下,

$\hat{\theta}_0 = \frac{n+2}{n+1} x_{(n)}$ 是 θ 的有偏估计, 但 $\hat{\theta}_0 = \frac{n+2}{n+1} x_{(n)}$ 要优于 $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} x_{(n)}$ 这个无偏估计.

证明 略.

6.3.1 Rao-Blackwell 定理

定理 6.3.1 (Rao-Blackwell 定理) 设 X 和 Y 是两个随机变量, $E(X)=\mu, \text{Var}(X)>0$, 我们用条件期望构造一个新的随机变量 $\varphi(Y)$, 其定义为 $\varphi(Y)=E(X|Y=y)$, 则有 $E(\varphi(Y))=\mu, \text{Var}(\varphi(Y)) \leq \text{Var}(X)$.

其中等号成立的充分必要条件是 X 和 $\varphi(Y)$ 几乎处处相等.

将定理 6.3.1 应用到参数估计问题中可得

定理 6.3.2 设总体概率密度函数是 $p(x; \theta)$, x_1, x_2, \dots, x_n 是其样本, $T=T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 θ 的充分统计量, 则对 θ 的任一无偏估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 令 $\tilde{\theta}=E(\hat{\theta}|T)$, 则 $\tilde{\theta}$ 也是 θ 的无偏估计, 且 $\text{Var}(\tilde{\theta}) \leq \text{Var}(\hat{\theta})$.

6.3.2 最小方差无偏估计

定义 6.3.1 对参数估计问题, 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 若对 θ 的任一个无偏估计量 $\tilde{\theta}$, 在参数空间 Θ 上都有

$$\text{Var}_{\theta}(\tilde{\theta}) \leq \text{Var}_{\theta}(\hat{\theta})$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致最小方差无偏估计, 简记为 UMVUE.

如果 UMVUE 存在, 则它一定是充分统计量的函数.

一般来说, 如果依赖充分统计量的无偏估计只有一个, 则它就是 UMVUE.

下面给出一个 UMVUE 的判断准则.

定理 6.3.3 设 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自某总体的一个样本, $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X)$ 是 θ 的一个无偏估计, $Var(\hat{\theta})<+\infty$, 若对任意一个满足 $E(\varphi(X))=0$ 的 $\varphi(X)$ 都有

$Cov_{\theta}(\hat{\theta}, \varphi)=0, \forall \theta \in \Theta$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 UMVUE.

例 6.3.2

6.3.3 *Gramer-Rao* 不等式

定义 6.3.2 设总体的概率函数 $p(x; \theta), \theta \in \Theta$, 满足下列条件:

(1) 参数空间 Θ 是直线上的一个开区间;

(2) 支撑 $S = \{x : p(x; \theta) > 0\}$ 与 θ 无关;

(3) 导数 $\frac{\partial}{\partial \theta} p(x; \theta)$ 对一切 $\theta \in \Theta$, 都存在;

(4) 对 $p(x; \theta)$, 积分与微分运算可交换次序, 即

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; \theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x; \theta) dx$$

(5) 期望 $E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x; \theta)\right]^2$ 存在.

则称 $I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x; \theta)\right]^2$ 为总体分布的费希尔 (Fisher) 信息量.

例 6.3.3

定理 6.3.4 (Gramer-Rao 不等式) 设定义 6.3.2 的条件满足, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体 X 的一个样本, $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $g(\theta)$ 的任一无偏估计, 若

$$g'(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \text{ 存在, 且对一切 } \theta \in \Theta, \text{ 对 } g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) dx_1 \dots dx_n$$

的微分可在积分号下进行, 即

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(x_1, \dots, x_n) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \right] \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

对离散总体, 则将上述积分改为求和符号后, 等式仍然成立, 则有

$$\text{Var}(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)} \quad (6.3.9)$$

该式称为克拉美-罗 (C-R) 不等式, $\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$ 称为 $g(\theta)$ 的无偏估计的方差的

C-R 下界, 简称 $g(\theta)$ C-R 下界. 特别, 对 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}$, 有 $Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$.

6.4.1 统计推断的基础

统计推断是根据样本信息对总体分布或总体的特征数进行推断. 统计推断用到两种信息: 总体信息和样本信息, 而贝叶斯学派则认为统计推断还用到第三种信息: 先验信息.

