



# 揭阳职业技术学院

## 师范教育系

### 《高等数学》教案

(2025-2026 学年第 2 学期)

教师姓名：邢林燕

所授专业：小学教育

授课班级：251

授课时间	第 1-3 周	课 次	第 1-5 次
章 节 名 称	第五章 定积分		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	10
教 学 目 的 要 求	1.理解定积分的概念。 2.掌握定积分的性质及定积分中值定理,掌握定积分的换元积分法与分部积分法。 3.理解变上限定积分定义的函数,及其求导数定理,掌握牛顿—莱布尼茨公式。 4.了解广义积分的概念并会计算广义积分。 5.思政教育:讲述“微元法”的思想,增强学生中国自信、爱国情怀。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	<b>教学重点:</b> 1、定积分的性质及定积分中值定理 2、定积分的换元积分法与分部积分法。 3、牛顿—莱布尼茨公式。 <b>教学难点:</b> 1、定积分的概念 2、积分中值定理 3、定积分的换元积分法分部积分法。 4、变上限函数的导数。		
教学步骤及内容:  <div style="text-align: center;"><b>第一节 定积分概念与性质</b></div> <div style="text-align: center;"><b>一、曲边梯形的面积</b></div> 1.曲边梯形: 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负、连续. 由直线 $x=a$ 、 $x=b$ 、 $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为曲边梯形, 其中曲线弧称为曲边. 2.曲边梯形面积: 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负、连续. 求直线 $x=a$ 、 $x=b$ 、 $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. (1)用分点 $a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 把区间 $[a, b]$ 分成 $n$ 个小区间: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ , 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ( $i=1, 2, \cdots, n$ ). (2)任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底的小曲边梯形的面积可近似为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ( $i=1, 2, \cdots, n$ ); 所求曲边梯形面积 $A$ 的近似值为 $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$ (3)记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ , 所以曲边梯形面积的精确值为			

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

## 二、定积分定义

抛开上述问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 就抽象出下述定积分的定义.

**1. 定积分的定义** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 用分点  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n=b$  把  $[a, b]$  分成  $n$  个小区间:  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ , 记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=1, 2, \cdots, n)$ .

任  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (i=1, 2, \cdots, n)$ , 作和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

记  $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n \}$ , 如果当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 上述和式的极限存在, 且极限值与区间  $[a, b]$  的分法和  $\xi_i$  的取法无关, 则称这个极限为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分, 记作  $\int_a^b f(x) dx$ ,

即 
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

其中  $f(x)$  叫做被积函数,  $f(x) dx$  叫做被积表达式,  $x$  叫做积分变量,  $a$  叫做积分下限,  $b$  叫做积分上限,  $[a, b]$  叫做积分区间.

根据定积分的定义, 曲边梯形的面积为  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

注: :

(1) 定积分的值只与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的记法无关, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du .$$

(2) 和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  通常称为  $f(x)$  的积分和.

(3) 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分存在, 我们就说  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积.

## 2. 定积分的几何意义:

在区间  $[a, b]$  上, 当  $f(x) \geq 0$  时, 积分  $\int_a^b f(x) dx$  在几何上表示由曲线  $y=f(x)$ 、两条直线  $x=a$ 、 $x=b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积; 当  $f(x) \leq 0$  时, 由曲线  $y=f(x)$ 、两条直线  $x=a$ 、 $x=b$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形位于  $x$  轴的下方, 定义分在几何上表示上述曲边梯形面积的负值;

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\xi_i)] \Delta x_i = - \int_a^b [-f(x)] dx .$$

当  $f(x)$  既取得正值又取得负值时, 函数  $f(x)$  的图形某些部分在  $x$  轴的上方, 而其它部分在  $x$  轴的下方. 如果我们对面积赋以正负号, 在  $x$  轴上方的图形面积赋以正号, 在  $x$  轴下方的图形面积赋以负号, 则在一般情形下, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  的几何意义为: 它是介于  $x$  轴、函数  $f(x)$  的图形及两条直线  $x=a$ 、 $x=b$  之间的各部分面积的代数和. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足什么条件时,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积呢?

**3. 定理 1** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**4. 定理 2** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

例 1. 利用定义计算定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ .

解 把区间  $[0, 1]$  分成  $n$  等份, 分点为和小区间长度为

$$x_i = \frac{i}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad \Delta x_i = \frac{1}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

取  $\xi_i = \frac{i}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n)$ , 作积分和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

因为  $\lambda = \frac{1}{n}$ , 当  $\lambda \rightarrow 0$  时,  $n \rightarrow \infty$ , 所以

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

利用定积分的几何意义求积分:

例 2. 用定积分的几何意义求  $\int_0^1 (1-x) dx$  和  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .

解: 函数  $y=1-x$  在区间  $[0, 1]$  上的定积分是以  $y=1-x$  为曲边, 以区间  $[0, 1]$  为底的曲边梯形的面积. 因为以  $y=1-x$  为曲边, 以区间  $[0, 1]$  为底的曲边梯形是一直角三角形, 其底边长及高均为 1, 所以

$$\int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

### 三、定积分的性质

两点规定:

(1) 当  $a=b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

(2) 当  $a > b$  时,  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

**性质 1** 函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差) 即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

证明:  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

**性质 2** 被积函数的常数因子可以提到积分号外面 即

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

这是因为  $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx$ .

**性质3** 如果将积分区间分成两部分 则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

值得注意的是不论  $a, b, c$  的相对位置如何总有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

成立. 例如, 当  $a < b < c$  时, 由于

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**性质4** 如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \equiv 1$  则

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a.$$

**性质5** 如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b).$$

**推论1** 如果在区间  $[a, b]$  上  $f(x) \leq g(x)$  则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a < b).$$

这是因为  $g(x) - f(x) \geq 0$ , 从而

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0,$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**推论2**  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$ .

这是因为  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , 所以

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

即  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

**性质6** 设  $M$  及  $m$  分别是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证明 因为  $m \leq f(x) \leq M$ , 所以

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

从而

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**性质 7 (定积分中值定理)** 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在积分区间  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

这个公式叫做积分中值公式.

证明 由性质 6

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

各项除以  $b-a$  得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

再由连续函数的介值定理, 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

于是两端乘以  $b-a$  得中值公式

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

积分中值公式的几何解释:

应注意: 不论  $a < b$  还是  $a > b$ , 积分中值公式都成立.

## 第二节 微积分基本公式

### 一、积分上限函数及其导数

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 并且设  $x$  为  $[a, b]$  上的一点. 我们把函数  $f(x)$  在部分区间  $[a, x]$  上的定积分  $\int_a^x f(x) dx$  称为积分上限的函数. 它是区间  $[a, b]$  上的函数, 记为  $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$ , 或

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**定理 1** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx$$

在  $[a, b]$  上具有导数, 并且它的导数为

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x < b).$$

简要证明 若  $x \in (a, b)$ , 取  $\Delta x$  使  $x + \Delta x \in (a, b)$ .

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x,$$

应用积分中值定理, 有  $\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x$ ,

其中  $\xi$  在  $x$  与  $x+\Delta x$  之间,  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x$ . 于是

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

若  $x=a$ , 取  $\Delta x > 0$ , 则同理可证  $\Phi_+'(x)=f(a)$ ; 若  $x=b$ , 取  $\Delta x < 0$ , 则同理可证  $\Phi_-'(x)=f(b)$ .

**定理 2** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$$

就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

定理的重要意义: 一方面肯定了连续函数的原函数是存在的, 另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

## 二、牛顿—莱布尼茨公式

**定理 3** 如果函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

此公式称为牛顿—莱布尼茨公式, 也称为微积分基本公式.

这是因为  $F(x)$  和  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  都是  $f(x)$  的原函数, 所以存在常数  $C$ , 使

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (C \text{ 为某一常数}).$$

由  $F(a) - \Phi(a) = C$  及  $\Phi(a) = 0$ , 得  $C = F(a)$ ,  $F(x) - \Phi(x) = F(a)$ .

由  $F(b) - \Phi(b) = F(a)$ , 得  $\Phi(b) = F(b) - F(a)$ , 即

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

证明: 已知函数  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, 又根据定理 2, 积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

也是  $f(x)$  的一个原函数. 于是有一常数  $C$ , 使

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b).$$

当  $x=a$  时, 有  $F(a) - \Phi(a) = C$ , 而  $\Phi(a) = 0$ , 所以  $C = F(a)$ ; 当  $x=b$  时,  $F(b) - \Phi(b) = F(a)$ ,

所以  $\Phi(b) = F(b) - F(a)$ , 即

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

为了方便起见, 可把  $F(b) - F(a)$  记成  $[F(x)]_a^b$ , 于是

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系.

例 1. 计算  $\int_0^1 x^2 dx$ .

解: 由于  $\frac{1}{3}x^3$  是  $x^2$  的一个原函数, 所以

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ .

解 由于  $\arctan x$  是  $\frac{1}{1+x^2}$  的一个原函数, 所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi.$$

例 3. 计算  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$ .

解:  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ .

例 4. 计算正弦曲线  $y=\sin x$  在  $[0, \pi]$  上与  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

解: 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2.$$

例 5. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内连续且  $f(x) > 0$ . 证明函数  $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$

在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

证明:  $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t)dt = xf(x)$ ,  $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$ . 故

$$F'(x) = \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} = \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

按假设, 当  $0 < t < x$  时  $f(t) > 0$ ,  $(x-t)f(t) > 0$ , 所以

$$\int_0^x f(t)dt > 0, \quad \int_0^x (x-t)f(t)dt > 0,$$

从而  $F'(x) > 0$  ( $x > 0$ ), 这就证明了  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

例 6. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$ .

解: 这是一个零比零型未定式, 由罗必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

提示: 设  $\Phi(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ , 则  $\Phi(\cos x) = \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt$ .

$$\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt = \frac{d}{dx} \Phi(\cos x) = \frac{d}{du} \Phi(u) \cdot \frac{du}{dx} = e^{-u^2} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot e^{-\cos^2 x}.$$

## §5.3 定积分的换元法和分部积分法

## 一、定积分的换元积分法

**定理** 假设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 函数  $x=\varphi(t)$  满足条件:

(1)  $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ ;

(2)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上具有连续导数, 且其值域不越出  $[a, b]$ ,

则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

这个公式叫做定积分的换元公式.

**证明** 由假设知,  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续, 因而是可积的;  $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  (或  $[\beta, \alpha]$ ) 上也是连续的, 因而是可积的.

假设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

另一方面, 因为  $\{F[\varphi(t)]\}' = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ , 所以  $F[\varphi(t)]$  是  $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$  的一个原函数, 从而

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

因此  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

**注:** 应用该方法时要注意换元的同时要换限。

**例 1** 计算  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &\stackrel{\text{令 } x = a \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

**提示:**  $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t, dx = a \cos t dt$ . 当  $x=0$  时  $t=0$ , 当  $x=a$  时  $t=\frac{\pi}{2}$ .

**例 2** 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$ .

**解** 令  $t = \cos x$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d \cos x \\ &\stackrel{\text{令 } \cos x = t}{=} - \int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left[ \frac{1}{6} t^6 \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**提示:** 当  $x=0$  时  $t=1$ , 当  $x=\frac{\pi}{2}$  时  $t=0$ .

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d \cos x \\ &= -\left[\frac{1}{6} \cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{6} \cos^6 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \cos^6 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 3 计算  $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x \\ &= \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

提示:  $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} = \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x|$ .

在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上  $|\cos x| = \cos x$ , 在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上  $|\cos x| = -\cos x$ .

例 4 计算  $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &\stackrel{\text{令 } \sqrt{2x+1}=t}{=} \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2+3) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} t^3 + 3t\right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{27}{3}+9\right) - \left(\frac{1}{3}+3\right)\right] = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

提示:  $x = \frac{t^2-1}{2}$ ,  $dx = t dt$ ; 当  $x=0$  时  $t=1$ , 当  $x=4$  时  $t=3$ .

例 5 证明: 若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 则

$$1) \text{ 若 } f(x) \text{ 为偶函数 } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$2) \text{ 若 } f(x) \text{ 为奇函数, 则 } f(-x) + f(x) = 0,$$

证明 因为  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ ,

$$\text{而} \quad \int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{\text{令 } x=-t}{=} -\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx,$$

所以若  $f(x)$  为偶函数  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx$

$$= \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx = \int_0^a 2f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

若  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(-x) + f(x) = 0$ , 从而

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx = 0.$$

例 6 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

证明 (1) 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx. \end{aligned}$$

(2) 令  $x = \pi - t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= -\int_{\pi}^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)] dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi-t)f[\sin(\pi-t)] dt = \int_0^{\pi} (\pi-t)f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx, \end{aligned}$$

所以  $\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

例 7 设函数  $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x} & -1 < x < 0 \end{cases}$ , 计算  $\int_1^4 f(x-2) dx$ .

解 设  $x-2=t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x-2) dx &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t} dt + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\ &= [\tan \frac{t}{2}]_{-1}^0 - [\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

提示: 设  $x-2=t$ , 则  $dx=dt$ ; 当  $x=1$  时  $t=-1$ , 当  $x=4$  时  $t=2$ .

## 二、分部积分法

设函数  $u(x)$ 、 $v(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有连续导数  $u'(x)$ 、 $v'(x)$ , 由  $(uv)' = u'v + uv'$  得  $uv' = u'v - u'v$ , 式两端在区间  $[a, b]$  上积分得

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx, \text{ 或 } \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

这就是定积分的分部积分公式.

分部积分过程:

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx = \dots$$

例 1 计算  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ .

解  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\
&= \frac{\pi}{12} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.
\end{aligned}$$

例 2 计算  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ .

解 令  $\sqrt{x}=t$ , 则

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 e^t dt \\
&= 2 \int_0^1 t de^t \\
&= 2[te^t]_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt \\
&= 2e - 2[e^t]_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

例 3 设  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ , 证明

$$(1) \text{ 当 } n \text{ 为正偶数时, } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正奇数时, } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
\text{证明 } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x \\
&= -[\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d \sin^{n-1} x \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,
\end{aligned}$$

由此得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

$$\text{而 } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

因此

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

例 3 设  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  ( $n$  为正整数), 证明

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{证明 } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x \\ &= -[\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

由此得  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0,$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1.$$

特别地  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ .

因此  $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ .

复习思考题、作业题:

因材施教, 将根据课堂授课的实际情况布置作业。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 3,4 周	课 次	第 6-8 次
章 节 名 称	第六章 定积分的应用		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	6
教 学 目 的 要 求	1、理解元素法的基本思想； 2、掌握用定积分表达和计算一些几何量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积）。 3、掌握用定积分表达和计算一些物理量（变力做功、引力、压力和函数的平均值等）。 4、讲述中国古代数学对微积分创立的贡献，培养学生的文化自信。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	<b>教学重点：</b> 1、计算平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积。 2、计算变力所做的功、引力、压力和函数的平均值等。 <b>教学难点：</b> 1、截面面积为已知的立体体积。 2、引力。		
教学步骤及内容： <p style="text-align: center;"><b>第一节 定积分的元素法</b></p> <p>回忆曲边梯形的面积：          设 <math>y=f(x) \geq 0 (x \in [a, b])</math>. 如果说积分，</p> $A = \int_a^b f(x) dx$ <p>是以 <math>[a, b]</math> 为底的曲边梯形的面积，则积分上限函数</p> $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ <p>就是以 <math>[a, x]</math> 为底的曲边梯形的面积. 而微分 <math>dA(x)=f(x)dx</math> 表示点 <math>x</math> 处以 <math>dx</math> 为宽的小曲边梯形面积的近似值 <math>\Delta A \approx f(x)dx, f(x)dx</math> 称为曲边梯形的面积元素.</p> <p>以 <math>[a, b]</math> 为底的曲边梯形的面积 <math>A</math> 就是以面积元素 <math>f(x)dx</math> 为被积表达式，以 <math>[a, b]</math> 为积分区间的定积分：</p> $A = \int_a^b f(x) dx .$ <p>一般情况下，为求某一量 <math>U</math>，先将此量分布在某一区间 <math>[a, b]</math> 上，分布在 <math>[a, x]</math> 上的量用函数 <math>U(x)</math> 表示，再求这一量的元素 <math>dU(x)</math>，设 <math>dU(x)=u(x)dx</math>，然后以 <math>u(x)dx</math> 为被积表达式，以 <math>[a, b]</math> 为积分区间求定积分即得</p> $U = \int_a^b f(x) dx .$ <p>用这一方法求一量的值的方法称为微元法(或元素法).</p>			

## 第二节 定积分在几何上的应用

### 一、平面图形的面积

#### 1. 直角坐标情形

设平面图形由上下两条曲线  $y=f_{\uparrow}(x)$  与  $y=f_{\downarrow}(x)$  及左右两条直线  $x=a$  与  $x=b$  所围成, 则面积元素为  $[f_{\uparrow}(x)-f_{\downarrow}(x)]dx$ , 于是平面图形的面积为

$$S = \int_a^b [f_{\uparrow}(x) - f_{\downarrow}(x)] dx.$$

类似地, 由左右两条曲线  $x=\varphi_{\leftarrow}(y)$  与  $x=\varphi_{\rightarrow}(y)$  及上下两条直线  $y=d$  与  $y=c$  所围成设平面图形的面积为

$$S = \int_c^d [\varphi_{\rightarrow}(y) - \varphi_{\leftarrow}(y)] dy.$$

例 1 计算抛物线  $y^2=x$ 、 $y=x^2$  所围成的图形的面积.

解 (1) 画图.

(2) 确定在  $x$  轴上的投影区间:  $[0, 1]$ .

(3) 确定上下曲线:  $f_{\uparrow}(x)=\sqrt{x}$ ,  $f_{\downarrow}(x)=x^2$ .

(4) 计算积分

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算抛物线  $y^2=2x$  与直线  $y=x-4$  所围成的图形的面积.

解 (1) 画图.

(2) 确定在  $y$  轴上的投影区间:  $[-2, 4]$ .

(3) 确定左右曲线:  $\varphi_{\leftarrow}(y)=\frac{1}{2}y^2$ ,  $\varphi_{\rightarrow}(y)=y+4$ .

(4) 计算积分

$$S = \int_{-2}^4 (y+4 - \frac{1}{2}y^2) dy = \left[ \frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^4 = 18.$$

例 3 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围成的图形的面积.

解 设整个椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍, 椭圆在第一象限部分在  $x$  轴上的投影区间为  $[0, a]$ . 因为面积元素为  $ydx$ , 所以

$$S = 4 \int_0^a y dx.$$

椭圆的参数方程为:

$$x = a \cos t, y = b \sin t,$$

于是

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t d(a \cos t) \\ &= -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = ab\pi. \end{aligned}$$

#### 2. 极坐标情形

曲边扇形及曲边扇形的面积元素:

由曲线  $\rho=\rho(\theta)$  及射线  $\theta=\alpha$ ,  $\theta=\beta$  围成的图形称为曲边扇形. 曲边扇形的面积元素为

$$dS = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

曲边扇形的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

例 4. 计算阿基米德螺线  $\rho = a\theta$  ( $a > 0$ ) 上相应于  $\theta$  从 0 变到  $2\pi$  的一段弧与极轴所围成的图形的面积

$$\text{解: } S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2 \left[ \frac{1}{3}\theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

例 5. 计算心形线  $\rho = a(1 + \cos\theta)$  ( $a > 0$ ) 所围成的图形的面积.

$$\begin{aligned} \text{解: } S &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[a(1 + \cos\theta)]^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\ &= a^2 \left[ \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi. \end{aligned}$$

## 二、体 积

### 1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.

常见的旋转体: 圆柱、圆锥、圆台、球体.

旋转体都可以看作是由连续曲线  $y=f(x)$ 、直线  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而成的立体.

设过区间  $[a, b]$  内点  $x$  且垂直于  $x$  轴的平面左侧的旋转体的体积为  $V(x)$ , 当平面左右平移  $dx$  后, 体积的增量近似为  $\Delta V = \pi[f(x)]^2 dx$ , 于是体积元素为

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx,$$

旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

例 1 连接坐标原点  $O$  及点  $P(h, r)$  的直线、直线  $x=h$  及  $x$  轴围成一个直角三角形. 将它绕  $x$  轴旋转构成一个底半径为  $r$ 、高为  $h$  的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

$$\text{解: 直角三角形斜边的直线方程为 } y = \frac{r}{h}x.$$

所求圆锥体的体积为

$$V = \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3}\pi h r^2.$$

例 2. 计算由椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所成的图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解: 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

及  $x$  轴围成的图形绕  $x$  轴旋转而成的立体. 体积元素为

$$dV = \pi y^2 dx,$$

于是所求旋转椭球体的体积为

$$V = \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left[ a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

例 3 计算由摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  的一拱, 直线  $y=0$  所围成的图形分别绕  $x$  轴、 $y$  轴旋转

而成的旋转体的体积.

解 所给图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

所给图形绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积是两个旋转体体积的差. 设曲线左半边为  $x=x_1(y)$ 、右半边为  $x=x_2(y)$ . 则

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt \\ &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

## 2. 平行截面面积为已知的立体的体积

设立体在  $x$  轴的投影区间为  $[a, b]$ , 过点  $x$  且垂直于  $x$  轴的平面与立体相截, 截面面积为  $A(x)$ , 则体积元素为  $A(x)dx$ , 立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

例 4 一平面经过半径为  $R$  的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角  $\alpha$ . 计算这平面截圆柱所得立体的体积.

解: 取这平面与圆柱体的底面的交线为  $x$  轴, 底面上过圆中心、且垂直于  $x$  轴的直线为  $y$  轴. 那么底圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ . 立体中过点  $x$  且垂直于  $x$  轴的截面是一个直角三角形. 两个直角边分别为  $\sqrt{R^2 - x^2}$  及  $\sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha$ . 因而截面积为

$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha$ . 于是所求的立体体积为

$$V = \int_{-R}^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \frac{1}{2} \tan \alpha [R^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{-R}^R = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

例 5. 求以半径为  $R$  的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为  $h$  的正劈锥体的体积.

解: 取底圆所在的平面为  $xOy$  平面, 圆心为原点, 并使  $x$  轴与正劈锥的顶平行. 底圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ . 过  $x$  轴上的点  $x$  ( $-R < x < R$ ) 作垂直于  $x$  轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

$$A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}.$$

于是所求正劈锥体的体积为

$$V = \int_{-R}^R h\sqrt{R^2 - x^2} dx = 2R^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi R^2 h.$$

## 三、平面曲线的弧长

设  $A, B$  是曲线弧上的两个端点. 在弧  $AB$  上任取分点  $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ , 并依次连接相邻的分点得一内接折线. 当分点的数目无限增加且每个小段  $M_{i-1}M_i$  都缩向一点时, 如果此折线的长  $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$  的极限存在, 则称此极限为曲线弧  $AB$  的弧长, 并称此曲线弧  $AB$  是可求长

的.

**定理 光滑曲线弧是可求长的.**

### 1. 直角坐标情形

设曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有一阶连续导数. 现在来计算这曲线弧的长度.

取横坐标  $x$  为积分变量, 它的变化区间为  $[a, b]$ . 曲线  $y=f(x)$  上相应于  $[a, b]$  上任一小区间  $[x, x+dx]$  的一段弧的长度, 可以用该曲线在点  $(x, f(x))$  处的切线上相应的一小段的长度来近似代替. 而切线上这相应的小段的长度为

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

从而得弧长元素(即弧微分)

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

以  $\sqrt{1 + y'^2} dx$  为被积表达式, 在闭区间  $[a, b]$  上作定积分, 便得所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

在曲率一节中, 我们已经知道弧微分的表达式为  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , 这也就是弧长元素. 因此

例 1. 计算曲线  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  上相应于  $x$  从  $a$  到  $b$  的一段弧的长度.

解:  $y' = x^{\frac{1}{2}}$ , 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + x} dx.$$

因此, 所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + x} dx = \left[ \frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} \right]_a^b = \frac{2}{3} [(1 + b)^{\frac{3}{2}} - (1 + a)^{\frac{3}{2}}].$$

例 2. 计算悬链线  $y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c}$  上介于  $x = -b$  与  $x = b$  之间一段弧的长度.

解:  $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{c}$ , 从而弧长元素为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{c}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx.$$

因此, 所求弧长为

$$s = \int_{-b}^b \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx = 2 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx = 2c [\operatorname{sh} \frac{x}{c}]_0^b = 2c \operatorname{sh} \frac{b}{c}.$$

### 2. 参数方程情形

设曲线弧由参数方程  $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) 给出, 其中  $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数.

因为  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ , 所以弧长元素为

$$ds = \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}} \varphi'(t) dt = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

所求弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

例 3. 计算摆线  $x=a(\theta-\sin\theta)$ ,  $y=a(1-\cos\theta)$  的一拱 ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 的长度.

解: 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta} d\theta = a\sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta = 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta.$$

所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 2a[-2 \cos \frac{\theta}{2}]_0^{2\pi} = 8a.$$

### 3. 极坐标情形

设曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中  $r(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数. 由直角坐标与极坐标的关系可得

$$x = \rho(\theta) \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta).$$

于是得弧长元素为

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

从而所求弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

例 14. 求阿基米德螺线  $\rho = a\theta$  ( $a > 0$ ) 相应于  $\theta$  从 0 到  $2\pi$  一段的弧长.

解: 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a\sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

于是所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})].$$

复习思考题、作业题:

因材施教, 将根据课堂授课的实际情况布置作业。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 5-8 周	课 次	第 9-16 次
章 节 名 称	第九章 多元函数微分法及其应用		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	16
教 学 的 目 的 要 求	<p>1、理解多元函数的概念和二元函数的几何意义。</p> <p>2、了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上的连续函数的性质。</p> <p>3、理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性。</p> <p>4、理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法。</p> <p>5、掌握多元复合函数偏导数的求法。</p> <p>6、会求隐函数（包括由方程组确定的隐函数）的偏导数。</p> <p>7、了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程。</p> <p>8、了解二元函数的二阶泰勒公式。</p> <p>9、理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题。</p> <p>10、介绍多元函数极值时，数形结合画出的图形就像庐山的山岭一样，让学生感悟人生的跌宕起伏，遇难不气馁。</p>		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	<p><b>教学重点：</b></p> <p>1、二元函数的极限与连续性；</p> <p>2、函数的偏导数和全微分；</p> <p>3、方向导数与梯度的概念及其计算；</p> <p>4、多元复合函数偏导数；</p> <p>5、隐函数的偏导数</p> <p>6、曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线；</p> <p>7、多元函数极值和条件极值的求法。</p> <p><b>教学难点：</b></p> <p>1、二元函数的极限与连续性的概念；</p> <p>2、全微分形式的不变性；</p> <p>3、复合函数偏导数的求法；</p> <p>4、二元函数的二阶泰勒公式；</p> <p>5、隐函数（包括由方程组确定的隐函数）的偏导数；</p> <p>6、拉格朗日乘数法；</p> <p>7、多元函数的最大值和最小值。</p>		

教学步骤及内容:

## 第一节 多元函数的基本概念

### 一、平面点集 $n$ 维空间

#### 1. 平面点集

由平面解析几何知道, 当在平面上引入了一个直角坐标系后, 平面上的点  $P$  与有序二元实数组  $(x, y)$  之间就建立了一一对应. 于是, 我们常把有序实数组  $(x, y)$  与平面上的点  $P$  视作是等同的. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.

二元的序实数组  $(x, y)$  的全体, 即  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$  就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质  $P$  的点的集合, 称为平面点集, 记作

$$E = \{(x, y) | (x, y) \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如, 平面上以原点为中心、 $r$  为半径的圆内所有点的集合是

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}.$$

如果我们以点  $P$  表示  $(x, y)$ , 以  $|OP|$  表示点  $P$  到原点  $O$  的距离, 那么集合  $C$  可表成

$$C = \{P | |OP| < r\}.$$

邻域:

设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $xOy$  平面上的一个点,  $\delta$  是某一正数. 与点  $P_0(x_0, y_0)$  距离小于  $\delta$  的点  $P(x, y)$  的全体, 称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(P_0, \delta)$ , 即

$$U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\} \text{ 或 } U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

邻域的几何意义:  $U(P_0, \delta)$  表示  $xOy$  平面上以点  $P_0(x_0, y_0)$  为中心、 $\delta > 0$  为半径的圆的内部的点  $P(x, y)$  的全体.

点  $P_0$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ , 即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{P | 0 < |P_0P| < \delta\}.$$

注: 如果不需要强调邻域的半径  $\delta$ , 则用  $U(P_0)$  表示点  $P_0$  的某个邻域, 点  $P_0$  的去心邻域记作  $\overset{\circ}{U}(P_0)$ .

点与点集之间的关系:

任意一点  $P \in \mathbf{R}^2$  与任意一个点集  $E \subset \mathbf{R}^2$  之间必有以下三种关系中的一种:

(1) **内点**: 如果存在点  $P$  的某一邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \subset E$ , 则称  $P$  为  $E$  的内点;

(2) **外点**: 如果存在点  $P$  的某个邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \cap E = \emptyset$ , 则称  $P$  为  $E$  的外点;

(3) **边界点**: 如果点  $P$  的任一邻域内既有属于  $E$  的点, 也有不属于  $E$  的点, 则称  $P$  点为  $E$  的边点.  $E$  的边界点的全体, 称为  $E$  的边界, 记作  $\partial E$ .

$E$  的内点必属于  $E$ ;  $E$  的外点必定不属于  $E$ ; 而  $E$  的边界点可能属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ .

**聚点**: 如果对于任意给定的  $\delta > 0$ , 点  $P$  的去心邻域  $\overset{\circ}{U}(P, \delta)$  内总有  $E$  中的点, 则称  $P$  是  $E$  的聚点.

由聚点的定义可知, 点集  $E$  的聚点  $P$  本身, 可以属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ .

例如, 设平面点集

$$E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

满足  $1 < x^2 + y^2 < 2$  的一切点  $(x, y)$  都是  $E$  的内点; 满足  $x^2 + y^2 = 1$  的一切点  $(x, y)$  都是  $E$  的边界点, 它们都不属于  $E$ ; 满足  $x^2 + y^2 = 2$  的一切点  $(x, y)$  也是  $E$  的边界点, 它们都属于  $E$ ; 点集  $E$  以及它的界边  $\partial E$  上的一切点都是  $E$  的聚点.

**开集:** 如果点集  $E$  的点都是内点, 则称  $E$  为开集.

**闭集:** 如果点集的余集  $E^c$  为开集, 则称  $E$  为闭集.

开集的例子:  $E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ .

闭集的例子:  $E = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

集合  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$  既非开集, 也非闭集.

**连通性:** 如果点集  $E$  内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于  $E$ , 则称  $E$  为连通集.

**区域(或开区域):** 连通的开集称为区域或开区域. 例如  $E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ .

闭区域: 开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域. 例如  $E = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

**有界集:** 对于平面点集  $E$ , 如果存在某一正数  $r$ , 使得  $E \subset U(O, r)$ ,

其中  $O$  是坐标原点, 则称  $E$  为有界点集.

**无界集:** 一个集合如果不是有界集, 就称这集合为无界集.

例如, 集合  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  是有界闭区域; 集合  $\{(x, y) | x + y > 1\}$  是无界开区域;

集合  $\{(x, y) | x + y \geq 1\}$  是无界闭区域.

## 2. $n$ 维空间

设  $n$  为取定的一个自然数, 我们用  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  元有序数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体所构成的集合, 即

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots, n\}.$$

$\mathbf{R}^n$  中的元素  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  有时也用单个字母  $\mathbf{x}$  来表示, 即  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 当所有的  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  都为零时, 称这样的元素为  $\mathbf{R}^n$  中的零元, 记为  $\mathbf{0}$  或  $O$ . 在解析几何中, 通过直角坐标,  $\mathbf{R}^2$  (或  $\mathbf{R}^3$ ) 中的元素分别与平面(或空间)中的点或向量建立一一对应, 因而  $\mathbf{R}^n$  中的元素  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  也称为  $\mathbf{R}^n$  中的一个点或一个  $n$  维向量,  $x_i$  称为点  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个坐标或  $n$  维向量  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个分量. 特别地,  $\mathbf{R}^n$  中的零元  $\mathbf{0}$  称为  $\mathbf{R}^n$  中的坐标原点或  $n$  维零向量.

为了在集合  $\mathbf{R}^n$  中的元素之间建立联系, 在  $\mathbf{R}^n$  中定义线性运算如下:

设  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中任意两个元素,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 规定

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

这样定义了线性运算的集合  $\mathbf{R}^n$  称为  $n$  维空间.

$\mathbf{R}^n$  中点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和点  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  间的距离, 记作  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , 规定

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

显然,  $n=1, 2, 3$  时, 上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一至.

$\mathbf{R}^n$  中元素  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  与零元  $\mathbf{0}$  之间的距离  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  记作  $\|\mathbf{x}\|$  (在  $\mathbf{R}^1$ 、 $\mathbf{R}^2$ 、 $\mathbf{R}^3$  中, 通常将  $\|\mathbf{x}\|$  记作  $|\mathbf{x}|$ ), 即

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

采用这一记号, 结合向量的线性运算, 便得

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

在  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中定义了距离以后, 就可以定义  $\mathbf{R}^n$  中变元的极限:

设  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ .

如果

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0,$$

则称变元  $\mathbf{x}$  在  $\mathbf{R}^n$  中趋于固定元  $\mathbf{a}$ , 记作  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ .

显然,

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \Leftrightarrow x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n.$$

在  $\mathbf{R}^n$  中线性运算和距离的引入, 使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念, 可以方便地引入到  $n(n \geq 3)$  维空间中来, 例如,

设  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\delta$  是某一正数, 则  $n$  维空间内的点集

$$U(\mathbf{a}, \delta)=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta\}$$

就定义为  $\mathbf{R}^n$  中点  $\mathbf{a}$  的  $\delta$  邻域. 以邻域为基础, 可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点, 以及开集、闭集、区域等一系列概念.

## 二. 多元函数概念

例 1 圆柱体的体积  $V$  和它的底半径  $r$ 、高  $h$  之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里, 当  $r, h$  在集合  $\{(r, h) \mid r > 0, h > 0\}$  内取定一对值  $(r, h)$  时,  $V$  对应的值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强  $p$ 、体积  $V$  和绝对温度  $T$  之间具有关系

$$P = \frac{RT}{V},$$

其中  $R$  为常数. 这里, 当  $V, T$  在集合  $\{(V, T) \mid V > 0, T > 0\}$  内取定一对值  $(V, T)$  时,  $p$  的对应值就随之确定.

例 3 设  $R$  是电阻  $R_1, R_2$  并联后的总电阻, 由电学知道, 它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

这里, 当  $R_1, R_2$  在集合  $\{(R_1, R_2) \mid R_1 > 0, R_2 > 0\}$  内取定一对值  $(R_1, R_2)$  时,  $R$  的对应值就随之确定.

**定义 1** 设  $D$  是  $\mathbf{R}^2$  的一个非空子集, 称映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  为定义在  $D$  上的二元函数, 通常记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \text{ (或 } z = f(P), P \in D)$$

其中点集  $D$  称为该函数的定义域,  $x, y$  称为自变量,  $z$  称为因变量.

上述定义中, 与自变量  $x, y$  的一对值  $(x, y)$  相对应的因变量  $z$  的值, 也称为  $f$  在点  $(x, y)$  处的函数值, 记作  $f(x, y)$ , 即  $z = f(x, y)$ .

值域:  $f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ .

函数的其它符号:  $z = z(x, y), z = g(x, y)$  等.

类似地可定义三元函数  $u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D$  以及三元以上的函数.

一般地, 把定义 1 中的平面点集  $D$  换成  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  内的点集  $D$ , 映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  就称为定义在  $D$  上的  $n$  元函数, 通常记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

或简记为

$$u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

也可记为

$$u = f(P), P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

关于函数定义域的约定: 在一般地讨论用算式表达的多元函数  $u = f(\mathbf{x})$  时, 就以使这个算式有意义的变元  $\mathbf{x}$  的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因而, 对这类函数, 它的定义域不再特别标出. 例如,

函数  $z = \ln(x+y)$  的定义域为  $\{(x, y) \mid x+y > 0\}$  (无界开区域);

函数  $z = \arcsin(x^2+y^2)$  的定义域为  $\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$  (有界闭区域).

二元函数的图形: 点集  $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$  称为二元函数  $z = f(x, y)$  的图形, 二元函数的图形是一张曲面.

例如  $z = ax + by + c$  是一张平面, 而函数  $z = x^2 + y^2$  的图形是旋转抛物面.

### 三. 多元函数的极限

与一元函数的极限概念类似, 如果在  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  的过程中, 对应的函数值  $f(x, y)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称  $A$  是函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限.

**定义 2** 设二元函数  $f(P)=f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点. 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  总存在正数  $\delta$ , 使得当  $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$  时, 都有

$$|f(P)-A|=|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立, 则称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限, 记为

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A, \text{ 或 } f(x, y) \rightarrow A \text{ ((} x, y) \rightarrow (x_0, y_0)),$$

也记作  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  或  $f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0)$ .

上述定义的极限也称为二重极限.

例 4. 设  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ , 求证  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ .

证 因为

$$|f(x, y) - 0| = |(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

可见  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , 则当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta,$$

即  $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(O, \delta)$  时, 总有

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon,$$

因此  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ .

必须注意:

(1) 二重极限存在, 是指  $P$  以任何方式趋于  $P_0$  时, 函数都无限接近于  $A$ .

(2) 如果当  $P$  以两种不同方式趋于  $P_0$  时, 函数趋于不同的值, 则函数的极限不存在.

讨论: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  有无极限?

提示: 当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

当点  $P(x, y)$  沿  $y$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

当点  $P(x, y)$  沿直线  $y=kx$  有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

因此, 函数  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处无极限.

极限概念的推广: 多元函数的极限.

多元函数的极限运算法则: 与一元函数的情况类似.

例 5 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$ .

解:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y = 1 \times 2 = 2.$

#### 四. 多元函数的连续性

**定义 3** 设二元函数  $f(P)=f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  为  $D$  的聚点, 且  $P_0 \in D$ . 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续.

如果函数  $f(x, y)$  在  $D$  的每一点都连续, 那么就称函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 或者称  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数.

二元函数的连续性概念可相应地推广到  $n$  元函数  $f(P)$  上去.

例 6 设  $f(x, y) = \sin x$ , 证明  $f(x, y)$  是  $\mathbf{R}^2$  上的连续函数.

证 设  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 由于  $\sin x$  在  $x_0$  处连续, 故  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

以上述  $\delta$  作  $P_0$  的  $\delta$  邻域  $U(P_0, \delta)$ , 则当  $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$  时, 显然

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

即  $f(x, y) = \sin x$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续. 由  $P_0$  的任意性知,  $\sin x$  作为  $x, y$  的二元函数在  $\mathbf{R}^2$  上连续.

证 对于任意的  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ . 因为

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sin x = \sin x_0 = f(x_0, y_0),$$

所以函数  $f(x, y) = \sin x$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续. 由  $P_0$  的任意性知,  $\sin x$  作为  $x, y$  的二元函数在  $\mathbf{R}^2$  上连续.

类似的讨论可知, 一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时, 它们在各自的定义域内都是连续的.

**定义 4** 设函数  $f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点. 如果函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  不连续, 则称  $P_0(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的间断点.

例如: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases},$

其定义域  $D = \mathbf{R}^2$ ,  $O(0, 0)$  是  $D$  的聚点.  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时的极限不存在, 所以点  $O(0, 0)$  是该函数的一个间断点.

又如, 函数  $z = \sin \frac{1}{x^2+y^2-1}$ , 其定义域为  $D = \{(x, y) | x^2+y^2 \neq 1\}$ , 圆周  $C = \{(x, y) | x^2+y^2 = 1\}$  上的点都是

$D$  的聚点, 而  $f(x, y)$  在  $C$  上没有定义, 当然  $f(x, y)$  在  $C$  上各点都不连续, 所以圆周  $C$  上各点都是该函

数的间断点.