(1) 总体信息

总体信息即总体分布或总体所属分布族提供的信息.

(2) 样本信息

样本信息即抽取样本所得观测值提供的信息.

(3) 先验信息

先验信息就是抽样之前有关统计问题的一些信息.

例 6.4.1

基于上述三种信息进行统计推断的统计学称为贝叶斯统计学.

贝叶斯学派的基本观点是: 任一未知量 θ 都可看作随机变量, 可用一个概率分布去描述, 这个分布称为先验分布.

6.4.2 贝叶斯公式的密度函数形式

(1) 总体依赖于参数 θ 的概率函数在经典统计中记为 $p(x; \theta)$, 它表示参数空

间 Θ 中不同的 θ 对应不同的分布. 在贝叶斯统计学中记为 $p(x|\theta)$, 它表示在随机变量 θ 取某个给定值时总体的条件概率函数.

(2) 根据参数 θ 的先验信息确定先验分布 $\pi(\theta)$.

(3) 从贝叶斯观点来看, 样本的产生要分两步, 首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 产生一个样本 θ_0 . 第二步从 $p(X|\theta_0)$ 中产生一组样本, 这时样本 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 的联合条件概率函数为 $p(X|\theta_0) = p(x_1, \dots, x_n | \theta_0) = \prod_{i=1}^n p(x_i | \theta_0)$, 这个分布综合了总体信息和样本信息.

(4) 由于 θ_0 是设想出来的, 故要用 $\pi(\theta)$ 进行综合, 样本 X 和参数 θ 的联合分布为 $h(X, \theta) = p(X|\theta)\pi(\theta)$.

(5) 有了样本观察值 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 后, 对 $h(X, \theta)$ 作如下分解:
 $h(X, \theta) = \pi(\theta|X)m(X)$, $m(X)$ 是 X 的边际概率函数:
 $m(X) = \int_{\Theta} h(X, \theta)d\theta = \int_{\Theta} p(X|\theta)\pi(\theta)d\theta$,

$$\pi(\theta|X) = \frac{h(X, \theta)}{m(X)} = \frac{p(X|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(X|\theta)\pi(\theta)d\theta}, \text{ 称为 } \theta \text{ 的后验分布.}$$

6.4.3 贝叶斯估计

由后验分布 $\pi(\theta|X)$ 估计 θ 有三种常用方法:

(1) 使用后验分布的密度函数最大值点作为 θ 的点估计的最大后验估计;

(2) 使用后验分布的中位数作为 θ 的点估计的后验中位数估计;

(3) 使用后验分布的均值作为 θ 的点估计的后验期望估计.

用的最多的是后验期望估计, 一般简称贝叶斯估计, 记为 $\hat{\theta}_B$.

例 6.4.2

例 6.4.3

6.4.4 共轭先验分布

定义 6.4.1 设 θ 是总体参数, $\pi(\theta)$ 是其先验分布, 若对任意的样本观测值得到的后验分布 $\pi(\theta|X)$ 与 $\pi(\theta)$ 属于同一分布族, 则称该分布族是 θ 的共轭先验分布

6.5.1 区间估计的概念

若只是对总体的某个未知参数 θ 的值进行统计推断, 那么点估计是一种很有用的形式, 即只要得到样本观测值 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 点估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 能给我们对 θ 的值有一个明确的数量概念. 但是 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 仅仅是 θ 的一个近似值, 它并没有反映出这个近似值的误差范围, 这对实际工作来说是不方便的, 而区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷. 区间估计粗略地说是用两个统计量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ ($\hat{\theta}_1 \leq \hat{\theta}_2$) 所决定的区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$, 作为参数 θ 取值范围的估计.