注: 间断点可能是孤立点也可能是曲线上的点.

可以证明, 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数; 连续函数的商在分母不为零处仍连续; 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数: 与一元初等函数类似, 多元初等函数是指可用一个式子所表示的多元函数, 这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.

例如  $\frac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$ ,  $\sin(x+y)$ ,  $e^{x^2+y^2+z^2}$  都是多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元连续函数的连续性, 如果要求多元连续函数  $f(P)$  在点  $P_0$  处的极限, 而该点又在此函数的定义区域内, 则  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ .

例 7 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y}{xy}$ .

解: 函数  $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$  是初等函数, 它的定义域为:  $D = \{(x,y) | x \neq 0, y \neq 0\}$ .

$P_0(1,2)$  为  $D$  的内点, 故存在  $P_0$  的某一邻域  $U(P_0) \subset D$ , 而任何邻域都是区域, 所以  $U(P_0)$  是  $f(x,y)$  的一个定义区域, 因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x,y) = f(1,2) = \frac{3}{2}.$$

一般地, 求  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  时, 如果  $f(P)$  是初等函数, 且  $P_0$  是  $f(P)$  的定义域的内点, 则  $f(P)$  在点  $P_0$  处连续, 于是

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 8 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ .

解:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$ .

**多元连续函数的性质:**

**性质 1 (有界性与最大值最小值定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数, 必定在  $D$  上有界, 且能取得它的最大值和最小值.

性质 1 就是说, 若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则必定存在常数  $M > 0$ , 使得对一切  $P \in D$ , 有  $|f(P)| \leq M$ ; 且存在  $P_1, P_2 \in D$ , 使得

$$f(P_1) = \max\{f(P) | P \in D\}, \quad f(P_2) = \min\{f(P) | P \in D\},$$

**性质 2 (介值定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

## 第二节 偏导数

## 一、偏导数的定义及其算法

对于二元函数  $z=f(x, y)$ , 如果只有自变量  $x$  变化, 而自变量  $y$  固定, 这时它就是  $x$  的一元函数, 这函数对  $x$  的导数, 就称为二元函数  $z=f(x, y)$  对于  $x$  的偏导数.

定义 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义, 当  $y$  固定在  $y_0$  而  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$  时, 相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \text{或 } f_x(x_0, y_0).$$

例如:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

类似地, 函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

记作  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \text{或 } f_y(x_0, y_0).$

偏导函数: 如果函数  $z=f(x, y)$  在区域  $D$  内每一点  $(x, y)$  处对  $x$  的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是  $x, y$  的函数, 它就称为函数  $z=f(x, y)$  对自变量  $x$  的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \text{或 } f_x(x, y).$$

偏导函数的定义式:  $f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}.$

类似地, 可定义函数  $z=f(x, y)$  对  $y$  的偏导函数, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y, \quad \text{或 } f_y(x, y).$$

偏导函数的定义式:  $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}.$

求  $\frac{\partial f}{\partial x}$  时, 只要把  $y$  暂时看作常量而对  $x$  求导数; 求  $\frac{\partial f}{\partial y}$  时, 只要把  $x$  暂时看作常量而对  $y$  求导数

讨论: 下列求偏导数的方法是否正确?

$$f_x(x_0, y_0) = f_x(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad f_y(x_0, y_0) = f_y(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left[ \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right]_{x=x_0}, \quad f_y(x_0, y_0) = \left[ \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right]_{y=y_0}.$$

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数. 例如三元函数  $u=f(x, y, z)$  在点  $(x, y, z)$  处对  $x$  的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

其中  $(x, y, z)$  是函数  $u=f(x, y, z)$  的定义域的内点. 它们的求法也仍旧是一元函数的微分法问题.

例 1 求  $z=x^2+3xy+y^2$  在点  $(1, 2)$  处的偏导数.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x+3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x+2y. \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1, y=2} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=1, y=2} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7.$$

例 2 求  $z=x^2 \sin 2y$  的偏导数.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y.$$

例 3 设  $z=x^y (x>0, x \neq 1)$ , 求证:  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ .

$$\text{证 } \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x = x^y + x^y = 2z.$$

例 4 求  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$  的偏导数.

$$\text{解 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}.$$

例 5 已知理想气体的状态方程为  $pV=RT$  ( $R$  为常数),

求证:  $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$ .

$$\text{证 因为 } p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2};$$

$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p};$$

$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R};$$

所以  $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1$ .

例 5 说明的问题: 偏导数的记号是一个整体记号, 不能看作分子分母之商.

二元函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的偏导数的几何意义:

$f_x(x_0, y_0) = [f(x, y_0)]'_x$  是截线  $z=f(x, y_0)$  在点  $M_0$  处切线  $T_x$  对  $x$  轴的斜率.

$f_y(x_0, y_0) = [f(x_0, y)]'_y$  是截线  $z=f(x_0, y)$  在点  $M_0$  处切线  $T_y$  对  $y$  轴的斜率.

偏导数与连续性: 对于多元函数来说, 即使各偏导数在某点都存在, 也不能保证函数在该点连续. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点(0, 0)有,  $f_x(0, 0)=0, f_y(0, 0)=0$ , 但函数在点(0, 0)并不连续.  
提示:

$$f(x, 0) = 0, \quad f(0, y) = 0;$$

$$f_x(0, 0) = \frac{d}{dx}[f(x, 0)] = 0, \quad f_y(0, 0) = \frac{d}{dy}[f(0, y)] = 0.$$

当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴趋于点(0, 0)时, 有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

当点  $P(x, y)$  沿直线  $y=kx$  趋于点(0, 0)时, 有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

因此,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在, 故函数  $f(x, y)$  在(0, 0)处不连续.

类似地, 可定义函数  $z=f(x, y)$  对  $y$  的偏导函数, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y, \quad \text{或} \quad f_y(x, y).$$

偏导函数的定义式:  $f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ .

## 二. 高阶偏导数

设函数  $z=f(x, y)$  在区域  $D$  内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

那么在  $D$  内  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  都是  $x, y$  的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在, 则称它们是函数  $z=f(x, y)$  的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数

如果函数  $z=f(x, y)$  在区域  $D$  内的偏导数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  也具有偏导数, 则它们的偏导数称为函数  $z=f(x, y)$  的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

其中  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$  称为混合偏导数.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

同样可得三阶、四阶、以及  $n$  阶偏导数.

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 6 设  $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1.$$

由例 6 观察到的问题:  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

**定理** 如果函数  $z=f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  在区域  $D$  内连续, 那么在该区域内

这两个二阶混合偏导数必相等.

类似地可定义二元以上函数的高阶偏导数.

例 7 验证函数  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

证 因为  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ , 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

因此 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

例 8. 证明函数  $u = \frac{1}{r}$  满足方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ,

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

证: 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

同理 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

因此 
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

提示: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{r^3 - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(r^3)}{r^6} = -\frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}.$$

### 第三节 全微分及其应用

#### 一、全微分的定义

根据一元函数微分学中增量与微分的关系, 有

偏增量与偏微分:

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \approx f_x(x, y)\Delta x,$$

$f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$  为函数对  $x$  的偏增量,  $f_x(x, y)\Delta x$  为函数对  $x$  的偏微分;

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \approx f_y(x, y)\Delta y,$$

$f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$  为函数对  $y$  的偏增量,  $f_y(x, y)\Delta y$  为函数对  $y$  的偏微分.

全增量:  $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ .

计算全增量比较复杂, 我们希望用  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的线性函数来近似代替之.

**定义** 如果函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

其中  $A$ 、 $B$  不依赖于  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  而仅与  $x$ 、 $y$  有关, 则称函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分, 而称  $A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分, 记作  $dz$ , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果函数在区域  $D$  内各点处都可微分, 那么称这函数在  $D$  内可微分.

可微与连续: 可微必连续, 但偏导数存在不一定连续.

这是因为, 如果  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 则

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

于是  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0$ ,

从而  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [f(x, y) + \Delta z] = f(x, y)$ .

因此函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处连续.

可微条件:

### 定理 1(必要条件)

如果函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分, 则函数在该点的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$  必定存在, 且函数  $z=f(x, y)$

在点  $(x, y)$  的全微分为  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ .

证 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  可微分. 于是, 对于点  $P$  的某个邻域内的任意一点  $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ , 有  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ . 特别当  $\Delta y=0$  时有

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以  $\Delta x$ , 再令  $\Delta x \rightarrow 0$  而取极限, 就得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A,$$

从而偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  存在, 且  $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ . 同理可证偏导数  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在, 且  $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ . 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

简要证明: 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分. 于是有  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ . 特别当  $\Delta y=0$  时有

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以  $\Delta x$ , 再令  $\Delta x \rightarrow 0$  而取极限, 就得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right] = A,$$

从而  $\frac{\partial z}{\partial x}$  存在, 且  $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ . 同理  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在, 且  $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ . 所以  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ .

偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在是可微分的必要条件, 但不是充分条件.

例如,

$$\text{函数 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{在点}(0, 0)\text{处虽然有 } f_x(0, 0)=0 \text{ 及 } f_y(0, 0)=0, \text{ 但函数在}(0, 0)$$

不可微分, 即  $\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y]$  不是较  $\rho$  高阶的无穷小.

这是因为当  $(\Delta x, \Delta y)$  沿直线  $y=x$  趋于  $(0, 0)$  时,

$$\frac{\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

### 定理 2(充分条件)

如果函数  $z=f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x, y)$  连续, 则函数在该点可微分.

定理 1 和定理 2 的结论可推广到三元及三元以上函数.

按着习惯,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  分别记作  $dx$ 、 $dy$ , 并分别称为自变量的微分, 则函数  $z=f(x, y)$  的全微分可写作

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理. 叠加原理也适用于二元以上的函数, 例如函数  $u=f(x, y, z)$  的全微分为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

例 1 计算函数  $z=x^2y+y^2$  的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ ,

所以  $dz = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$ .

例 2 计算函数  $z=e^{xy}$  在点  $(2, 1)$  处的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$ ,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = e^2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = 2e^2,$$

所以  $dz = e^2 dx + 2e^2 dy$ .

例 3 计算函数  $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$  的全微分.

解 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$ ,

所以  $du = dx + (\frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}) dy + ye^{yz} dz$ .

## \*二、全微分在近似计算中的应用

当二元函数  $z=f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  的两个偏导数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  连续, 并且  $|\Delta x|$ ,  $|\Delta y|$  都较小时, 有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y,$$

即

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

我们可以利用上述近似等式对二元函数作近似计算.

例 4 有一圆柱体, 受压后发生形变, 它的半径由 20cm 增大到 20.05cm, 高度由 100cm 减少到 99cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为  $r$ 、 $h$  和  $V$ , 则有

$$V = \pi r^2 h.$$

已知  $r=20$ ,  $h=100$ ,  $\Delta r=0.05$ ,  $\Delta h=-1$ . 根据近似公式, 有

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV = V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h \\ &= 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1) = -200\pi \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了  $200\pi \text{ cm}^3$ .

例 5 计算  $(1.04)^{2.02}$  的近似值.

解 设函数  $f(x, y) = x^y$ . 显然, 要计算的值就是函数在  $x=1.04, y=2.02$  时的函数值  $f(1.04, 2.02)$ . 取  $x=1, y=2, \Delta x=0.04, \Delta y=0.02$ . 由于

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &\approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y \\ &= x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y, \end{aligned}$$

所以

$$(1.04)^{2.02} \approx 1^2 + 2 \times 1^{2-1} \times 0.04 + 1^2 \times \ln 1 \times 0.02 = 1.08.$$

例 6 利用单摆摆动测定重力加速度  $g$  的公式是  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ .

现测得单摆摆长  $l$  与振动周期  $T$  分别为  $l=100 \pm 0.1 \text{ cm}$ 、 $T=2 \pm 0.004 \text{ s}$ . 问由于测定  $l$  与  $T$  的误差而引起  $g$  的绝对误差和相对误差各为多少?

解 如果把测量  $l$  与  $T$  所产生的误差当作  $|\Delta l|$  与  $|\Delta T|$ , 则利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$  的全增量的绝对值  $|\Delta g|$ . 由于  $|\Delta l|, |\Delta T|$  都很小, 因此我们可以用  $dg$  来近似地代替  $\Delta g$ . 这样就得到  $g$  的误差为

$$\begin{aligned} |\Delta g| &\approx |dg| = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \cdot \delta_l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \cdot \delta_T \\ &= 4\pi^2 \left( \frac{1}{T^2} \delta_l + \frac{2l}{T^3} \delta_T \right), \end{aligned}$$

其中  $\delta_l$  与  $\delta_T$  为  $l$  与  $T$  的绝对误差. 把  $l=100, T=2, \delta_l=0.1, \delta_T=0.004$  代入上式, 得  $g$  的绝对误差约为

$$\begin{aligned} \delta_g &= 4\pi^2 \left( \frac{0.1}{2^2} + \frac{2 \times 100}{2^3} \times 0.004 \right) \\ &= 0.5\pi^2 = 4.93 (\text{cm/s}^2). \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_g}{g} = \frac{0.5\pi^2}{\frac{4\pi^2 \times 100}{2^2}} = 0.5\%.$$

从上面的例子可以看到, 对于一般的二元函数  $z=f(x, y)$ , 如果自变量  $x, y$  的绝对误差分别为  $\delta_x, \delta_y$ , 即  $|\Delta x| \leq \delta_x, |\Delta y| \leq \delta_y$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } z \text{ 的误差 } |\Delta z| &\approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot \delta_y; \end{aligned}$$

从而得到  $z$  的绝对误差约为

$$\delta_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot \delta_y;$$

$z$  的相对误差约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \frac{\delta_x}{z} + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \frac{\delta_y}{z}.$$

#### 第四节 多元复合函数的求导法则

设  $z=f(u, v)$ , 而  $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ , 如何求  $\frac{dz}{dt}$  ?

设  $z=f(u, v)$ , 而  $u=\varphi(x, y), v=\psi(x, y)$ , 如何求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$  ?

1. 复合函数的中间变量均为一元函数的情形

定理 1 如果函数  $u=\varphi(t)$  及  $v=\psi(t)$  都在点  $t$  可导, 函数  $z=f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z=f[\varphi(t), \psi(t)]$  在点  $t$  可导, 且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

简要证明 1: 因为  $z=f(u, v)$  具有连续的偏导数, 所以它是可微的, 即有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

又因为  $u=\varphi(t)$  及  $v=\psi(t)$  都可导, 因而可微, 即有

$$du = \frac{du}{dt} dt, \quad dv = \frac{dv}{dt} dt,$$

代入上式得

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} dt = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \right) dt,$$

从而  $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$ .

简要证明 2: 当  $t$  取得增量  $\Delta t$  时,  $u, v$  及  $z$  相应地也取得增量  $\Delta u, \Delta v$  及  $\Delta z$ . 由  $z=f(u, v)$ 、 $u=\varphi(t)$  及  $v=\psi(t)$  的可微性, 有

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\rho) = \frac{\partial z}{\partial u} \left[ \frac{du}{dt} \Delta t + o(\Delta t) \right] + \frac{\partial z}{\partial v} \left[ \frac{dv}{dt} \Delta t + o(\Delta t) \right] + o(\rho) \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \right) \Delta t + \left( \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) o(\Delta t) + o(\rho), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \left( \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t},$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 上式两边取极限, 即得

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

注:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = 0$ .

推广: 设  $z=f(u, v, w)$ ,  $u=\varphi(t), v=\psi(t), w=\omega(t)$ , 则  $z=f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]$  对  $t$  的导数为:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}.$$

上述  $\frac{dz}{dt}$  称为全导数.

## 2. 复合函数的中间变量均为多元函数的情形

定理2 如果函数  $u=\varphi(x, y)$ ,  $v=\psi(x, y)$  都在点  $(x, y)$  具有对  $x$  及  $y$  的偏导数, 函数  $z=f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  在点  $(x, y)$  的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

推广: 设  $z=f(u, v, w)$ ,  $u=\varphi(x, y)$ ,  $v=\psi(x, y)$ ,  $w=\omega(x, y)$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

讨论:

(1) 设  $z=f(u, v)$ ,  $u=\varphi(x, y)$ ,  $v=\psi(y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}=?$   $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

提示:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}$ .

(2) 设  $z=f(u, x, y)$ , 且  $u=\varphi(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x}=?$   $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

提示:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$ .

这里  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial f}{\partial x}$  是不同的,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  是把复合函数  $z=f[\varphi(x, y), x, y]$  中的  $y$  看作不变而对  $x$  的偏导数,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  是把

$f(u, x, y)$  中的  $u$  及  $y$  看作不变而对  $x$  的偏导数.  $\frac{\partial z}{\partial y}$  与  $\frac{\partial f}{\partial y}$  也有类似的区别.

## 3. 复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形

定理3 如果函数  $u=\varphi(x, y)$  在点  $(x, y)$  具有对  $x$  及对  $y$  的偏导数, 函数  $v=\psi(y)$  在点  $y$  可导, 函数  $z=f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  具有连续偏导数, 则复合函数  $z=f[\varphi(x, y), \psi(y)]$  在点  $(x, y)$  的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}.$$

例1 设  $z=e^u \sin v$ ,  $u=xy$ ,  $v=x+y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$   
 $= e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \cdot 1$   
 $= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)],$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$   
 $= e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \cdot 1$   
 $= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)].$

例2 设  $u=f(x, y, z)=e^{x^2+y^2+z^2}$ , 而  $z=x^2 \sin y$ . 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$  和  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

$$=2xe^{x^2+y^2+z^2} + 2ze^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x \sin y$$

$$=2x + (1 + 2x^2 \sin^2 y)e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=2ye^{x^2+y^2+z^2} + 2ze^{x^2+y^2+z^2} \cdot x^2 \cos y$$

$$=2(y + x^4 \sin y \cos y)e^{x^2+y^2+x^4 \sin^2 y}.$$

例 3 设  $z=uv+\sin t$ , 而  $u=e^t, v=\cos t$ . 求全导数  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\text{解 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=v \cdot e^t + u \cdot (-\sin t) + \cos t$$

$$=e^t \cos t - e^t \sin t + \cos t$$

$$=e^t(\cos t - \sin t) + \cos t.$$

例 4 设  $w=f(x+y+z, xyz)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial w}{\partial x}$  及  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ .

解 令  $u=x+y+z, v=xyz$ , 则  $w=f(u, v)$ .

引入记号:  $f'_1 = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ ,  $f'_{12} = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v}$ ; 同理有  $f'_2, f''_{11}, f''_{22}$  等.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + yzf'_2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (f'_1 + yzf'_2) = \frac{\partial f'_1}{\partial z} + yf'_2 + yz \frac{\partial f'_2}{\partial z}$$

$$= f''_{11} + xyf''_{12} + yf'_2 + yzf'_{21} + xy^2zf''_{22}$$

$$= f''_{11} + y(x+z)f''_{12} + yf'_2 + xy^2zf''_{22}.$$

注:  $\frac{\partial f'_1}{\partial z} = \frac{\partial f'_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{11} + xyf''_{12}$ ,  $\frac{\partial f'_2}{\partial z} = \frac{\partial f'_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f'_{21} + xyf''_{22}$ .

例 5 设  $u=f(x, y)$  的所有二阶偏导数连续, 把下列表达式转换成极坐标系中的形式:

$$(1) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2; \quad (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

解 由直角坐标与极坐标间的关系式得

$$u=f(x, y)=f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)=F(\rho, \theta),$$

其中  $x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta, \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan \frac{y}{x}$ .

应用复合函数求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y}{\rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y \sin \theta}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{x}{\rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

两式平方后相加, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

再求二阶偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}\right) \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}\right) \cdot \frac{\sin \theta}{\rho} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \theta}{\rho}.$$

两式相加, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \rho + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho^2} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right].$$

**全微分形式不变性:** 设  $z=f(u, v)$  具有连续偏导数, 则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

如果  $z=f(u, v)$  具有连续偏导数, 而  $u=\varphi(x, y)$ ,  $v=\psi(x, y)$  也具有连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

由此可见, 无论  $z$  是自变量  $u$ 、 $v$  的函数或中间变量  $u$ 、 $v$  的函数, 它的全微分形式是一样的. 这个性质叫做全微分形式不变性.

例 6 设  $z=e^u \sin v$ ,  $u=xy$ ,  $v=x+y$ , 利用全微分形式不变性求全微分.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \\
 &= e^u \sin v (y dx + x dy) + e^u \cos v (dx + dy) \\
 &= (ye^u \sin v + e^u \cos v) dx + (xe^u \sin v + e^u \cos v) dy \\
 &= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)] dx + e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)] dy.
 \end{aligned}$$

## 第五节 隐函数的求导法则

### 一、一个方程的情形

#### 隐函数存在定理 1

设函数  $F(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某一邻域内具有连续偏导数,  $F(x_0, y_0)=0$ ,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 则方程  $F(x, y)=0$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数  $y=f(x)$ , 它满足条件  $y_0=f(x_0)$ , 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

求导公式证明: 将  $y=f(x)$  代入  $F(x, y)=0$ , 得恒等式  $F(x, f(x)) \equiv 0$ ,

$$\text{等式两边对 } x \text{ 求导得 } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

由于  $F_y$  连续, 且  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 所以存在  $(x_0, y_0)$  的一个邻域, 在这个邻域内  $F_y \neq 0$ , 于是得  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ .

例 1 验证方程  $x^2+y^2-1=0$  在点  $(0, 1)$  的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当  $x=0$  时  $y=1$  的隐函数  $y=f(x)$ , 并求这函数的一阶与二阶导数在  $x=0$  的值.

解 设  $F(x, y)=x^2+y^2-1$ , 则  $F_x=2x$ ,  $F_y=2y$ ,  $F(0, 1)=0$ ,  $F_y(0, 1)=2 \neq 0$ . 因此由定理 1 可知, 方程  $x^2+y^2-1=0$  在点  $(0, 1)$  的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当  $x=0$  时  $y=1$  的隐函数  $y=f(x)$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y-xy'}{y^2} = -\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}; \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -1.$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数. 一个二元方程  $F(x, y)=0$  可以确定一个一元隐函数, 一个三元方程  $F(x, y, z)=0$  可以确定一个二元隐函数.

#### 隐函数存在定理 2

设函数  $F(x, y, z)$  在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内具有连续的偏导数, 且  $F(x_0, y_0, z_0)=0$ ,  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 则方程  $F(x, y, z)=0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数  $z=f(x, y)$ , 它满足条件  $z_0=f(x_0, y_0)$ , 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

公式的证明: 将  $z=f(x, y)$  代入  $F(x, y, z)=0$ , 得  $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ ,

将上式两端分别对  $x$  和  $y$  求导, 得

$$F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

因为  $F_z$  连续且  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 所以存在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的一个邻域, 使  $F_z \neq 0$ , 于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2. 设  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

解 设  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ , 则  $F_x = 2x, F_y = 2z - 4$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z-4} = \frac{x}{2-z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-x) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-x) + x \left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2} = \frac{(2-x)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$

## 二、方程组的情形

在一定条件下, 由个方程组  $F(x, y, u, v) = 0, G(x, y, u, v) = 0$  可以确定一对二元函数  $u = u(x, y), v = v(x,$

$y)$ , 例如方程  $xu - yv = 0$  和  $yu + xv = 1$  可以确定两个二元函数  $u = \frac{y}{x^2 + y^2}, v = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

事实上,  $xu - yv = 0 \Rightarrow v = \frac{x}{y}u \Rightarrow yu + x \cdot \frac{x}{y}u = 1 \Rightarrow u = \frac{y}{x^2 + y^2},$

$$v = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

如何根据原方程组求  $u, v$  的偏导数?

### 隐函数存在定理 3

设  $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$  在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, 又  $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ , 且偏导数所组成的函数行列式:

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  不等于零, 则方程组  $F(x, y, u, v) = 0, G(x, y, u, v) = 0$  在点  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 它们满足条件  $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$ , 并有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

隐函数的偏导数:

设方程组  $F(x, y, u, v)=0, G(x, y, u, v)=0$  确定一对具有连续偏导数的二元函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$ , 则

$$\text{偏导数 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ 由方程组 } \begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \text{ 确定;}$$

$$\text{偏导数 } \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 由方程组 } \begin{cases} F_y + F_u \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ G_y + G_u \frac{\partial u}{\partial y} + G_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \text{ 确定.}$$

例 3 设  $xu-yv=0, yu+xv=1$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

解 两个方程两边分别对  $x$  求偏导, 得关于  $\frac{\partial u}{\partial x}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x}$  的方程组

$$\begin{cases} u + x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + v + x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases},$$

当  $x^2+y^2 \neq 0$  时, 解之得  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}$ .

两个方程两边分别对  $y$  求偏导, 得关于  $\frac{\partial u}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}$  的方程组

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial y} - v - y \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases},$$

当  $x^2+y^2 \neq 0$  时, 解之得  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$ .

另解 将两个方程的两边微分得

$$\begin{cases} udx + xdu - vdy - ydv = 0 \\ udy + ydu + vdx + xdv = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} xdu - ydv = vdy - udx \\ ydu + xdv = -udy - vdx \end{cases}.$$

解之得  $du = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} dx + \frac{xv-yu}{x^2+y^2} dy$ ,

$$dv = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2} dx - \frac{xu + yv}{x^2 + y^2} dy.$$

于是  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

例4 设函数  $x=x(u, v), y=y(u, v)$  在点  $(u, v)$  的某一领域内连续且有连续偏导数, 又

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

(1) 证明方程组 
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

在点  $(x, y, u, v)$  的某一领域内唯一确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$ .

(2) 求反函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$  对  $x, y$  的偏导数.

解 (1) 将方程组改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0 \end{cases}$$

则按假设 
$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

由隐函数存在定理 3, 即得所要证的结论.

(2) 将方程组(7)所确定的反函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$  代入(7), 即得

$$\begin{cases} x \equiv x[u(x, y), v(x, y)] \\ y \equiv y[u(x, y), v(x, y)] \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

由于  $J \neq 0$ , 故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

## 第六节 多元函数微分学的几何应用

### 一. 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 $\Gamma$ 的参数方程为

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$$

这里假定 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上可导.

在曲线 $\Gamma$ 上取对应于 $t=t_0$ 的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及对应于 $t=t_0+\Delta t$ 的邻近一点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ . 作曲线的割线 $MM_0$ , 其方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z},$$

当点 $M$ 沿着 $\Gamma$ 趋于点 $M_0$ 时割线 $MM_0$ 的极限位置就是曲线在点 $M_0$ 处的切线. 考虑

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当 $M \rightarrow M_0$ , 即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 得曲线在点 $M_0$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

**曲线的切向量:** 切线的方向向量称为曲线的切向量. 向量

$$\mathbf{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

就是曲线 $\Gamma$ 在点 $M_0$ 处的一个切向量.

**法平面:** 通过点 $M_0$ 而与切线垂直的平面称为曲线 $\Gamma$ 在点 $M_0$ 处的法平面, 其法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 1 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解 因为 $x'_t=1, y'_t=2t, z'_t=3t^2$ , 而点 $(1, 1, 1)$ 所对应的参数 $t=1$ , 所以

$$\mathbf{T}=(1, 2, 3).$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0, \text{ 即 } x+2y+3z=6.$$

**讨论:**

1. 若曲线 $\Gamma$ 的方程为  $y=\varphi(x), z=\psi(x)$ .

问其切线和法平面方程是什么形式?

提示: 曲线方程可看作参数方程:  $x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x)$ , 切向量为  $\mathbf{T}=(1, \varphi'(x), \psi'(x))$ .

2. 若曲线 $\Gamma$ 的方程为

$$F(x, y, z)=0, G(x, y, z)=0.$$

问其切线和法平面方程又是什么形式?

提示: 两方程确定了两个隐函数:  $y=\varphi(x), z=\psi(x)$ , 曲线的参数方程为

$$x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x),$$

由方程组 
$$\begin{cases} F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0 \\ G_x + G_y \frac{dy}{dx} + G_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$
 可解得  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{dz}{dx}$ .

切向量为  $T = (1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$ .

例 2 求曲线  $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$  在点  $(1, -2, 1)$  处的切线及法平面方程.

解 为求切向量, 将所给方程的两边对  $x$  求导数, 得 
$$\begin{cases} 2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0 \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \end{cases},$$

解方程组得  $\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}, \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}$ .

在点  $(1, -2, 1)$  处,  $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{dz}{dx} = -1$ .

从而  $T = (1, 0, -1)$ .

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0, \text{ 即 } x-z=0.$$

## 二. 曲面的切平面与法线

设曲面  $\Sigma$  的方程为

$$F(x, y, z)=0,$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$  是曲面  $\Sigma$  上的一点, 并设函数  $F(x, y, z)$  的偏导数在该点连续且不同时为零. 在曲面  $\Sigma$  上, 通过点  $M_0$  任意引一条曲线  $\Gamma$ , 假定曲线  $\Gamma$  的参数方程式为

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t),$$

$t=t_0$  对应于点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 且  $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$  不全为零. 曲线在点的切向量为

$$T=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)).$$

考虑曲面方程  $F(x, y, z)=0$  两端在  $t=t_0$  的全导数:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)\omega'(t_0)=0.$$

引入向量

$$n=(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)),$$

易见  $T$  与  $n$  是垂直的. 因为曲线  $\Gamma$  是曲面  $\Sigma$  上通过点  $M_0$  的任意一条曲线, 它们在点  $M_0$  的切线都与同一向量  $n$  垂直, 所以曲面上通过点  $M_0$  的一切曲线在点  $M_0$  的切线都在同一个平面上. 这个平面称为曲面  $\Sigma$  在点  $M_0$  的切平面. 这切平面的方程式是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0.$$

**曲面的法线:** 通过点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线. 法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

**曲面的法向量:** 垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量. 向量

$$n=(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

就是曲面  $\Sigma$  在点  $M_0$  处的一个法向量.

例 3 求球面  $x^2+y^2+z^2=14$  在点  $(1, 2, 3)$  处的切平面及法线方程式.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 14, \\ F_x &= 2x, F_y = 2y, F_z = 2z, \\ F_x(1, 2, 3) &= 2, F_y(1, 2, 3) = 4, F_z(1, 2, 3) = 6. \end{aligned}$$

法向量为  $\mathbf{n}=(2, 4, 6)$ , 或  $\mathbf{n}=(1, 2, 3)$ .

所求切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0, \text{ 即 } x+2y+3z-14=0.$$

$$\text{法线方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

**讨论:** 若曲面方程为  $z=f(x, y)$ , 问曲面的切平面及法线方程式是什么形式?

提示: 此时  $F(x, y, z)=f(x, y)-z$ .  $\mathbf{n}=(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$

例 4 求旋转抛物面  $z=x^2+y^2-1$  在点  $(2, 1, 4)$  处的切平面及法线方程.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ \mathbf{n} &= (f_x, f_y, -1) = (2x, 2y, -1), \\ \mathbf{n}|_{(2, 1, 4)} &= (4, 2, -1). \end{aligned}$$

所以在点  $(2, 1, 4)$  处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0, \text{ 即 } 4x+2y-z-6=0.$$

$$\text{法线方程为 } \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

## 第七节 方向导数与梯度

### 一、方向导数

现在我们来讨论函数  $z=f(x, y)$  在一点  $P$  沿某一方向的变化率问题.

设  $l$  是  $xOy$  平面上以  $P_0(x_0, y_0)$  为始点的一条射线,  $\mathbf{e}_l=(\cos \alpha, \cos \beta)$  是与  $l$  同方向的单位向量. 射线  $l$  的参数方程为

$$x=x_0+t \cos \alpha, y=y_0+t \cos \beta (t \geq 0).$$

设函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域  $U(P_0)$  内有定义,  $P(x_0+t \cos \alpha, y_0+t \cos \beta)$  为  $l$  上另一点, 且  $P \in U(P_0)$ . 如果函数增量  $f(x_0+t \cos \alpha, y_0+t \cos \beta)-f(x_0, y_0)$  与  $P$  到  $P_0$  的距离  $|PP_0|=t$  的比值

$$\frac{f(x_0+t \cos \alpha, y_0+t \cos \beta)-f(x_0, y_0)}{t}$$

当  $P$  沿着  $l$  趋于  $P_0$  (即  $t \rightarrow t_0^+$ ) 时的极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0$  沿方向  $l$  的方向导数, 记

作  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$ , 即

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t \cos \alpha, y_0+t \cos \beta)-f(x_0, y_0)}{t}.$$

从方向导数的定义可知, 方向导数  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$  就是函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处沿方向  $l$  的变化率.

方向导数的计算:

**定理** 如果函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微分, 那么函数在该点沿任一方向  $l$  的方向导数都存在, 且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta$  是方向  $l$  的方向余弦.

简要证明: 设  $\Delta x = t \cos \alpha, \Delta y = t \cos \beta$ , 则

$$f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) t \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) t \cos \beta + o(t).$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta.$$

这就证明了方向导数的存在, 且其值为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta.$$

提示:  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ .

$$\Delta x = t \cos \alpha, \Delta y = t \cos \beta, \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = t.$$

**讨论:** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $P$  沿  $x$  轴正向和负向, 沿  $y$  轴正向和负向的方向导数如何?

提示:

$$\text{沿 } x \text{ 轴正向时, } \cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right| = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|;$$

$$\text{沿 } x \text{ 轴负向时, } \cos \alpha = -1, \cos \beta = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right| = -\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|.$$

例 1 求函数  $z = xe^{2y}$  在点  $P(1, 0)$  沿从点  $P(1, 0)$  到点  $Q(2, -1)$  的方向的方向导数.

解 这里方向  $l$  即向量  $\vec{PQ} = (1, -1)$  的方向, 与  $l$  同向的单位向量为

$$\mathbf{e}_l = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\text{因为函数可微分, 且 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = e^{2y} \Big|_{(1,0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 2xe^{2y} \Big|_{(1,0)} = 2,$$

所以所求方向导数为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1,0)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

对于三元函数  $f(x, y, z)$  来说, 它在空间一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  沿  $\mathbf{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  的方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

如果函数  $f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  可微分, 则函数在该点沿着方向  $\mathbf{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  的方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma.$$

例 2 求  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  在点  $(1, 1, 2)$  沿方向  $l$  的方向导数, 其中  $l$  的方向角分别为  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .  
解 与  $l$  同向的单位向量为

$$e = (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

因为函数可微分, 且

$$f_x(1, 1, 2) = (y+z)|_{(1, 1, 2)} = 3,$$

$$f_y(1, 1, 2) = (x+z)|_{(1, 1, 2)} = 3,$$

$$f_z(1, 1, 2) = (y+x)|_{(1, 1, 2)} = 2,$$

所以

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1, 1, 2)} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{2}).$$

## 二. 梯度

设函数  $z = f(x, y)$  在平面区域  $D$  内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点  $P_0(x_0, y_0) \in D$ , 都可确定一个向量

$$f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j},$$

这向量称为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的梯度, 记作  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ , 即

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

梯度与方向导数:

如果函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微分,  $e = (\cos \alpha, \cos \beta)$  是与方向  $l$  同方向的单位向量, 则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos \alpha + f_y(x_0, y_0)\cos \beta,$$

$$= \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \cdot e$$

$$= |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cdot \cos(\mathbf{grad} f(x_0, y_0), \hat{e}).$$

这一关系式表明了函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系. 特别, 当向量  $e$  与

$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$  的夹角  $\theta = 0$ , 即沿梯度方向时, 方向导数  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$  取得最大值, 这个最大值就是梯度的模

$|\mathbf{grad} f(x_0, y_0)|$ . 这就是说: 函数在一点的梯度是个向量, 它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向, 它的模就等于方向导数的最大值.

讨论:  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$  的最大值;

结论: 函数在某点的梯度是这样一个向量, 它的方向与取得最大方向导数的方向一致, 而它的模为方向导数的最大值.

我们知道, 一般说来二元函数  $z = f(x, y)$  在几何上表示一个曲面, 这曲面被平面  $z = c$  ( $c$  是常数) 所截得的曲线  $L$  的方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}.$$

这条曲线  $L$  在  $xOy$  面上的投影是一条平面曲线  $L^*$ , 它在  $xOy$  平面上的方程为

$$f(x, y) = c.$$

对于曲线  $L^*$  上的一切点, 已给函数的函数值都是  $c$ , 所以我们称平面曲线  $L^*$  为函数  $z = f(x, y)$  的等值线

若  $f_x, f_y$  不同时为零, 则等值线  $f(x, y)=c$  上任一点  $P_0(x_0, y_0)$  处的一个单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}} (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

这表明梯度  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$  的方向与等值线上这点的法线方向相同, 而沿这个方向的方向导数  $\frac{\partial f}{\partial n}$  就等于  $|\mathbf{grad} f(x_0, y_0)|$ , 于是

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial n} \mathbf{n}.$$

这一关系式表明了函数在一点的梯度与过这点的等值线、方向导数间的关系. 这也就是说: 函数在一点的梯度方向与等值线在这点的一个法线方向相同, 它的指向为从数值较低的等值线指向数值较高的等值线, 梯度的模就等于函数在这个法线方向的方向导数.

梯度概念可以推广到三元函数的情形. 设函数  $f(x, y, z)$  在空间区域  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ , 都可定出一个向量

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k},$$

这向量称为函数  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的梯度, 记为  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ , 即

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}.$$

**结论:** 三元函数的梯度也是这样一个向量, 它的方向与取得最大方向导数的方向一致, 而它的模为方向导数的最大值.

如果引进曲面

$$f(x, y, z) = c$$

为函数的等量面的概念, 则可得函数  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的梯度的方向与过点  $P_0$  的等量面  $f(x, y, z) = c$  在这点的法线的一个方向相同, 且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面, 而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.

例 3 求  $\mathbf{grad} \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

解 这里  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

因为  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$ ,

所以  $\mathbf{grad} \frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}$ .

例 4 设  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , 求  $\mathbf{grad} f(1, -1, 2)$ .

解  $\mathbf{grad} f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z)$ ,

于是  $\mathbf{grad} f(1, -1, 2) = (2, -2, 4)$ .

**数量场与向量场:** 如果对于空间区域  $G$  内的任一点  $M$ , 都有一个确定的数量  $f(M)$ , 则称在这空间区域  $G$  内确定了一个数量场(例如温度场、密度场等). 一个数量场可用一个数量函数  $f(M)$  来确定, 如果与点  $M$  相对应的是一个向量  $\mathbf{F}(M)$ , 则称在这空间区域  $G$  内确定了一个向量场(例如力场、速度场等). 一个向量场可用一个向量函数  $\bar{F}(M)$  来确定, 而

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k},$$

其中  $P(M), Q(M), R(M)$  是点  $M$  的数量函数.

利用场的概念, 我们可以说向量函数  $\text{grad } f(M)$  确定了一个向量场——梯度场, 它是由数量场  $f(M)$  产生的. 通常称函数  $f(M)$  为这个向量场的势, 而这个向量场又称为势场. 必须注意, 任意一个向量场不一定是势场, 因为它不一定是某个数量函数的梯度场.

例 5 试求数量场  $\frac{m}{r}$  所产生的梯度场, 其中常数  $m > 0$ ,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  为原点  $O$  与点  $M(x, y, z)$  间的距离.

$$\text{解 } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{mx}{r^3},$$

$$\text{同理 } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{my}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{m}{r} \right) = -\frac{mz}{r^3}.$$

$$\text{从而 } \text{grad } \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2} \left( \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right).$$

记  $\mathbf{e}_r = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k}$ , 它是与  $\overrightarrow{OM}$  同方向的单位向量, 则  $\text{grad } \frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r$ .