由于 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是两个统计量, 所以 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 实际上是一个随机区间, 它覆盖 θ (即 $\theta \in [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$) 就是一个随机事件, 而 $P\{\theta \in [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]\}$ 就反映了这个区间估计

的可信程度；另一方面，区间长度 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 也是一个随机变量， $E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$ 反映了区间估计的精确程度。我们自然希望反映可信程度越大越好，反映精确程度的区间长度越小越好。但在实际问题，二者常常不能兼顾。为此，这里引入置信区间的概念，并给出在一定可信程度的前提下求置信区间的方法，使区间的平均长度最短。

定义 6.5.1 设 θ 是总体的参数，其参数空间为 Θ ， x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体的样本，对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$)，若有两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，对任意的 $\theta \in \Theta$ 满足：

$$P_{\theta}(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) \geq 1 - \alpha \dots\dots\dots (*)$$

则称： $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间， $1 - \alpha$ 称为置信度或置信水平， $\hat{\theta}_L$ 称为 θ 的双侧置信下限， $\hat{\theta}_U$ 称为置信上限。

置信水平 $1 - \alpha$ 的意义在于：若反复抽样多次，每个样本值确定一个区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ ，每个这样的区间要么包含 θ 的真值，要么不包含 θ 的真值，据伯努利大数定律，在这样多的区间中，包含 θ 真值的约占 $1 - \alpha$ ，不包含 θ 真值的约仅占 α ，比如， $\alpha = 0.005$ ，反复抽样 1000 次，则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的区间仅为 5 个。

例 6.5.1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， x_1, x_2, \dots, x_{10} 是来自 X 的一个样本， μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(9)s / \sqrt{10}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(9)s / \sqrt{10}]$ ，若取 $\alpha = 0.10$ ，则 $t_{0.95}(9) = 1.8331$ ，上式化为 $[\bar{x} - 0.5797s, \bar{x} + 0.5797s]$

定义 6.5.2 设 θ 是总体的参数，其参数空间为 Θ ， x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体的

样本, 对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 若有两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对任意的 $\theta \in \Theta$ 满足: $P_\theta(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$

则称 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ 同等置信区间.

在一些实际问题中, 人们感兴趣的有时仅仅是未知参数的一个下限或上限, 例如对某种产品寿命, 当然希望它越大越好, 因此只关心它的置信下限, 故给出如下定义

定义 6.5.3 设 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是统计量, 对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 任意的 $\theta \in \Theta$ 满足 $P_\theta(\hat{\theta}_L \leq \theta) \geq 1 - \alpha$, $\hat{\theta}_L$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的(单侧)置信下限,

若满足 $P_\theta(\hat{\theta}_L \leq \theta) = 1 - \alpha$, $\hat{\theta}_L$ 称为 θ 的 $1 - \alpha$ 的同等置信下限.

类似可给出置信上限的定义.

定义 6.5.4 设 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是统计量, 对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 任意的 $\theta \in \Theta$ 满足 $P_\theta(\hat{\theta}_U \geq \theta) \geq 1 - \alpha$, $\hat{\theta}_U$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的(单侧)置信上限,

若满足 $P_\theta(\hat{\theta}_U \geq \theta) = 1 - \alpha$, $\hat{\theta}_U$ 称为 θ 的 $1 - \alpha$ 的同等置信上限.

单侧置信下限和单侧置信上限都是置信区间的特殊情形. 下面介绍寻找置信区间的方法.

6.5.2 枢轴量法

构造未知参数 θ 的置信区间的最常用方法是枢轴量法, 其步骤可概括为:

1. 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G=G(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, 使得 G 的分布不依赖于未知参数, 一般称具有这种性质的 G 为枢轴量. 这一步通常是根据 θ 的点估计及抽样分布得到的.

2. 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 c, d , 使 $P\{c \leq W \leq d\} = 1-\alpha$. 这一步通常由抽样分布的分位数定义得到.

3. 从 $c \leq G \leq d$ 中得到等价不等式 $\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U$, 则有

$P_\theta(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1-\alpha$, 则 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

上述方法称为枢轴量法. 在实际应用中, 常选择 c, d , 使得 $P_\theta(G < c) = P(G > d) = \frac{\alpha}{2}$, 这样的置信区间称为等尾置信区间.

例 6.5.2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 来自均匀总体 $U(0, \theta)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$) 给出 θ 的 $1-\alpha$ 的同等置信区间.

解: 用枢轴量法分三步进行.

6.5.3 单个正态总体参数的置信区间

一 σ 已知时均值 μ 的置信区间

这时枢轴量

$$G = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

例 6.5.4 用天平称量某物体的质量 9 次, 得平均值 $\bar{x}=15.4\text{g}$ 已知天平称量结果为正态分布, 其标准差为 0.1g 试求物体质量的 0.95 置信区间.