上式右端在力学上可解释为, 位于原点  $O$  而质量为  $m$  质点对位于点  $M$  而质量为  $l$  的质点的引力. 这引力的大小与两质点的质量的乘积成正比, 而与它们的距平方成反比, 这引力的方向由点  $M$  指向原点. 因此数量场  $\frac{m}{r}$  的势场即梯度场  $\text{grad } \frac{m}{r}$  称为引力场, 而函数  $\frac{m}{r}$  称为引力势.

## 第八节 多元函数的极值及其求法

### 一、多元函数的极值及最大值、最小值

**定义** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义, 如果对于该邻域内任何异于  $(x_0, y_0)$  的点  $(x, y)$ , 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ (或 } f(x, y) > f(x_0, y_0)),$$

则称函数在点  $(x_0, y_0)$  有极大值(或极小值)  $f(x_0, y_0)$ .

极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

例 1 函数  $z=3x^2+4y^2$  在点  $(0, 0)$  处有极小值.

当  $(x, y)=(0, 0)$  时,  $z=0$ , 而当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,  $z > 0$ . 因此  $z=0$  是函数的极小值.

例 2 函数  $z=-\sqrt{x^2+y^2}$  在点  $(0, 0)$  处有极大值.

当  $(x, y)=(0, 0)$  时,  $z=0$ , 而当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,  $z < 0$ . 因此  $z=0$  是函数的极大值.

例 3 函数  $z=xy$  在点  $(0, 0)$  处既不取得极大值也不取得极小值.

因为在点  $(0, 0)$  处的函数值为零, 而在点  $(0, 0)$  的任一邻域内, 总有使函数值为正的点, 也有使函数值为负的点.

以上关于二元函数的极值概念, 可推广到  $n$  元函数. 设  $n$  元函数  $u=f(P)$  在点  $P_0$  的某一邻域内有定义, 如果对于该邻域内任何异于  $P_0$  的点  $P$ , 都有

$$f(P) < f(P_0) \text{ (或 } f(P) > f(P_0)),$$

则称函数  $f(P)$  在点  $P_0$  有极大值(或极小值)  $f(P_0)$ .

**定理 1(必要条件)** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  具有偏导数, 且在点  $(x_0, y_0)$  处有极值, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明 不妨设  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有极大值. 依极大值的定义, 对于点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内异于  $(x_0, y_0)$  的点  $(x, y)$ , 都有不等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

特殊地, 在该邻域内取  $y=y_0$  而  $x \neq x_0$  的点, 也应有不等式

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0).$$

这表明一元函数  $f(x, y_0)$  在  $x=x_0$  处取得极大值, 因而必有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

类似地可证

$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

从几何上看, 这时如果曲面  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处有切平面, 则切平面

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

成为平行于  $xOy$  坐标面的平面  $z=z_0$ .

类似地可推得, 如果三元函数  $u=f(x, y, z)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  具有偏导数, 则它在点  $(x_0, y_0, z_0)$  具有极值的必要条件为

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

仿照一元函数, 凡是能使  $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0$  同时成立的点  $(x_0, y_0)$  称为函数  $z=f(x, y)$  的驻点.

从定理 1 可知, 具有偏导数的函数的极值点必定是驻点. 但函数的驻点不一定是极值点.

例如, 函数  $z=xy$  在点  $(0, 0)$  处的两个偏导数都是零, 函数在  $(0, 0)$  既不取得极大值也不取得极小值.

**定理 2(充分条件)** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又  $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ , 令

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{yy}(x_0, y_0) = B, f''_{xy}(x_0, y_0) = C,$$

则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处是否取得极值的条件如下:

- (1)  $AC - B^2 > 0$  时具有极值, 且当  $A < 0$  时有极大值, 当  $A > 0$  时有极小值;
- (2)  $AC - B^2 < 0$  时没有极值;
- (3)  $AC - B^2 = 0$  时可能有极值, 也可能没有极值.

在函数  $f(x, y)$  的驻点处如果  $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy}{}^2 > 0$ , 则函数具有极值, 且当  $f''_{xx} < 0$  时有极大值, 当  $f''_{xx} > 0$  时有极小值.

极值的求法:

第一步 解方程组

$$f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0,$$

求得一切实数解, 即可得一切驻点.

第二步 对于每一个驻点  $(x_0, y_0)$ , 求出二阶偏导数的值  $A$ 、 $B$  和  $C$ .

第三步 定出  $AC - B^2$  的符号, 按定理 2 的结论判定  $f(x_0, y_0)$  是否是极值、是极大值 还是极小值.

例 4 求函数  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的极值.

$$\text{解 解方程组 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

求得  $x=1, -3; y=0, 2$ . 于是得驻点为  $(1, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(-3, 0)$ 、 $(-3, 2)$ .

再求出二阶偏导数

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, f''_{yy}(x, y) = 0, f''_{xy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点  $(1, 0)$  处,  $AC - B^2 = 12 \cdot 6 > 0$ , 又  $A > 0$ , 所以函数在  $(1, 0)$  处有极小值  $f(1, 0) = -5$ ;

在点  $(1, 2)$  处,  $AC - B^2 = 12 \cdot (-6) < 0$ , 所以  $f(1, 2)$  不是极值;

在点 $(-3, 0)$ 处,  $AC-B^2=-12\cdot 6<0$ , 所以 $f(-3, 0)$ 不是极值;

在点 $(-3, 2)$ 处,  $AC-B^2=-12\cdot(-6)>0$ , 又 $A<0$ , 所以函数的 $(-3, 2)$ 处有极大值  
 $f(-3, 2)=31$ .

应注意的问题:

不是驻点也可能是极值点,

例如,

函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处有极大值, 但 $(0, 0)$ 不是函数的驻点. 因此, 在考虑函数的极值问题时, 除了考虑函数的驻点外, 如果有偏导数不存在的点, 那么对这些点也应当考虑.

最大值和最小值问题: 如果 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 $D$ 上必定能取得最大值和最小值. 这种使函数取得最大值或最小值的点既可能在 $D$ 的内部, 也可能在 $D$ 的边界上. 我们假定, 函数在 $D$ 上连续、在 $D$ 内可微分且只有有限个驻点, 这时如果函数在 $D$ 的内部取得最大值(最小值), 那么这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值). 因此, 求最大值和最小值的一般方法是: 将函数 $f(x, y)$ 在 $D$ 内的所有驻点处的函数值及在 $D$ 的边界上的最大值和最小值相互比较, 其中最大的就是最大值, 最小的就是最小值. 在通常遇到的实际问题中, 如果根据问题的性质, 知道函数 $f(x, y)$ 的最大值(最小值)一定在 $D$ 的内部取得, 而函数在 $D$ 内只有一个驻点, 那么可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x, y)$ 在 $D$ 上的最大值(最小值).

例5 某厂要用铁板做成一个体积为 $8\text{m}^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取多少时, 才能使用料最省.

解 设水箱的长为 $x\text{m}$ , 宽为 $y\text{m}$ , 则其高应为 $\frac{8}{xy}\text{m}$ . 此水箱所用材料的面积为

$$A=2(xy+y\cdot\frac{8}{xy}+x\cdot\frac{8}{xy})=2(xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}) \quad (x>0, y>0).$$

令 $A_x=2(y-\frac{8}{x^2})=0$ ,  $A_y=2(x-\frac{8}{y^2})=0$ , 得 $x=2, y=2$ .

根据题意可知, 水箱所用材料面积的最小值一定存在, 并在开区域 $D=\{(x, y)|x>0, y>0\}$ 内取得. 因为函数 $A$ 在 $D$ 内只有一个驻点, 所以此驻点一定是 $A$ 的最小值点, 即当水箱的长为 $2\text{m}$ 、宽为 $2\text{m}$ 、高为 $\frac{8}{2\cdot 2}=2\text{m}$ 时, 水箱所用的材料最省.

因此 $A$ 在 $D$ 内的唯一驻点 $(2, 2)$ 处取得最小值,

即长为 $2\text{m}$ 、宽为 $2\text{m}$ 、高为 $\frac{8}{2\cdot 2}=2\text{m}$ 时, 所用材料最省.

从这个例子还可看出, 在体积一定的长方体中, 以立方体的表面积为最小.

例6 有一宽为 $24\text{cm}$ 的长方形铁板, 把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折法才能使断面的面积最大?

解 设折起来的边长为 $x\text{cm}$ , 倾角为 $\alpha$ , 那末梯形断面的下底长为 $24-2x$ , 上底长为 $24-2x\cos\alpha$ , 高为 $x\sin\alpha$ , 所以断面面积

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha,$$

$$\text{即 } A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha \quad (0<x<12, 0<\alpha\leq 90^\circ).$$

可见断面面积 $A$ 是 $x$ 和 $\alpha$ 的二元函数, 这就是目标函数, 面求使这函数取得最大值的点 $(x, \alpha)$ .

令 $A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0$ ,

$$A_{\alpha}=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

由于  $\sin\alpha \neq 0, x \neq 0$ , 上述方程组可化为

$$\begin{cases} 12-2x+x\cos\alpha=0 \\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0 \end{cases}$$

解这方程组, 得  $\alpha=60^\circ, x=8\text{cm}$ .

根据题意可知断面面积的最大值一定存在, 并且在  $D=\{(x, y)|0 < x < 12, 0 < \alpha \leq 90^\circ\}$  内取得, 通过计算得知  $\alpha=90^\circ$  时的函数值比  $\alpha=60^\circ, x=8(\text{cm})$  时的函数值为小. 又函数在  $D$  内只有一个驻点, 因此可以断定, 当  $x=8\text{cm}, \alpha=60^\circ$  时, 就能使断面的面积最大.

## 二、条件极值 拉格朗日乘数法

对自变量有附加条件的极值称为条件极值. 例如, 求表面积为  $a^2$  而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体的三棱的长为  $x, y, z$ , 则体积  $V=xyz$ . 又因假定表面积为  $a^2$ , 所以自变量  $x, y, z$  还必须满足附加条件  $2(xy+yz+xz)=a^2$ .

这个问题就是求函数  $V=xyz$  在条件  $2(xy+yz+xz)=a^2$  下的最大值问题, 这是一个条件极值问题.

对于有些实际问题, 可以把条件极值问题化为无条件极值问题.

例如上述问题,

由条件  $2(xy+yz+xz)=a^2$ , 解得  $z=\frac{a^2-2xy}{2(x+y)}$ , 于是得

$$V=\frac{xy}{2}\left(\frac{a^2-2xy}{x+y}\right).$$

只需求  $V$  的无条件极值问题.

在很多情形下, 将条件极值化为无条件极值并不容易. 需要另一种求条件极值的专用方法, 这就是拉格朗日乘数法.

现在我们来寻求函数  $z=f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y)=0$  下取得极值的必要条件.

如果函数  $z=f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  取得所求的极值, 那么有

$$\varphi(x_0, y_0)=0.$$

假定在  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均有连续的一阶偏导数, 而  $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$ . 由隐函数存在定理, 由方程  $\varphi(x, y)=0$  确定一个连续且具有连续导数的函数  $y=\psi(x)$ , 将其代入目标函数  $z=f(x, y)$ , 得一元函数

$$z=f[x, \psi(x)].$$

于是  $x=x_0$  是一元函数  $z=f[x, \psi(x)]$  的极值点, 由取得极值的必要条件, 有

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0, y_0)+f_y(x_0, y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0,$$

即 
$$f_x(x_0, y_0)-f_y(x_0, y_0)\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=0.$$

从而函数  $z=f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y)=0$  下在  $(x_0, y_0)$  取得极值的必要条件是

$$f_x(x_0, y_0)-f_y(x_0, y_0)\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=0 \text{ 与 } \varphi(x_0, y_0)=0 \text{ 同时成立.}$$

设 
$$\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=-\lambda, \text{ 上述必要条件变为}$$

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法: 要找函数  $z=f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y)=0$  下的可能极值点, 可以先构成辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中  $\lambda$  为某一常数. 然后解方程组

$$\begin{cases} F_x(x, y) = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

由这方程组解出  $x, y$  及  $\lambda$ , 则其中  $(x, y)$  就是所要求的可能的极值点.

这种方法可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形.

至于如何确定所求的点是否是极值点, 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

例 7 求表面积为  $a^2$  而体积为最大的长方体的体积.

解 设长方体的三棱的长为  $x, y, z$ , 则问题就是在条件

$$2(xy + yz + xz) = a^2$$

下求函数  $V = xyz$  的最大值.

构成辅助函数

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - a^2),$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = yz + 2\lambda(y + z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = xz + 2\lambda(x + z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = xy + 2\lambda(y + x) = 0 \\ 2xy + 2yz + 2xz = a^2 \end{cases}$$

$$\text{得 } x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{6} a,$$

这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知最大值一定存在,

所以最大值就在这个可能的值点处取得. 此时  $V = \frac{\sqrt{6}}{36} a^3$ .

复习思考题、作业题:

因材施教, 将根据课堂授课的实际情况布置作业。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 9,10 周	课 次	第 17-20 次
章 节 名 称	<b>第十章 重积分</b>		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	8
教 学 的 目 的 要 求	<p>1、理解二重积分、三重积分的概念，了解重积分的性质，知道二重积分的中值定理。</p> <p>2、掌握二重积分的（直角坐标、极坐标）计算方法。</p> <p>3、掌握计算三重积分的（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）计算方法。</p> <p>4、会用重积分求一些几何量与物理量（平面图形的面积、体积、重心、转动惯量、引力等）。</p> <p>5、讲二重积分的应用溯源到刘徽的牟合方盖体积的求解问题，增强学生的文化自信，以及实事求是的科学探索精神。</p>		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	<p><b>教学重点：</b></p> <p>1、二重积分的计算（直角坐标、极坐标）；</p> <p>2、三重积分的（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）计算。</p> <p>3、二、三重积分的几何应用及物理应用。</p> <p><b>教学难点：</b></p> <p>1、 利用极坐标计算二重积分；</p> <p>2、 利用球坐标计算三重积分；</p> <p>3、 物理应用中的引力问题。</p>		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;"><b>§10.1 二重积分的概念与性质</b></p> <p><b>一、曲顶柱体的体积</b></p> <p>1.曲顶柱体：底面：坐标面上可求面积的有界闭区域 <math>D</math>。  顶：曲面 <math>z=f(x, y)</math>  侧面：以 <math>D</math> 的边界为准线且母线平行于 <math>z</math> 轴的柱面。</p> <p>2.曲顶柱体的体积</p> <p>设有一立体，它的底是 <math>xOy</math> 面上的闭区域 <math>D</math>，它的侧面是以 <math>D</math> 的边界曲线为准线而母线平行于 <math>z</math> 轴的柱面，它的顶是曲面 <math>z=f(x, y)</math>，这里 <math>f(x, y) \geq 0</math> 且在 <math>D</math> 上连续。这种立体叫做曲顶柱体。现在我们来讨论如何计算曲顶柱体的体积。</p> <p>首先，用一组曲线网把 <math>D</math> 分成 <math>n</math> 个小区域：</p> $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n.$ <p>分别以这些小闭区域的边界曲线为准线，作母线平行于 <math>z</math> 轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分为 <math>n</math> 个细曲顶柱体。在每个 <math>\Delta\sigma_i</math> 中任取一点 <math>(\xi_i, \eta_i)</math>，以 <math>f(\xi_i, \eta_i)</math> 为高而底为 <math>\Delta\sigma_i</math> 的平顶柱体的体积为：<math>f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)</math>。</p>			

这个平顶柱体体积之和： $V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ .

可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值. 为求得曲顶柱体体积的精确值, 将分割加密, 只需取极限,

即  $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ .

其中 $\lambda$ 是个小区域的直径中的最大值.

## 二、二重积分的概念

定义: 设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的有界函数. 将闭区域  $D$  任意分成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n.$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第  $i$  个小区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i)$ , 作和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda$ 趋于零时, 这 and 的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分, 记作  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

$f(x, y)$  被积函数,  $f(x, y) d\sigma$  被积表达式,  $d\sigma$  面积元素,  $x, y$  积分变量,  $D$  积分区域, 积分和.

注 1: 直角坐标系中的面积元素: 如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分  $D$ , 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 $\Delta x_i$ 和 $\Delta y_i$ , 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ , 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素  $d\sigma$  记作  $dx dy$ , 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

其中  $dx dy$  叫做直角坐标系中的面积元素.

注 2: 二重积分的存在性: 当  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续时, 积分和的极限是存在的, 也就是说函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分必定存在. 我们总假定函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续, 所以  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分都是存在的.

注 3: 若  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上有界.

注 4: 二重积分的几何意义: 如果  $f(x, y) \geq 0$ , 被积函数  $f(x, y)$  可解释为曲顶柱体的在点  $(x, y)$  处的竖坐标, 所以二重积分的几何意义就是柱体的体积. 如果  $f(x, y)$  是负的, 柱体就在  $xOy$  面的下方, 二重积分的绝对值仍等于柱体的体积, 但二重积分的值是负的.

## 三、二重积分的性质

性质 1 设  $c_1, c_2$  为常数, 则

$$\iint_D [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] d\sigma = c_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + c_2 \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

性质 2 如果闭区域  $D$  被有限条曲线分为有限个部分闭区域, 则在  $D$  上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 例如  $D$  分为两个闭区域  $D_1$  与  $D_2$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma .$$

**性质 3**  $\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma$  ( $\sigma$  为积分区域  $D$  的面积).

例: 计算  $\iint_D d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

**性质 4** 如果在  $D$  上,  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则有不等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma .$$

**特殊地**

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma .$$

**性质 5** 设  $M$ 、 $m$  分别是  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的最大值和最小值,  $\sigma$  为  $D$  的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma .$$

例: 利用二重积分的性质估计  $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 。

**性质 6(二重积分的中值定理)** 设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  为  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$  使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma .$$

## §10.2 二重积分的计算法

### 一、二次积分

设函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  上可积, 对  $\forall x \in [a, b]$ ,

$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  存在, 则  $\int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx$  存在, 且  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx$ , 这

种先对  $y$ 、后对  $x$  的积分称为二次积分。

同理可定义  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$

例: 计算下列积分:

$$1. \iint_D e^{x+y} d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$2. \iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}.$$

## 二、利用直角坐标计算二重积分

### 1. 积分区域的类型

X—型区域:

$$D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b.$$

Y—型区域:

$$D: \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), c \leq y \leq d.$$

### 2. 利用直角坐标计算二重积分

设  $f(x, y) \geq 0$ ,  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ .

此时二重积分在几何上表示以曲面  $z=f(x, y)$  为顶, 以区域  $D$  为底的曲顶柱体的体积.

对于  $x_0 \in [a, b]$ , 曲顶柱体在  $x=x_0$  的截面面积为以区间  $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$  为底、以曲线  $z=f(x_0, y)$  为曲边的曲边梯形, 所以这截面的面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

根据平行截面面积为已知的立体体积的方法, 得曲顶柱体体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

即

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

可记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

类似地, 如果区域  $D$  为 Y—型区域:

$$D: \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), c \leq y \leq d,$$

则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

注: 在转换积分次序时, 要根据提示画出区域  $D$  的图形, 然后再看另一种形式分析. 有时区域并非单一的 X—型区域或 Y—型区域, 而是两种型的并.

例 1. 计算  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y=1$ 、 $x=2$  及  $y=x$  所围成的闭区域.

解: 画出区域  $D$ .

解法 1. 可把 D 看成是 X—型区域:  $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x$ . 于是

$$\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 \left[ \int_1^x xy dy \right] dx = \int_1^2 \left[ x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_1^x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

注: 积分还可以写成  $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy = \int_1^2 x dx \int_1^x y dy$ .

解法 2. 也可把 D 看成是 Y—型区域:  $1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2$ . 于是

$$\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 \left[ \int_y^2 xy dx \right] dy = \int_1^2 \left[ y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_y^2 dy = \int_1^2 \left( 2y - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[ y^2 - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

例 2. 计算  $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma$ , 其中 D 是由直线  $y=1$ 、 $x=-1$  及  $y=x$  所围成的闭区域.

解 画出区域 D, 可把 D 看成是 X—型区域:  $-1 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2} dy = -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left[ (1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_x^1 dx = -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (|x|^3 - 1) dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^3 - 1) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

也可 D 看成是 Y—型区域:  $-1 \leq y \leq 1, -1 \leq x < y$ . 于是

$$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma = \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^y \sqrt{1+x^2-y^2} dx.$$

例 3 计算  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中 D 是由直线  $y=x-2$  及抛物线  $y^2=x$  所围成的闭区域.

解 积分区域可以表示为  $D=D_1+D_2$ ,

其中  $D_1: 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$ ;  $D_2: 1 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . 于是

$$\iint_D xy d\sigma = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy.$$

积分区域也可以表示为  $D: -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y+2$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 = 5\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

讨论积分次序的选择.

**例 4** 求两个底圆半径都等于  $\rho$  的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ 及 } x^2 + z^2 = \rho^2.$$

利用立体关于坐标平面的对称性, 只要算出它在第一卦限部分的体积  $V_1$ , 然后再乘以 8 就行了.

第一卦限部分是以  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R\}$  为底, 以  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$  顶的曲顶柱体. 于是

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy = 8 \int_0^R [\sqrt{R^2 - x^2} y]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\ &= 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} R^3. \end{aligned}$$

### 三. 利用极坐标计算二重积分

有些二重积分, 积分区域  $D$  的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便, 且被积函数用极坐标变量  $\rho$ 、 $\theta$  表达比较简单. 这时我们就可以考虑利用极坐标来计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

按二重积分的定义  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ .

下面我们来研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

以从极点  $O$  出发的一族射线及以极点为中心的一族同心圆构成的网将区域  $D$  分为  $n$  个小闭区域, 小闭区域的面积为:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2} \cdot \rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i \\ &= \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i, \end{aligned}$$

其中  $\bar{\rho}_i$  表示相邻两圆弧的半径的平均值.

在  $\Delta\sigma_i$  内取点  $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ , 设其直角坐标为  $(\xi_i, \eta_i)$ ,

则有  $\xi_i = \bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i$ ,  $\eta_i = \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i$ .

于是  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i$ ,

即  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$ .

若积分区域  $D$  可表示为

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

则  $\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$ .

讨论: 如何确定积分限?

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

例 5. 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由中心在原点、半径为  $a$  的圆周所围成的闭区域.

解 在极坐标系中, 闭区域  $D$  可表示为

$$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

注: 此处积分  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$  也常写成  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ .

利用  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi(1-e^{-a^2})$  计算广义积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ :

设  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,

$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,

$S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$ .

显然  $D_1 \subset S \subset D_2$ . 由于  $e^{-x^2-y^2} > 0$ , 从则在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

因为  $\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$ ,

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}), \quad \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}),$$

于是上面的不等式可写成  $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) < \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$ .

令  $R \rightarrow +\infty$ , 上式两端趋于同一极限  $\frac{\pi}{4}$ , 从而  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**例 6** 求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  所截得的 (含在圆柱面内的部分) 立体的体积.

解 由对称性, 立体体积为第一卦限部分的四倍.

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中  $D$  为半圆周  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  及  $x$  轴所围成的闭区域.

在极坐标系中  $D$  可表示为

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是 
$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho$$

$$= \frac{32}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

复习思考题、作业题：

因材施教，将根据课堂授课的实际情况布置作业。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 11-13 周	课 次	第 21-26 次
章 节 名 称	<b>第十一章 曲线积分与曲面积分</b>		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题课 ( )、其它 ( )	教学时数	12
教 学 的 目 的 要 求	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解两类曲线积分的概念, 了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系。</li> <li>2. 掌握计算两类曲线积分的方法。</li> <li>3. 熟练掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件, 会求全微分的原函数。</li> <li>4. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系, 掌握计算两类曲面积分的方法, 了解高斯公式、斯托克斯公式, 会用高斯公式计算曲面积分。</li> <li>5. 知道散度与旋度的概念, 并会计算。</li> <li>6. 会用曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量。</li> <li>7. 思政教育: 体会积分思想, 处理数学解释外还折射出人生哲理。我们应把人生梦想进行分割, 逐个实现小目标, 再求和, 再取极限, 总有一天我们的梦想会实现。</li> </ol>		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	<p><b>教学重点:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、两类曲线积分的计算方法;</li> <li>2、格林公式及其应用;</li> <li>3、两类曲面积分的计算方法;</li> <li>4、高斯公式、斯托克斯公式;</li> <li>5、两类曲线积分与两类曲面积分的应用。</li> </ol> <p><b>教学难点:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、两类曲线积分的关系及两类曲面积分的关系;</li> <li>2、对坐标的曲线积分与对坐标的曲面积分的计算;</li> <li>3、应用格林公式计算对坐标的曲线积分;</li> <li>4、应用高斯公式计算对坐标的曲面积分;</li> <li>5、应用斯托克斯公式计算对坐标的曲线积分。</li> </ol>		
<p>教学步骤及内容:</p> <p style="text-align: center;"><b>§11.1 对弧长的曲线积分</b></p> <p><b>一、对弧长的曲线积分的概念与性质</b></p> <p>曲线形构件的质量:</p>			

设一曲线形构件所占的位置在  $xOy$  面内的一段曲线弧  $L$  上, 已知曲线形构件在点  $(x, y)$  处的线密度为  $\mu(x, y)$ . 求曲线形构件的质量.

把曲线分成  $n$  小段,  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$  ( $\Delta s_i$  也表示弧长);

任取  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta s_i$ , 得第  $i$  小段质量的近似值  $\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ ;

整个物质曲线的质量近似为  $M \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ ;

令  $\lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\} \rightarrow 0$ , 则整个物质曲线的质量为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

这种和的极限在研究其它问题时也会遇到.

定义 设  $L$  为  $xOy$  面内的一条光滑曲线弧, 函数  $f(x, y)$  在  $L$  上有界. 在  $L$  上任意插入一点列  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  把  $L$  分在  $n$  个小段. 设第  $i$  个小段的长度为  $\Delta s_i$ , 又  $(\xi_i, \eta_i)$  为第  $i$  个小段上任意取定的一点,

作乘积  $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 并作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ , 如果当各小弧段的长度的最大值  $\lambda \rightarrow 0$ , 这

和的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分, 记作

$$\int_L f(x, y)ds, \text{ 即 } \int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $L$  叫做积分弧段.

设函数  $f(x, y)$  定义在可求长度的曲线  $L$  上, 并且有界.

将  $L$  任意分成  $n$  个弧段:  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , 并用  $\Delta s_i$  表示第  $i$  段的弧长;

在每一弧段  $\Delta s_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ ;

令  $\lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$ , 如果当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 这 and 的极限总存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上对弧长的

曲线积分或第一类曲线积分, 记作  $\int_L f(x, y)ds$ , 即

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $L$  叫做积分弧段.

曲线积分的存在性: 当  $f(x, y)$  在光滑曲线弧  $L$  上连续时, 对弧长的曲线积分  $\int_L f(x, y)ds$  是存在的

. 以后我们总假定  $f(x, y)$  在  $L$  上是连续的.

根据对弧长的曲线积分的定义, 曲线形构件的质量就是曲线积分  $\int_L \mu(x, y)ds$  的值, 其中  $\mu(x, y)$  为线密度.

对弧长的曲线积分的推广:  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$ .

如果  $L$  (或  $\Gamma$ ) 是分段光滑的, 则规定函数在  $L$  (或  $\Gamma$ ) 上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分的和. 例如设  $L$  可分成两段光滑曲线弧  $L_1$  及  $L_2$ , 则规定

$$\int_{L_1+L_2} f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

闭曲线积分: 如果  $L$  是闭曲线, 那么函数  $f(x, y)$  在闭曲线  $L$  上对弧长的曲线积分记作  $\oint_L f(x, y) ds$ .

对弧长的曲线积分的性质:

性质 1 设  $c_1, c_2$  为常数, 则

$$\int_L [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] ds = c_1 \int_L f(x, y) ds + c_2 \int_L g(x, y) ds;$$

性质 2 若积分弧段  $L$  可分成两段光滑曲线弧  $L_1$  和  $L_2$ , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds;$$

性质 3 设在  $L$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

特别地, 有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds$$

二、对弧长的曲线积分的计算法

根据对弧长的曲线积分的定义, 如果曲线形构件  $L$  的线密度为  $f(x, y)$ , 则曲线形构件  $L$  的质量为

$$\int_L f(x, y) ds.$$

另一方面, 若曲线  $L$  的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

则质量元素为

$$f(x, y) ds = f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

曲线的质量为

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

即  $\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$

定理 设  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上有定义且连续,  $L$  的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中  $\varphi(t), \psi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有一阶连续导数, 且  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ , 则曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$  存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta).$$

证明 (略)

应注意的问题: 定积分的下限  $\alpha$  一定要小于上限  $\beta$ .

讨论:

(1) 若曲线  $L$  的方程为  $y = \psi(x) (a \leq x \leq b)$ , 则  $\int_L f(x, y) ds = ?$

提示:  $L$  的参数方程为  $x = x, y = \psi(x) (a \leq x \leq b)$ ,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx.$$

(2) 若曲线  $L$  的方程为  $x = \varphi(y) (c \leq y \leq d)$ , 则  $\int_L f(x, y) ds = ?$

提示:  $L$  的参数方程为  $x = \varphi(y), y = y (c \leq y \leq d)$ ,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f[\varphi(y), y] \sqrt{\varphi'^2(y) + 1} dy.$$

(3) 若曲线  $\Gamma$  的方程为  $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ ,

则  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = ?$

提示:  $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt.$

例 1 计算  $\int_L \sqrt{y} ds$ , 其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上点  $O(0, 0)$  与点  $B(1, 1)$  之间的一段弧.

解 曲线的方程为  $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ , 因此

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{x^2} \sqrt{1 + (x^2)'^2} dx = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

例 2 计算半径为  $R$ 、中心角为  $2\alpha$  的圆弧  $L$  对于它的对称轴的转动惯量  $I$  (设线密度为  $\mu = 1$ ).

解 取坐标系如图所示, 则  $I = \int_L y^2 ds$ .

曲线  $L$  的参数方程为

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta < \alpha).$$

于是  $I = \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

例 3 计算曲线积分  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ , 其中  $\Gamma$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$  上相应于  $t$  从 0 到达  $2\pi$  的一段弧.

解 在曲线  $\Gamma$  上有  $x^2 + y^2 + z^2 = (a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (kt)^2 = a^2 + k^2 t^2$ , 并且

$$ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt = \sqrt{a^2 + k^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

**小结:** 用曲线积分解决问题的步骤:

- (1) 建立曲线积分;
- (2) 写出曲线的参数方程 (或直角坐标方程), 确定参数的变化范围;
- (3) 将曲线积分化为定积分;
- (4) 计算定积分.

## §11.2 对坐标的曲线积分

### 一、对坐标的曲线积分的概念与性质

**变力沿曲线所作的功:**

设一个质点在  $xOy$  面内在变力  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  的作用下从点  $A$  沿光滑曲线弧  $L$  移动到点  $B$ , 试求变力  $\mathbf{F}(x, y)$  所作的功.

用曲线  $L$  上的点  $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n=B$  把  $L$  分成  $n$  个小弧段,

设  $A_k=(x_k, y_k)$ , 有向线段  $A_k \vec{A}_{k+1}$  的长度为  $\Delta s_k$ , 它与  $x$  轴的夹角为  $\tau_k$ , 则

$$A_k \vec{A}_{k+1} = \{\cos \tau_k, \sin \tau_k\} \Delta s_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

显然, 变力  $\mathbf{F}(x, y)$  沿有向小弧段  $\widehat{A_k A_{k+1}}$  所作的功可以近似为

$$\mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot A_k \vec{A}_{k+1} = [P(x_k, y_k) \cos \tau_k + Q(x_k, y_k) \sin \tau_k] \Delta s_k;$$

于是, 变力  $\mathbf{F}(x, y)$  所作的功

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{F}(x_k, y_k) \cdot A_k \vec{A}_{k+1} \approx \sum_{k=1}^{n-1} [P(x_k, y_k) \cos \tau_k + Q(x_k, y_k) \sin \tau_k] \Delta s_k,$$

从而

$$W = \int_L [P(x, y) \cos \tau + Q(x, y) \sin \tau] ds.$$

这里  $\tau = \tau(x, y)$ ,  $\{\cos \tau, \sin \tau\}$  是曲线  $L$  在点  $(x, y)$  处的与曲线方向一致的单位切向量.

把  $L$  分成  $n$  个小弧段:  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ;

变力在  $L_i$  上所作的功近似为:

$$\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i = P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i;$$

变力在  $L$  上所作的功近似为:

$$\sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i];$$

变力在  $L$  上所作的功的精确值:

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i],$$

其中  $\lambda$  是各小弧段长度的最大值.

提示:

用  $\Delta s_i = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$  表示从  $L_i$  的起点到其终点的的向量. 用  $\Delta s_i$  表示  $\Delta s_i$  的模.

**对坐标的曲线积分的定义:**

定义 设函数  $f(x, y)$  在有向光滑曲线  $L$  上有界. 把  $L$  分成  $n$  个有向小弧段  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ; 小弧段  $L_i$  的起点为  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ , 终点为  $(x_i, y_i)$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ;  $(\xi_i, \eta_i)$  为  $L_i$  上任意一点,  $\lambda$  为各小弧段长度的最大值.

如果极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$  总存在, 则称此极限为函数

$f(x, y)$  在有向曲线  $L$  上对坐标  $x$  的曲线积分, 记作  $\int_L f(x, y)dx$ , 即

$$\int_L f(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

如果极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$  总存在, 则称此极限为函数

$f(x, y)$  在有向曲线  $L$  上对坐标  $y$  的曲线积分, 记作  $\int_L f(x, y)dy$ , 即

$$\int_L f(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

设  $L$  为  $xOy$  面上一条光滑有向曲线,  $\{\cos \tau, \sin \tau\}$  是与曲线方向一致的单位切向量, 函数  $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  在  $L$  上有定义. 如果下列二式右端的积分存在, 我们就定义

$$\int_L P(x, y)dx = \int_L P(x, y)\cos \tau ds,$$

$$\int_L Q(x, y)dy = \int_L Q(x, y)\sin \tau ds,$$

前者称为函数  $P(x, y)$  在有向曲线  $L$  上对坐标  $x$  的曲线积分, 后者称为函数  $Q(x, y)$  在有向曲线  $L$  上对坐标  $y$  的曲线积分, 对坐标的曲线积分也叫第二类曲线积分.

**定义的推广:**

设 $\Gamma$ 为空间内一条光滑有向曲线,  $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 是曲线在点 $(x, y, z)$ 处的与曲线方向一致的单位切向量, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 $\Gamma$ 上有定义. 我们定义(假如各式右端的积分存在)

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z)dx = \int_{\Gamma} P(x, y, z)\cos\alpha ds,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z)dy = \int_{\Gamma} Q(x, y, z)\cos\beta ds,$$

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z)dz = \int_{\Gamma} R(x, y, z)\cos\gamma ds.$$

$$\int_L f(x, y, z)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L f(x, y, z)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_L f(x, y, z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

对坐标的曲线积分的简写形式:

$$\int_L P(x, y)dx + \int_L Q(x, y)dy = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + \int_{\Gamma} Q(x, y, z)dy + \int_{\Gamma} R(x, y, z)dz \\ = \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

对坐标的曲线积分的性质:

(1) 如果把 $L$ 分成 $L_1$ 和 $L_2$ , 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

(2) 设 $L$ 是有向曲线弧,  $-L$ 是与 $L$ 方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_{-L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

两类曲线积分之间的关系:

设 $\{\cos\tau_i, \sin\tau_i\}$ 为与 $\Delta s_i$ 同向的单位向量, 我们注意到 $\{\Delta x_i, \Delta y_i\} = \Delta s_i$ , 所以

$$\Delta x_i = \cos\tau_i \cdot \Delta s_i, \quad \Delta y_i = \sin\tau_i \cdot \Delta s_i,$$

$$\int_L f(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cos \tau_i \Delta s_i = \int_L f(x, y) \cos \tau ds,$$

$$\int_L f(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sin \tau_i \Delta s_i = \int_L f(x, y) \sin \tau ds.$$

即 
$$\int_L P dx + Q dy = \int_L [P \cos \tau + Q \sin \tau] ds,$$

或 
$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds.$$

其中  $\mathbf{A} = \{P, Q\}$ ,  $\mathbf{t} = \{\cos \tau, \sin \tau\}$  为有向曲线弧  $L$  上点  $(x, y)$  处单位切向量,  $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds = \{dx, dy\}$ .

类似地有

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] ds,$$

或 
$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{\Gamma} A_t ds.$$

其中  $\mathbf{A} = \{P, Q, R\}$ ,  $\mathbf{T} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  为有向曲线弧  $\Gamma$  上点  $(x, y, z)$  处单位切向量,  $d\mathbf{r} = \mathbf{T} ds = \{dx, dy, dz\}$ ,  $A_t$  为向量  $\mathbf{A}$  在向量  $\mathbf{t}$  上的投影.

## 二、对坐标的曲线积分的计算:

定理: 设  $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  是定义在光滑有向曲线

$$L: x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

上的连续函数, 当参数  $t$  单调地由  $\alpha$  变到  $\beta$  时, 点  $M(x, y)$  从  $L$  的起点  $A$  沿  $L$  运动到终点  $B$ , 则

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt,$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt.$$

讨论:  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = ?$

提示:  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt.$

定理: 若  $P(x, y)$  是定义在光滑有向曲线

$$L: x = \varphi(t), y = \psi(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$$

上的连续函数,  $L$  的方向与  $t$  的增加方向一致, 则

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

简要证明: 不妨设  $\alpha \leq \beta$ . 对应于  $t$  点与曲线  $L$  的方向一致的切向量为  $\{\varphi'(t), \psi'(t)\}$ ,

$$\text{所以 } \cos \tau = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}},$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int_L P(x, y) dx &= \int_L P(x, y) \cos \tau ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

**应注意的问题:**

下限  $\alpha$  对应于  $L$  的起点, 上限  $\beta$  对应于  $L$  的终点,  $\alpha$  不一定小于  $\beta$ .

**讨论:**

若空间曲线  $\Gamma$  由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$$

给出, 那么曲线积分

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = ?$$

如何计算

$$\begin{aligned} \text{提示: } \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \omega'(t)\} dt, \end{aligned}$$

其中  $\alpha$  对应于  $\Gamma$  的起点,  $\beta$  对应于  $\Gamma$  的终点.

**例题:** 例 1. 计算  $\int_L xy dx$ , 其中  $L$  为抛物线  $y^2 = x$  上从点  $A(1, -1)$  到点  $B(1, 1)$  的一段弧.

解法一: 以  $x$  为参数.  $L$  分为  $AO$  和  $OB$  两部分:

$AO$  的方程为  $y = -\sqrt{x}$ ,  $x$  从 1 变到 0;  $OB$  的方程为  $y = \sqrt{x}$ ,  $x$  从 0 变到 1.

$$\begin{aligned} \text{因此 } \int_L xy dx &= \int_{AO} xy dx + \int_{OB} xy dx \\ &= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

第二种方法: 以  $y$  为积分变量.  $L$  的方程为  $x = y^2$ ,  $y$  从 -1 变到 1. 因此

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y (y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

例 2. 计算  $\int_L y^2 dx$ .

(1)  $L$  为按逆时针方向绕行的上半圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ ;

(2)从点  $A(a, 0)$ 沿  $x$  轴到点  $B(-a, 0)$ 的直线段.

解 (1) $L$  的参数方程为

$$x=a \cos \theta, y=a \sin \theta,$$

$\theta$ 从 0 变到  $\pi$ .

$$\text{因此 } \int_L y^2 dx = \int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta = a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = -\frac{4}{3} a^3.$$

(2) $L$  的方程为  $y=0, x$  从  $a$  变到  $-a$ .

$$\text{因此 } \int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0.$$

例 3 计算  $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ . (1)抛物线  $y=x^2$  上从  $O(0, 0)$ 到  $B(1, 1)$ 的一段弧; (2)抛物线  $x=y^2$  上从  $O(0, 0)$ 到  $B(1, 1)$ 的一段弧; (3)从  $O(0, 0)$ 到  $A(1, 0)$ , 再到  $R(1, 1)$ 的有向折线  $OAB$ .