解: $1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$, 查表得 $u_{0.975}=1.96$, 于是的物体质量的 0.95 置信区间为

$$[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [15.3347, 15.4653]$$

例 6.5.5 略

二 σ 未知时 μ 的置信区间

选取 $t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \sim t(n-1)$,

为 μ 的枢轴量, 由关系式

$$P \left\{ -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

进行恒等变形, 即可得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

例 6.5.5 假设轮胎的寿命服从正态分布，为估计某种轮胎的平均寿命，随机抽 12 只轮胎使用，测的它们的寿命（单位：万公里）如下：

4.68 4.85 4.32 4.85 4.61 5.02 5.20 4.60 4.58 4.72 4.38
4.70

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

解：正态总体的标准差 σ 未知，可得平均寿命 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$ ， 计算得 $\bar{x}=4.7092$ ， $s^2=0.0615$ ，
 $1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$ ， 查表得 $t_{0.975}(11)=2.2010$

于是的平均寿命 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[4.5516, 4.8668]$

三 方差 σ^2 的置信区间

此时也可分为 μ 已知和 μ 未知两种情况，但在实际应用中 μ 已知的情形很少见，故只讨论 μ 未知的情况，这时

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

为相应的枢轴量，其中

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

为样本方差. 类似地可得 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$$

例 6.5.6

6.5.4 大样本置信区间（简单介绍基本思想）

6.5.5 两个正态总体下的置信区间

在实际中常遇到下面的问题：已知产品的某一质量指标服从正态分布，但由于原料、设备条件、操作人员不同，或工艺过程的改变等因素，引起总体均值、总体方差有所改变，我们需要知道这些变化有多大，这就需要考虑两个正态总体均值差或方差比的估计问题.

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且 X 与 Y 相互独立， (x_1, x_2, \dots, x_n) 来自 X 的一个样本， (y_1, y_2, \dots, y_n) 为来自 Y 的一个样本，对给定置信水平为 $1-\alpha$ ，且设 $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2, s_y^2$ 分别为总体 X 与 Y 的样本均值与样本方差.

1. 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间：

1) 当 σ_1^2, σ_2^2 已知时：

$$U = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

由抽样分布可知：

所以可以得到 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为：

$$\left[(\bar{x} - \bar{y}) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, (\bar{x} - \bar{y}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \right] \dots\dots\dots$$

.....⑤

2) 由于总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，故取

$$S_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2}{n + m - 2} = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{n + m - 2}$$

作为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 估计，这时可得枢轴量

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n + m - 2),$$

由此可得 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - \bar{y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2) s_w \sqrt{\frac{m+n}{mn}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2) s_w \sqrt{\frac{m+n}{mn}} \right]$$

2. 求 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间：（ μ_1, μ_2 均未知）

$$F = \frac{s_x^2 / \sigma_1^2}{s_y^2 / \sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

据抽样分布知： ，由 F 分布的分位数定义及其特点：

$$P\{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\} = 1 - \alpha$$

可得 σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\frac{s_x^2 / s_y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}, \frac{s_x^2 / s_y^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)} \right]$$

第八章假设检验

一、教学目的：

1. 使学生了解假设检验的基本概念；
2. 使学生了解假设检验的基本思想；
3. 使学生掌握假设检验的基本步骤；
4. 使学生学会计算检验的两类错误，搞清楚两类错误的关系；
5. 使学生掌握正态总体参数的假设检验，主要是检验统计量及其分布，检 验

拒绝域的确定；

6. 使学生灵活运用所学知识解决实际问题。

二、教学重点难点

教学重点：正态总体参数的各种假设检验中的检验统计量及其分布。

教学难点：假设检验拒绝域的确定。

三：**教学方法设计：**示例法、软件演示法、教案法

四：**教学课时：**3 学时

六、教学内容（或教学过程）

（一）基本概念

1. 抽样误差

抽样研究中，样本统计量与总体参数间的差别称为抽样误差（sampling error）。统计上用标准误（standard error, SE）来衡量抽样误差的大小。不同的统计量，标准误的表示方法不同，如均数的标准误用 $S_{\bar{X}}$ 表示，率的标准误用 S_p 表示，回归系数的标准误用 S_b 表示等等。均数的标准误与标准差的区别见表 4-1。