解 (1) $L: y=x^2, x$  从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1.$$

(2) $L: x=y^2, y$  从 0 变到 1. 所以

$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4) dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = 1.$$

(3) $OA: y=0, x$  从 0 变到 1;  $AB: x=1, y$  从 0 变到 1.

$$\begin{aligned} \int_L 2xy dx + x^2 dy &= \int_{OA} 2xy dx + x^2 dy + \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy \\ &= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0) dx + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1) dy = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

例 4. 计算  $\int_\Gamma x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$ , 其中  $\Gamma$ 是从点  $A(3, 2, 1)$ 到点  $B(0, 0, 0)$ 的直线段  $AB$ .

解: 直线  $AB$  的参数方程为

$$x=3t, y=2t, z=t,$$

$t$ 从 1 变到 0. 所以

$$\text{所以 } I = \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t] dt = 87 \int_1^0 t^3 dt = -\frac{87}{4}.$$

例 5. 设一个质点在  $M(x, y)$ 处受到力  $F$  的作用,  $F$  的大小与  $M$ 到原点  $O$  的距离成正比,  $F$  的方向恒指向原点. 此质点由点  $A(a, 0)$ 沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针方向移动到点  $B(0, b)$ , 求力  $F$  所作的功  $W$ .

例 5. 一个质点在力  $F$  的作用下从点  $A(a, 0)$ 沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  按逆时针方向移动到点  $B(0, b)$ ,  $F$  的大小与质点到原点的距离成正比, 方向恒指向原点. 求力  $F$  所作的功  $W$ .

解: 椭圆的参数方程为  $x=acost, y=bsint$ ,  $t$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{F} = k \cdot |\mathbf{r}| \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}),$$

其中  $k > 0$  是比例常数.

$$\text{于是 } W = \int_{\widehat{AB}} -kxdx - kydy = -k \int_{\widehat{AB}} xdx + ydy.$$

$$= -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t) dt$$

$$= k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

### 三、两类曲线积分之间的联系

由定义, 得

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P \cos \tau + Q \sin \tau) ds$$

$$= \int_L \{P, Q\} \cdot \{\cos \tau, \sin \tau\} ds = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

其中  $\mathbf{F} = \{P, Q\}$ ,  $\mathbf{T} = \{\cos \tau, \sin \tau\}$  为有向曲线弧  $L$  上点  $(x, y)$  处单位切向量,  $d\mathbf{r} = \mathbf{T}ds = \{dx, dy\}$ .

类似地有

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

$$= \int_{\Gamma} \{P, Q, R\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

其中  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ ,  $\mathbf{T} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  为有向曲线弧  $\Gamma$  上点  $(x, y, z)$  处单位切向量,  $d\mathbf{r} = \mathbf{T}ds = \{dx, dy, dz\}$ .

## §11.3 格林公式及其应用

### 一、格林公式

单连通与复连通区域:

设  $D$  为平面区域, 如果  $D$  内任一闭曲线所围的部分都属于  $D$ , 则称  $D$  为平面单连通区域, 否则称为复连通区域.

对平面区域  $D$  的边界曲线  $L$ , 我们规定  $L$  的正向如下: 当观察者沿  $L$  的这个方向行走时,  $D$  内在他近处的那一部分总在他的左边.

区域  $D$  的边界曲线  $L$  的方向:

定理 1 设闭区域  $D$  由分段光滑的曲线  $L$  围成, 函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中  $L$  是  $D$  的取正向的边界曲线.

简要证明:

仅就  $D$  即是  $X$ -型的又是  $Y$ -型的区域情形进行证明.

设  $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ . 因为  $\frac{\partial P}{\partial y}$  连续, 所以由二重积分的计算法有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \{P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)]\} dx.$$

另一方面, 由对坐标的曲线积分的性质及计算法有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx = \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx + \int_b^a P[x, \varphi_2(x)] dx \\ &= \int_a^b \{P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)]\} dx. \end{aligned}$$

因此

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx.$$

设  $D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ . 类似地可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dx.$$

由于  $D$  即是  $X$ -型的又是  $Y$ -型的, 所以以上两式同时成立, 两式合并即得

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

应注意的问题:

对复连通区域  $D$ , 格林公式右端应包括沿区域  $D$  的全部边界的曲线积分, 且边界的方向对区域  $D$  来说都是正向.

设区域  $D$  的边界曲线为  $L$ , 取  $P = -y, Q = x$ , 则由格林公式得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx, \text{ 或 } A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

例 1. 椭圆  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  所围成图形的面积  $A$ .

分析: 只要  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , 就有  $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = A$ .

解: 设  $D$  是由椭圆  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  所围成的区域.

令  $P = -\frac{1}{2}y$ ,  $Q = \frac{1}{2}x$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

于是由格林公式,

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \oint_L -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy = \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

例 2 设  $L$  是任意一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = 0.$$

证: 令  $P = 2xy$ ,  $Q = x^2$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$ .

因此, 由格林公式有  $\oint_L 2xy dx + x^2 dy = \pm \iint_D 0 dx dy = 0$ . (为什么二重积分前有“±”号?)

例 3. 计算  $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(0, 1)$  为顶点的三角形闭区域.

分析: 要使  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$ , 只需  $P = 0$ ,  $Q = xe^{-y^2}$ .

解: 令  $P = 0$ ,  $Q = xe^{-y^2}$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$ . 因此, 由格林公式有

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy = \int_{OA} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

例 4 计算  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,  $L$  的方向

为逆时针方向.

解: 令  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . 则当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

记  $L$  所围成的闭区域为  $D$ . 当  $(0, 0) \notin D$  时, 由格林公式得  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ ;

当  $(0, 0) \in D$  时, 在  $D$  内取一圆周  $l: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ . 由  $L$  及  $l$  围成了一个复连通区域  $D_1$ , 应用格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0,$$

其中  $l$  的方向取逆时针方向.

$$\text{于是 } \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi.$$

解 记  $L$  所围成的闭区域为  $D$ .

当  $(0,0) \notin D$  时, 由格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

当  $(0,0) \in D$  时, 在  $D$  内取一圆周  $l: x^2+y^2=r^2 (r>0)$ . 由  $L$  及  $l$  围成了一个复连通区域  $D_1$ , 应用格林公式得

$$\oint_{L+l} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\text{即 } \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0,$$

其中  $l$  的方向取顺时针方向.

$$\text{于是 } \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \oint_{l^-} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi.$$

分析: 这里  $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ , 当  $x^2+y^2 \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

## 二、平面上曲线积分与路径无关的条件

曲线积分与路径无关:

设  $G$  是一个开区域,  $P(x,y)$ 、 $Q(x,y)$  在区域  $G$  内具有一阶连续偏导数. 如果对于  $G$  内任意指定的两个点  $A$ 、 $B$  以及  $G$  内从点  $A$  到点  $B$  的任意两条曲线  $L_1$ 、 $L_2$ , 等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立, 就说曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $G$  内与路径无关, 否则说与路径有关.

设曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  在  $G$  内与路径无关,  $L_1$  和  $L_2$  是  $G$  内任意两条从点  $A$  到点  $B$  的曲线, 则有

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy,$$

因为

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy = \int_{L_2} Pdx+Qdy \Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy - \int_{L_2} Pdx+Qdy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy + \int_{L_2^-} Pdx+Qdy = 0 \Leftrightarrow \oint_{L_1+(L_2^-)} Pdx+Qdy = 0,$$

所以有以下结论:

曲线积分  $\int_L Pdx+Qdy$  在  $G$  内与路径无关相当于沿  $G$  内任意

闭曲线  $C$  的曲线积分  $\oint_L Pdx+Qdy$  等于零.

**定理 2** 设开区域  $G$  是一个单连通域, 函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则曲线积分  $\int_L Pdx+Qdy$  在  $G$  内与路径无关 (或沿  $G$  内任意闭曲线的曲线积分为零) 的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在  $G$  内恒成立.

充分性易证:

若  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , 由格林公式, 对任意闭曲线  $L$ ,

$$\text{有 } \oint_L Pdx+Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

必要性:

假设存在一点  $M_0 \in G$ , 使  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \eta \neq 0$ , 不妨设  $\eta > 0$ ,

则由  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  的连续性, 存在  $M_0$  的一个  $\delta$  邻域  $U(M_0, \delta)$ ,

使在此邻域内有  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq \frac{\eta}{2}$ . 于是沿邻域  $U(M_0, \delta)$  边界  $l$  的闭曲线积分

$$\oint_l Pdx+Qdy = \iint_{U(M_0, \delta)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \geq \frac{\eta}{2} \cdot \pi \delta^2 > 0,$$

这与闭曲线积分为零相矛盾, 因此在  $G$  内  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ .

应注意的问题:

定理要求, 区域  $G$  是单连通区域, 且函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数. 如果这

两个条件之一不能满足, 那么定理的结论不能保证成立.

破坏函数  $P$ 、 $Q$  及  $\frac{\partial P}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial x}$  连续性的点称为奇点.

例 5 计算  $\int_L 2xydx+x^2dy$ , 其中  $L$  为抛物线  $y=x^2$  上从  $O(0, 0)$  到  $B(1, 1)$  的一段弧.

解: 因为  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$  在整个  $xOy$  面内都成立,

所以在整个  $xOy$  面内, 积分  $\int_L 2xydx+x^2dy$  与路径无关.

$$\begin{aligned}\int_L 2xydx+x^2dy &= \int_{OA} 2xydx+x^2dy + \int_{AB} 2xydx+x^2dy \\ &= \int_0^1 1^2 dy = 1.\end{aligned}$$

讨论: 设  $L$  为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,  $L$  的方向为逆时针方向, 问

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0 \text{ 是否一定成立?}$$

提示:

这里  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  和  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  不连续.

因为当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以如果  $(0, 0)$  不在  $L$  所围成的区域内, 则结论成立, 而当

$(0, 0)$  在  $L$  所围成的区域内时, 结论未必成立.

### 三、二元函数的全微分求积

曲线积分在  $G$  内与路径无关, 表明曲线积分的值只与起点从点  $(x_0, y_0)$  与终点  $(x, y)$  有关.

如果  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关, 则把它记为  $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$

$$\text{即 } \int_L Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy.$$

若起点  $(x_0, y_0)$  为  $G$  内的一定点, 终点  $(x, y)$  为  $G$  内的动点, 则

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

为  $G$  内的的函数.

二元函数  $u(x, y)$  的全微分为  $du(x, y) = u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy$ .

表达式  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  与函数的全微分有相同的结构, 但它未必就是某个函数的全微分.

那么在什么条件下表达式  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是某个二元函数  $u(x, y)$  的全微分呢? 当这样的二元函数存在时怎样求出这个二元函数呢?

定理 3 设开区域  $G$  是一个单连通域, 函数  $P(x, y)$  及  $Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 则  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  在  $G$  内为某一函数  $u(x, y)$  的全微分的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在  $G$  内恒成立.

简要证明:

必要性: 假设存在某一函数  $u(x, y)$ , 使得

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$\text{则有 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  连续, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \text{即 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

充分性:

因为在  $G$  内  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 所以积分  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

在  $G$  内与路径无关. 在  $G$  内从点  $(x_0, y_0)$  到点  $(x, y)$  的曲线积分可表示为

$$\text{考虑函数 } u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(x, y)dx = P(x, y).$$

类似地有  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ , 从而  $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ . 即  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是某一函数的全微分.

求原函数的公式:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy,$$

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx.$$

例 6 验证:  $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$  在右半平面( $x>0$ )内是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解: 这里  $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ ,  $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ .

因为  $P$ 、 $Q$  在右半平面内具有一阶连续偏导数, 且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以在右半平面内,  $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$  是某个函数的全微分.

取积分路线为从  $A(1, 0)$  到  $B(x, 0)$  再到  $C(x, y)$  的折线, 则所求函数为

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0 + \int_0^y \frac{xdy}{x^2+y^2} = \arctan \frac{y}{x}.$$

问: 为什么  $(x_0, y_0)$  不取  $(0, 0)$ ?

例 6 验证: 在整个  $xOy$  面内,  $xy^2dx+x^2ydy$  是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解 这里  $P=xy^2$ ,  $Q=x^2y$ .

因为  $P$ 、 $Q$  在整个  $xOy$  面内具有一阶连续偏导数, 且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以在整个  $xOy$  面内,  $xy^2dx+x^2ydy$  是某个函数的全微分.

取积分路线为从  $O(0, 0)$  到  $A(x, 0)$  再到  $B(x, y)$  的折线, 则所求函数为

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2dx+x^2ydy = 0 + \int_0^y x^2ydy = x^2 \int_0^y ydy = \frac{x^2y^2}{2}.$$

思考与练习:

1. 在单连通区域  $G$  内, 如果  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且恒有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 那么

(1) 在  $G$  内的曲线积分  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是否与路径无关?

(2) 在  $G$  内的闭曲线积分  $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是否为零?

(3) 在  $G$  内  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是否是某一函数  $u(x, y)$  的全微分?

2. 在区域  $G$  内除  $M_0$  点外, 如果  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且恒有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $G_1$  是  $G$

内不含  $M_0$  的单连通区域, 那么

(1)在  $G_1$  内的曲线积分  $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$  是否与路径无关?

(2)在  $G_1$  内的闭曲线积分  $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$  是否为零?

(3) 在  $G_1$  内  $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$  是否是某一函数  $u(x,y)$  的全微分?

3. 在单连通区域  $G$  内, 如果  $P(x,y)$  和  $Q(x,y)$  具有一阶连续偏

导数,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 但  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  非常简单, 那么

(1)如何计算  $G$  内的闭曲线积分?

(2)如何计算  $G$  内的非闭曲线积分?

(3)计算  $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$ , 其中  $L$  为逆时针方向的

上半圆周  $(x-a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ ,

### §11.4 对面积的曲面积分

#### 一、对面积的曲面积分的概念与性质

物质曲面的质量问题:

设  $\Sigma$  为面密度非均匀的物质曲面, 其面密度为  $\rho(x,y,z)$ , 求其质量:

把曲面分成  $n$  个小块:  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  ( $\Delta S_i$  也代表曲面的面积);

求质量的近似值:  $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  ( $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  是  $\Delta S_i$  上任意一点);

取极限求精确值:  $M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  ( $\lambda$  为各小块曲面直径的最大值).

定义 设曲面  $\Sigma$  是光滑的, 函数  $f(x,y,z)$  在  $\Sigma$  上有界. 把  $\Sigma$  任意分成  $n$  小块:  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  ( $\Delta S_i$  也代表曲面的面积), 在  $\Delta S_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 如果当各小块曲面的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$  时, 极限

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$  总存在, 则称此极限为函数  $f(x,y,z)$  在曲面  $\Sigma$  上对面积的曲面积分或第一类曲面

积分, 记作  $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ , 即

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

其中  $f(x,y,z)$  叫做被积函数,  $\Sigma$  叫做积分曲面.

对面积的曲面积分的存在性:

我们指出当  $f(x,y,z)$  在光滑曲面  $\Sigma$  上连续时对面积的曲面积分是存在的. 今

后总假定  $f(x,y,z)$  在  $\Sigma$  上连续.

根据上述定义面密度为连续函数 $\rho(x, y, z)$ 的光滑曲面 $\Sigma$ 的质量 $M$ 可表示为 $\rho(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上对面积的曲面积分:

$$M = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

如果 $\Sigma$ 是分片光滑的我们规定函数在 $\Sigma$ 上对面积的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上对面积的曲面积分之和. 例如设 $\Sigma$ 可分成两片光滑曲面 $\Sigma_1$ 及 $\Sigma_2$ (记作 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ )就规定

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

对面积的曲面积分的性质:

(1) 设  $c_1, c_2$  为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [c_1 f(x, y, z) + c_2 g(x, y, z)] dS = c_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + c_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS;$$

(2) 若曲面 $\Sigma$ 可分成两片光滑曲面 $\Sigma_1$ 及 $\Sigma_2$ , 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS;$$

(3) 设在曲面 $\Sigma$ 上  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS;$$

(4)  $\iint_{\Sigma} dS = A$ , 其中  $A$  为曲面 $\Sigma$ 的面积.

## 二、对面积的曲面积分的计算

面密度为  $f(x, y, z)$  的物质曲面的质量为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

另一方面, 如果 $\Sigma$ 由方程  $z = z(x, y)$  给出,  $\Sigma$ 在  $xOy$  面上的投影区域为  $D$ , 那么

$$\text{曲面的面积元素为 } dA = \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy,$$

$$\text{质量元素为 } f[x, y, z(x, y)] dA = f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

根据元素法, 曲面的质量为

$$M = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

$$\text{因此 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

化曲面积分为二重积分: 设曲面 $\Sigma$ 由方程  $z = z(x, y)$  给出,  $\Sigma$ 在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$ , 函数  $z = z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上具有连续偏导数, 被积函数  $f(x, y, z)$  在 $\Sigma$ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy.$$

如果积分曲面 $\Sigma$ 的方程为 $y=y(z, x)$ ,  $D_{zx}$ 为 $\Sigma$ 在 $zOx$ 面上的投影区域, 则函数 $f(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + y_z^2(z, x) + y_x^2(z, x)} dz dx.$$

如果积分曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x=x(y, z)$ ,  $D_{yz}$ 为 $\Sigma$ 在 $yOz$ 面上的投影区域, 则函数 $f(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + x_y^2(y, z) + x_z^2(y, z)} dy dz.$$

例 1 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$ , 其中 $\Sigma$ 是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  被平面

$z=h(0 < h < a)$  截出的顶部.

解  $\Sigma$ 的方程为  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$ .

因为  $z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

所以 
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{r dr}{a^2 - r^2} = 2\pi a \left[ -\frac{1}{2} \ln(a^2 - r^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

提示:  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$

例 2 计算  $\oiint_{\Sigma} xyz dS$ , 其中 $\Sigma$ 是由平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  所围成的四面体的整个边界曲面.

解 整个边界曲面 $\Sigma$ 在平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  上的部分依次记为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  及 $\Sigma_4$ , 于是

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} xyz dS &= \iint_{\Sigma_1} xyz dS + \iint_{\Sigma_2} xyz dS + \iint_{\Sigma_3} xyz dS + \iint_{\Sigma_4} xyz dS \\ &= 0 + 0 + 0 + \iint_{\Sigma_4} xyz dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} xy(1-x-y) dx dy \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy = \sqrt{3} \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

提示:  $\Sigma_4: z=1-x-y$ ,

$$dS = \sqrt{1+z'_x{}^2+z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

## §10.5 对坐标的曲面积分

### 一、对坐标的曲面积分的概念与性质

**有向曲面:** 通常我们遇到的曲面都是双侧的. 例如由方程  $z=z(x, y)$  表示的曲面分为上侧与下侧. 设  $\mathbf{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  为面上的法向量, 在曲面的上侧  $\cos\gamma>0$ , 在曲面的下侧  $\cos\gamma<0$ . 闭曲面有内侧与外侧之分.

类似地, 如果曲面的方程为  $y=y(z, x)$ , 则曲面分为左侧与右侧, 在曲面的右侧  $\cos\beta>0$ , 在曲面的左侧  $\cos\beta<0$ . 如果曲面的方程为  $x=x(y, z)$ , 则曲面分为前侧与后侧, 在曲面的前侧  $\cos\alpha>0$ , 在曲面的后侧  $\cos\alpha<0$ .