表 4-1 均数的标准误与标准差的区别

	均数的标准误	标准差
意义 记法	反映 \bar{X} 的抽样误差大小 $\sigma_{\bar{X}}$ （样本估计值 $S_{\bar{X}}$ ）	反映一组数据的离散情况 σ （样本估计值 S ）
计算	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{n}}$ $S = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}}$
控制方法	增大样本含量可减小标准误。	个体差异或自然变异，不能通过统计方法来控制。

2. 可信区间

（1）定义、涵义：即按预先给定的概率确定的包含未知总体参数的可能范围。该范围称为总体参数的可信区间（confidence interval, CI）。它的确切含义是：

CI 是随机的, 总体参数是固定的, 所以, CI 包含总体参数的可能性是 $1-\alpha$ 。不能理解为 CI 是固定随机的, 总体参数是随机固定的, 总体参数落在 CI 范围内可能性为 $1-\alpha$ 。当 $\alpha = 0.05$ 时, 称为 95%可信区间, 记作 95% CI 。当 $\alpha = 0.01$ 时, 称为 99%可信区间, 记作 99% CI 。

(2) 可信区间估计的优劣: 一定要同时从可信度 (即 $1-\alpha$ 的大小) 与区间的宽度两方面来衡量。

(二) t 分布与正态分布

t 分布与标准正态分布相比有以下特点: ①都是单峰、对称分布; ② t 分布峰值较低, 而尾部较高; ③随自由度增大, t 分布趋近与标准正态分布; 当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, t 分布的极限分布是标准正态分布。

(三) 总体均数的估计

参数估计有点估计和区间估计两种方式。总体均数的估计, 见表 4-2。

表 4-2 总体均数的估计

	点估计	区间估计
意义	直接用样本统计量代替总体参数。	用统计量 \bar{X} 和 $S_{\bar{x}}$ 确定一个有概率意义的区间, 以该区间具有较大的可信度包含总体均数。
估计方法	以 \bar{X} 作为估计值	①小样本 ($\bar{X} - t_{\alpha/2, \nu} S_{\bar{x}}, \bar{X} + t_{\alpha/2, \nu} S_{\bar{x}}$) ②大样本 ($\bar{X} - u_{\alpha/2} S_{\bar{x}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} S_{\bar{x}}$) ③两总体均数差值的可信区间 ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2, \nu} S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\alpha/2, \nu} S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$)

(四) 两均数差别的比较

1. 样本均数和总体均数比较的 t 检验

前提: 服从正态分布

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{x}}}, \quad \nu = n - 1$$

(4-1)

2. 配对设计的 t 检验

前提: 差值服从正态分布

$$H_0: \mu_d = 0; H_1: \mu_d \neq 0$$

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_{\bar{d}}}, \quad \nu = n - 1$$

(4-2)

3. 成组设计的两样本均数比较的 t 检验

前提: 两组数据均服从正态分布; 两组总体方差相等

$$H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}, \quad v = n_1 + n_2 - 2 \quad (4-3)$$

$$\text{其中, } S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_c^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}, \quad S_c^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (4-4)$$

$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ 表示两样本均数差值的标准误。

4. 单样本 u 检验

前提：当样本较大（如 $n > 50$ ）或总体 σ_0 已知时

$$u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \quad (\quad n \quad \text{较} \quad \text{大} \quad \text{时} \quad) \quad (4-5)$$

$$u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \quad (\quad \sigma_0 \quad \text{已} \quad \text{知} \quad \text{时} \quad) \quad (4-6)$$

5. 大样本均数比较的 u 检验

前提：样本足够大

成组设计的两样本均数比较可用：

$$u = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2}} \quad (4-7)$$

6. 要推断组间没有差别或差别很小，应采用等效检验（equivalence test）。

(五) 假设检验的步骤及有关概念

1. 基本思想：把握“小概率事件在一次抽样试验中是几乎不可能发生”的原理。

2. 步骤：①建立假设、选用单侧或双侧检验、确定检验水准；②选用适当检验方法，计算统计量；③确定 P 值并作出推断结论。

3. I 类错误： H_0 为真（实际无差别），假设检验结果拒绝 H_0 ，接受 H_1 （推论有差别）所犯的错误的称为 I 类错误（type I error），I 类错误的概率记作 α 。

II 类错误： H_1 为真（实际有差别），假设检验结果拒绝 H_1 ，接受 H_0 （推论无差别）所犯的错误的称为 II 类错误（type II error），II 类错误的概率记作 β 。

4. $1 - \beta$ 称为检验效能，过去称把握度（power of test），即两总体确有差别，按 α 水准能发现该差别的能力。

三、典型试题分析

(一) 单项选择题

1. 当样本含量增大时，以下说法正确的是（ ）
 - A. 标准差会变小
 - B. 样均数标准误会变小
 - C. 均数标准误会变大
 - D. 标准差会变大

答案：B

[评析] 本题考点：这道题是考察均数标准误的概念。

从均数标准误的定义讲，它反映的是均数抽样误差的大小，那么样本含量越大，

抽样误差应该越小。从均数标准误的计算公式 $s_{\bar{x}} = S/\sqrt{n}$ 来看，也应是 n 越大，

$s_{\bar{x}}$ 越小。

2. 区间 $\bar{x} \pm 2.58 s_{\bar{x}}$ 的含义是 ()

- A. 99%的总均数在此范围内 B. 样本均数的 99%可信区间
C. 99%的样本均数在此范围内 D. 总均数的 99%可信区间

答案：D

[评析] 本题考点：可信区间的含义。

可信区间的确切含义指的是：总体参数是固定的，可信区间包含了总体参数的可能性是 $1-\alpha$ ，而不是总体参数落在 CI 范围的可能性为 $1-\alpha$ 。本题 B、D 均指样本均数，首先排除。A 说总均数在此范围内，显然与可信区间的含义相悖。因此答案为 D。

(二) 是非题

1. 进行两均数差别的假设检验时，当 $P \leq 0.05$ 时，则拒绝 H_0 ；当 $P > 0.05$ 时，则接受 H_0 ，认为两总体均数无差别。

[评析] 答案：错误。当 $P \leq 0.05$ ，拒绝 H_0 时，我们是依据 α 这一小概率来下结论的。而当 $P > 0.05$ 时，我们对两总体均数无差别这一结论无任何概率保证，因此不能贸然下无差别的结论。正确的说法是，按所取检验水准 α ，接受 H_1 的统计证据不足。

2. 通常单侧检验较双侧检验更为灵敏，更易检验出差别，应此宜广泛使用。

[评析] 答案：错误。根据专业知识推断两个总体是否有差别时，是甲高于乙，还是乙高于甲，当两种可能都存在时，一般选双侧；若根据专业知识，如果甲不会低于乙，或者研究者仅关心其中一种可能时，可选用单侧。一般来讲，双侧检验较为稳妥。单侧检验，应以专业知识为依据，它充分利用了另一侧的不可能性，故检出率高，但应慎用。

3. 只要增加样本含量到足够大，就可以避免 I 和 II 型错误。

[评析] 答案：错误。因为通过假设检验推断出的结论具有概率性，因此出现错误判断的可能性就一定存在，无论用任何方法也不能消除这一可能。但是，我们可以使错误判断的可能性尽量地小，比如样本含量越大，犯 I 和 II 类错误的可能性越小。

(三) 简答题

1. 简述可信区间在假设检验问题中的作用。

[评析] 可信区间不仅能回答差别有无统计学意义，而且还能提示差别有无实际意义。可信区间只能在预先规定的概率即检验水准 α 的前提下进行计算，而假设

检验能够获得一较为确切的概率 P 值。故将二者结合起来，才是对假设检验问题的完整分析。

2. 某医生就 4-3 资料，对比用胎盘浸液钩端螺旋体菌苗对 328 名农民接种前、后血清抗体的变化。

表 4-3 328 名农民血清抗体滴度及统计量

	抗体滴度的倒数								\bar{X}	S	$s_{\bar{x}}$
	0	20	40	80	160	320	640	1280			
免疫前 人数	211	27	19	24	25	19	3	0	76.1	111.7	6.17
免疫后 人数	2	16	57	76	75	54	25	23	411.9	470.5	25.90

$t = (411.91 - 76.10) / \sqrt{25.90^2 + 6.17^2} = 12.6$ ，按 $\nu = 14$ 查 t 界值表 $P < 0.01$ ，说明接种后血清抗体有增长。

问该医生在整理资料和分析资料过程中有何不妥？

答：①资料整理不当，未整理成配对资料；②统计描述指标使用不当，对于滴度的倒数不宜用算术均数、标准差，有“0”出现，也不宜算几何均数。比较免疫前后抗体滴度的倒数，应计算中位数和四分位数间距；③不宜用 t 检验。可将抗体滴度的倒数经对数或平方根转换后，做配对 t 检验 ($\nu = 327$)。

(四) 计算题

1. 某医院用新药与常规药物治疗婴幼儿贫血，将 20 名贫血患儿随机等分两组，分别接受两种药物治疗，测得血红蛋白增加量 (g/L) 见表 4-4。问新药与常规药的疗效有无差别？

表 4-4 两种药物治疗婴幼儿贫血结果

治疗药物	血红蛋白增加量 (g/L)									
新药组	24	36	25	14	26	34	23	20	15	19
常规药组	14	18	20	15	22	24	21	25	27	23

解：本题属成组设计资料。

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \alpha = 0.05$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}, \quad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

$$t = \frac{2.7}{2.6485} = 1.019, \quad \nu = 18$$

$$P > 0.05$$

因此，根据现有资料尚不能认为新药与常规药的疗效有差别。

2. 将 20 名某病患者随机分为两组，分别用甲、乙两药治疗，测得治疗前后的血沉 (mm/h) 见表 4-5。问：(1) 甲、乙两药是否均有效？(2) 甲、乙两药疗效是否有别？

表 4-5 甲、乙两药治疗某病情况

	序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲药	治疗前	30	33	26	31	30	27	28	28	25	29
	治疗后	26	29	23	30	30	24	22	25	23	23
	序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
乙药	治疗前	29	30	29	33	28	26	30	31	30	30
	治疗后	26	23	25	23	23	25	28	22	27	24

(1) 解：对甲、乙两药治疗数据分别采用配对 t 检验，得

$$\text{甲药: } t = \bar{d} / s_{\bar{d}} = 3.2 / 0.611 = 5.237$$

$$\text{乙药: } t = \bar{d} / s_{\bar{d}} = 5.0 / 0.9428 = 5.303$$

$\nu=9$, $P < 0.001$, 按 $\alpha=0.05$ 水准, 拒绝 H_0 , 接受 H_1 , 故可认为甲乙两药治疗前后均有差别。

(2) 解：由表中资料分别求得治疗前后差值, 再做两组比较。

$$t = \frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{S_{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}} = -1.602, \nu=18, \text{得 } 0.2 > P > 0.1, \text{按 } \alpha=0.05 \text{ 水准, 不拒绝 } H_0, \text{尚}$$

不能认为甲、乙两药疗效有差别。

3. 测得某地 90 名正常成年女性红细胞数 ($10^4/\text{mm}^3$) 的均值 418、标准差为 29。试求：

(1) 该地 95% 的正常成年女性红细胞数所在的范围；

(2) 该地正常成年女性红细胞数总体均数的 95% 可信区间。

解：(1) 用正态分布法估计正常值范围。因红细胞过多或过少均为异常, 故此参考值范围应是双侧范围。

$$\text{上限: } \bar{x} + 1.96S = 418 + 1.96 \times 29 = 474.84 \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}$$

$$\text{下限: } \bar{x} - 1.96S = 418 - 1.96 \times 29 = 361.16 \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}。$$

$$\text{即 } (361.16, 474.84) \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}。$$

(2) 由于 $n=90 > 50$, 故可近似为正态分布。

$$\text{上限: } \bar{x} + 1.96 s_{\bar{x}} = 418 + 1.96 \times 29 / \sqrt{90} = 423.99 \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}$$

$$\text{下限: } \bar{x} - 1.96 s_{\bar{x}} = 418 - 1.96 \times 29 / \sqrt{90} = 412.01 \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}。$$

$$\text{即 } (412.01, 423.99) \text{ (} 10^4/\text{mm}^3 \text{)}。$$