设  $\Sigma$  是有向曲面. 在  $\Sigma$  上取一小块曲面  $\Delta S$ , 把  $\Delta S$  投影到  $xOy$  面上得一投影区域, 这投影区域的面积记为  $(\Delta\sigma)_{xy}$ . 假定  $\Delta S$  上各点处的法向量与  $z$  轴的夹角  $\gamma$  的余弦  $\cos\gamma$  有相同的符号 (即  $\cos\gamma$  都是正的或都是负的). 我们规定  $\Delta S$  在  $xOy$  面上的投影  $(\Delta S)_{xy}$  为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma > 0 \\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma < 0, \\ 0 & \cos\gamma = 0 \end{cases}$$

其中  $\cos\gamma=0$  也就是  $(\Delta\sigma)_{xy}=0$  的情形. 类似地可以定义  $\Delta S$  在  $yOz$  面及在  $zOx$  面上的投影  $(\Delta S)_{yz}$  及  $(\Delta S)_{zx}$ .

**流向曲面一侧的流量:** 设稳定流动的不可压缩流体的速度场由

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

给出,  $\Sigma$  是速度场中的一片有向曲面, 函数  $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  都在  $\Sigma$  上连续, 求在单位时间内流向  $\Sigma$  指定侧的流体的质量, 即流量  $\Phi$ .

如果流体流过平面上面积为  $A$  的一个闭区域, 且流体在这闭区域上各点处的流速为 (常向量)  $\mathbf{v}$ , 又设  $\mathbf{n}$  为该平面的单位法向量, 那么在单位时间内流过这闭区域的流体组成一个底面积为  $A$ 、斜高为  $|\mathbf{v}|$  的斜柱体.

当  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}) = \theta < \frac{\pi}{2}$  时, 这斜柱体的体积为

$$A|\mathbf{v}|\cos\theta = A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

当  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{\pi}{2}$  时, 显然流体通过闭区域  $A$  的流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量  $\Phi$  为零, 而  $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 故  $\Phi = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ;

当  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}) > \frac{\pi}{2}$  时,  $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ , 这时我们仍把  $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  称为流体通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量, 它表示流体通过闭区域  $A$  实际上流向  $-\mathbf{n}$  所指一侧, 且流向  $-\mathbf{n}$  所指一侧的流量为  $-A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . 因此, 不论  $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}})$

为何值, 流体通过闭区域  $A$  流向  $\mathbf{n}$  所指一侧的流量均为  $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ .

把曲面  $\Sigma$  分成  $n$  小块:  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  ( $\Delta S_i$  同时也代表第  $i$  小块曲面的面积). 在  $\Sigma$  是光滑的和  $\mathbf{v}$  是连续的前提下, 只要  $\Delta S_i$  的直径很小, 我们就可以用  $\Delta S_i$  上任一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  处的流速

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)=P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{i}+Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{j}+R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{k}$$

代替  $\Delta S_i$  上其它各点处的流速, 以该点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  处曲面  $\Sigma$  的单位法向量

$$\mathbf{n}_i=\cos\alpha_i\mathbf{i}+\cos\beta_i\mathbf{j}+\cos\gamma_i\mathbf{k}$$

代替  $\Delta S_i$  上其它各点处的单位法向量. 从而得到通过  $\Delta S_i$  流向指定侧的流量的近似值为

$$\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_i\Delta S_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

于是, 通过  $\Sigma$  流向指定侧的流量

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i] \Delta S_i,\end{aligned}$$

但  $\cos\alpha_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}$ ,  $\cos\beta_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}$ ,  $\cos\gamma_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy}$ ,

因此上式可以写成

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}];$$

令  $\lambda \rightarrow 0$  取上述和的极限, 就得到流量  $\Phi$  的精确值. 这样的极限还会在其它问题中遇到. 抽去它们的具体意义, 就得出下列对坐标的曲面积分的概念.

提示: 把  $\Delta S_i$  看成是一小块平面, 其法线向量为  $\mathbf{n}_i$ , 则通过  $\Delta S_i$  流向指定侧的流量近似地等于一个斜柱体的体积.

此斜柱体的斜高为  $|\mathbf{v}_i|$ , 高为  $|\mathbf{v}_i| \cos(\mathbf{v}_i, \mathbf{n}_i) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i$ , 体积为  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i$ .

因为  $\mathbf{n}_i = \cos\alpha_i \mathbf{i} + \cos\beta_i \mathbf{j} + \cos\gamma_i \mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i = [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i] \Delta S_i,$$

而  $\cos\alpha_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}$ ,  $\cos\beta_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}$ ,  $\cos\gamma_i \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy}$ ,

所以  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \approx P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ .

对于  $\Sigma$  上的一个小块  $\sigma$ , 显然在  $\Delta t$  时间内流过  $\sigma$  的是一个弯曲的柱体. 它的体积近似于以  $\sigma$  为底, 而高为

$$(|V|\Delta t)\cos(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Delta t$$

的柱体的体积:  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S$ , 这里  $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  是  $\sigma$  上的单位法向量,  $\Delta S$  表示  $\sigma$  的面积. 所以单位时间内流向  $\sigma$  指定侧的流体的质量近似于

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Delta S \approx (P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma) \Delta S.$$

如果把曲面  $\Sigma$  分成  $n$  小块  $\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 单位时间内流向  $\Sigma$  指定侧的流体的质量近似于

$$\mu \approx \sum_{i=1}^n \{P(x_i, y_i, z_i) \cos \alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i) \cos \beta_i + R(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i\} \Delta S.$$

按对面积的曲面积分的定义,

$$\mu = \iint_{\Sigma} \{P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma\} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

舍去流体这个具体的物理内容, 我们就抽象出如下对坐标的曲面积分的概念.

**定义** 设 $\Sigma$ 为光滑的有向曲面, 函数 $R(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上有界. 把 $\Sigma$ 任意分成 $n$ 块小曲面 $\Delta S_i$  ( $\Delta S_i$ 同时也代表第 $i$ 小块曲面的面积). 在 $xOy$ 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$ ,  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 是 $\Delta S_i$ 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

总存在, 则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 $\Sigma$ 上对坐标 $x, y$ 的曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ ,

即 
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}.$$

类似地有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}.$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}.$$

其中 $R(x, y, z)$ 叫做被积函数,  $\Sigma$ 叫做积分曲面.

**定义** 设 $\Sigma$ 是空间内一个光滑的曲面,  $\mathbf{n}=(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是其上的单位法向量,  $\mathbf{V}(x, y, z)=(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 是确在 $\Sigma$ 上的向量场. 如果下列各式右端的积分存在, 我们定义

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS,$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

并称 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$ 为 $P$ 在曲面 $\Sigma$ 上对坐标 $y, z$ 的曲面积分,  $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$ 为 $Q$ 在曲面 $\Sigma$ 上对坐标 $z, x$ 的曲面积分,  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 为 $R$ 在曲面 $\Sigma$ 上对坐标 $y, z$ 的曲面积分. 其中 $P, Q, R$ 叫做被积函数,  $\Sigma$ 叫做积分曲面.

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

对坐标的曲面积分的存在性:

对坐标的曲面积分的简记形式:

在应用上出现较多的是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy . \end{aligned}$$

流向 $\Sigma$ 指定侧的流量 $\Phi$ 可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy .$$

一个规定: 如果 $\Sigma$ 是分片光滑的有向曲面, 我们规定函数在 $\Sigma$ 上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑曲面上对坐标的曲面积分之和.

对坐标的曲面积分的性质:

对坐标的曲面积分具有与对坐标的曲线积分类似的一些性质. 例如

(1) 如果把 $\Sigma$ 分成 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iint_{\Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dxdy + \iint_{\Sigma_2} P dydz + Q dzdx + R dxdy . \end{aligned}$$

(2) 设 $\Sigma$ 是有向曲面,  $-\Sigma$ 表示与 $\Sigma$ 取相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{-\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy .$$

这是因为如果 $\mathbf{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是 $\Sigma$ 的单位法向量, 则 $-\Sigma$ 上的单位法向量是

$$\begin{aligned} & -\mathbf{n} = (-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma) . \\ & \iint_{-\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= - \iint_{\Sigma} \{P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\} dS \\ &= - \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \end{aligned}$$

## 二、对坐标的曲面积分的算法

将曲面积分化为二重积分: 设积分曲面 $\Sigma$ 由方程 $z=z(x, y)$ 给出的,  $\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D_{xy}$ , 函数 $z=z(x, y)$ 在 $D_{xy}$ 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy ,$$

其中当 $\Sigma$ 取上侧时, 积分前取“+”; 当 $\Sigma$ 取下侧时, 积分前取“-”.

这是因为, 按对坐标的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}.$$

当 $\Sigma$ 取上侧时,  $\cos \gamma > 0$ , 所以 $(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$ .

又因 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 是 $\Sigma$ 上的一点, 故 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$ . 从而有

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] (\Delta \sigma_i)_{xy}.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上式两端的极限, 就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

同理当 $\Sigma$ 取下侧时, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

因为当 $\Sigma$ 取上侧时,  $\cos \gamma > 0$ ,  $(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$ . 当 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma$ 时,  $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$ . 从而有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] (\Delta \sigma_i)_{xy} = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

同理当 $\Sigma$ 取下侧时, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

这是因为  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \{-z_x, -z_y, 1\}$ ,  $\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ ,

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

类似地, 如果 $\Sigma$ 由  $x=x(y, z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz.$$

如果 $\Sigma$ 由  $y=y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx .$$

**应注意的问题:** 应注意符号的确定.

例 1. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是长方体  $\Omega$  的整个表面的外侧,

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\} .$$

解: 把  $\Omega$  的上下面分别记为  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ ; 前后面分别记为  $\Sigma_3$  和  $\Sigma_4$ ; 左右面分别记为  $\Sigma_5$  和  $\Sigma_6$ .

$\Sigma_1$ :  $z=c$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) 的上侧;

$\Sigma_2$ :  $z=0$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) 的下侧;

$\Sigma_3$ :  $x=a$  ( $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的前侧;

$\Sigma_4$ :  $x=0$  ( $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的后侧;

$\Sigma_5$ :  $y=0$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$ ) 的左侧.

$\Sigma_6$ :  $y=b$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$ ) 的右侧;

除  $\Sigma_3$ 、 $\Sigma_4$  外, 其余四片曲面在  $yOz$  面上的投影为零, 因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma_3} y^2 dy dz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dy dz = \iint_{D_{yz}} a^2 dy dz - \iint_{D_{yz}} 0 dy dz = a^2 bc .$$

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} y^2 dz dx = b^2 ac, \quad \iint_{\Sigma} z^2 dx dy = c^2 ab .$$

于是所求曲面积为  $(a+b+c)abc$ .

例 2 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2+y^2+z^2=1$  外侧在  $x \geq 0, y \geq 0$  的部分.

解 把有向曲面  $\Sigma$  分成以下两部分:

$\Sigma_1$ :  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) 的上侧,

$\Sigma_2$ :  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) 的下侧.

$\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  在  $xOy$  面上的投影区域都是  $D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ .

$$\text{于是 } \iint_{\Sigma} xyz dx dy = \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{2}{15} .$$

### 三、两类曲面积分之间的联系

设积分曲面 $\Sigma$ 由方程 $z=z(x, y)$ 给出的,  $\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D_{xy}$ , 函数 $z=z(x, y)$ 在 $D_{xy}$ 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$ 在 $\Sigma$ 上连续.

如果 $\Sigma$ 取上侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

另一方面, 因上述有向曲面 $\Sigma$ 的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

由此可见, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

如果 $\Sigma$ 取下侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

但这时 $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ , 因此仍有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS,$$

类似地可推得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS, \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \beta dS. \end{aligned}$$

综合起来有

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

其中 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是有向曲面 $\Sigma$ 上点 $(x, y, z)$ 处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可写成如下向量的形式:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{或} \quad \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS,$$

其中 $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ ,  $\mathbf{n}=(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是有向曲面 $\Sigma$ 上点 $(x, y, z)$ 处的单位法向量,  $d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS=(dydz, dzdx, dxdy)$ , 称为有向曲面元,  $A_n$ 为向量 $\mathbf{A}$ 在向量 $\mathbf{n}$ 上的投影.

例3 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是

曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$  介于平面  $z=0$  及  $z=2$  之间的部分的下侧.

解 由两类曲面积分之间的关系, 可得

$$\iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz = \iint_{\Sigma} (z^2+x)\cos\alpha dS = \iint_{\Sigma} (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dx dy.$$

在曲面  $\Sigma$  上,

提示: 曲面上向下的法向量为  $(x, y, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad dS = \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - z dx dy &= \iint_{\Sigma} [(z^2+x)(-x) - z] dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left\{ \left[ \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + x \right] \cdot (-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right\} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left( r^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}r^2 \right) r dr = 8\pi. \end{aligned}$$

解: 由两类曲面积分之间的关系, 可得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - z dx dy &= \iint_{\Sigma} [(z^2+x)\cos\alpha - z\cos\gamma] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left\{ \left[ \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + x \right] \cdot x - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \cdot (-1) \right\} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{x}{4}(x^2+y^2)^2 dx dy + \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left( r^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}r^2 \right) r dr = 8\pi. \end{aligned}$$

提示:  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \frac{x}{4}(x^2+y^2)^2 dx dy = 0.$

复习思考题、作业题:

因材施教, 将根据课堂授课的实际情况布置作业。

下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第 14-17 周	课 次	第 27—34 次
章 节 名 称	第十二章 无穷级数		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	16
教 学 的 目 的 要 求	1. 数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念。 2. 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件。 3. 掌握数项级数收敛性的判别方法。 4. 了解幂级数的收敛域的构造及求法； 5. 掌握利用幂级数的性质求和函数，以及利用和函数求某些数项级数的和。 6. 解函数展开成幂级数的充要条件；2、掌握如何将函数展开成幂级数。 7. 了解幂级数在近似计算中的应用。 8. 思政教育：通过在课堂积极传播数学文化，讲解数学发生发展的过程，帮助学生感受数学的本质，将正确做人做事的道理融入教学中，激励学生自觉将个人理想的追求与国家的发展，民族的复兴结合在一起。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 难 点	重点：级数收敛与发散概念，尤其是级数收敛的必要条件；正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，级数的莱布尼兹判别法，绝对收敛与条件收敛的概念；幂级数收敛域的求法，求和函数；5 个基本初等函数的展开式，将函数展开成幂级数。 难点：用级数收敛性及基本性质判别一些级数收敛性问题；任意项级数收敛性的判别方法；求幂级数的和函数；函数展开成幂级数的间接方法。		
教学步骤及内容： <b>一. 常数项级数的概念</b> 通过实际的例子（学生原有的知识背景：计算圆的面积），抽象内容和具体例子的结合，比较自然地引入级数的基本概念  <b>定义 1</b> 设有数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 为常数项级数，简称常数项级数。  其中 $u_n$ 称为级数的通项（或一般项或第 $n$ 项）； $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 称为级数的部分和（或前 $n$ 项和）； $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列。 由部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性有：  <b>定义 2</b> 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，且极限值为 $s$ ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ ，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限值 $s$ 称为此级数的和，此时			

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

当  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在时, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

当级数收敛时, 其部分和  $S_n$  与级数的和  $S$  近似相等, 它们的差  $S - S_n$  称为级数的余项, 记为

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

例 1 讨论如下几何级数 (又称为等比级数) 的敛散性。

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

解 如果  $|q| \neq 1$ , 则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ , 几何级数收敛;

当  $|q| > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , 几何级数发散;

当  $q = 1$  时,  $S_n = na$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , 几何级数发散;

当  $q = -1$  时, 这时级数成为  $a - a + a - a + a - \cdots$ , 其部分和为

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ a, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

所以此时  $S_n$  的极限不存在, 级数发散。

根据以上的讨论, 可以得到几何级数的敛散性:

当  $|q| < 1$  时, 几何级数收敛, 且其和  $\frac{a}{1 - q}$ ; 当  $|q| \geq 1$  时, 几何级数发散.

例 2 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$  的敛散性.

解: 由于  $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , 所以,  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$

于是级数收敛于和 1.

**例 3** 正整数构成的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$  是发散的。

**例 4** 判定级数  $0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots + 0.000 \cdots 3 + \cdots$  的敛散性。

**例 5** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$  的敛散性。

**解** 该级数的前  $n$  项的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ , 所以级数收敛。

## 二、无穷级数的基本性质

**性质 1** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  分别收敛于  $S$ 、 $W$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛, 且

$$\text{有 } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S \pm W$$

证明: 设  $\sum u_n$ 、 $\sum v_n$  和  $\sum (u_n \pm v_n)$  的部分和分别为  $S_n$ 、 $\sigma_n$  和  $\tau_n$ ,

$$\text{则 } \tau_n = S_n \pm \sigma_n \rightarrow s \pm \sigma \quad (n \rightarrow \infty).$$

从而得到: 两个收敛的级数可以逐项相加和逐项相减。

发散的级数不满足此条性质, 例如

当  $a \neq 0$  时, 级数  $\sum a$  和  $\sum (-a)$  都发散, 但  $\sum [a + (-a)] = 0$ .

**性质 2** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛 (发散),  $k$  为任一常数且  $k \neq 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  也收敛 (发散),

且收敛时有  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 。

证明: 设  $\sum u_n$  和  $\sum ku_n$  的部分和分别为  $S_n$  和  $\sigma_n$ , 则  $\sigma_n = kS_n$ .

$$\text{由 } S_n \rightarrow s, \text{ 得 } \sigma_n = kS_n \rightarrow ks \quad (n \rightarrow \infty)$$

又当  $k \neq 0$  时, 若  $\{S_n\}$  不存在极限, 则  $\{S_{n+k}\}$  也不存在极限.  
即级数的每一项同乘以一个非零常数, 其敛散性不变.

**例 6** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$  的敛散性.

**解** 显然  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 7 \times \frac{1}{2^n}$  而几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 由性质 2 得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n}$  也收敛.

**性质 3** 在级数的前面加上、去掉或改变有限项, 不影响级数的敛散性. 但是级数收敛时, 两级数的和未必相同.

证明: 只需证明“在级数的前面部分去掉或加上有限项, 不会改变级数的敛散性”, 其它情形(即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形)都可以看成在级数的前面部分先去掉有限项, 然后再加上有限项的结果.

将级数  $u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$  的前  $k$  项去掉, 得新级数:

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

设  $\sum u_n$  的部分和为  $S_n$ , 则新级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = S_{n+k} - S_k$$

由于  $S_k$  为常数, 所以  $\{\sigma_n\}$  和  $\{S_{n+k}\}$  同时收敛或同时发散. 同样可以证明在级数的前面加上有限项, 也不会改变级数的敛散性.

**性质 4** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $S$ , 则对其各项间任意添加括号后所得的级数仍收敛, 且其和

不变.

**注意** 当原级数收敛时, 任意括号后所得新级数也收敛, 反之则不然. 如果加括号后的级数收敛, 则原来级数未必收敛.

例如, 将发散级数  $a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$  的相邻两项加括号, 则

$$(a - a) + (a - a) + \cdots + (a - a) + \cdots = 0$$

得到的新级数收敛. 然而, 重新加括号

$$a - (a - a) - (a - a) - \cdots - (a - a) - \cdots = a$$

得到的新级数不收敛.

### 三、级数收敛的必要条件

级数收敛的必要条件: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

证明: 设  $\sum u_n$  的部分和为  $S_n$ , 且  $S_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$ ,

$$\text{则 } u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow s - s = 0 (n \rightarrow \infty)$$

由此可知, 若  $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则级数  $\sum u_n$  必定发散.

它的逆否命题是: **若级数一般项不趋向于零, 该级数发散.** 常用来判断一个级数的发散. 例

如  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是发散的.

例 7、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$  发散,  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

例 8、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n-3^n}$  发散,  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n-3^n} = -1 \neq 0$

## § 12.2 常数项级数的审敛法

一般情况下, 利用定义或级数的性质来判别级数的敛散性是很困难的, 可否有更简单易行的判别方法呢? 由于级数的敛散性可较好地归结为正项级数的敛散性问题, 因而正项级数的敛散性判定就显得十分地重要。

### 一、正项级数及其审敛法

**定义 1** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  中的每一项都是非负的 (即  $u_n \geq 0, n=1,2,\dots$ ), 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为**正项级数**.

对于正项级数, 由于  $u_n \geq 0$ , 因而  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ , 所以正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  必为单调增加数列, 即  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \dots$

如果部分和数列  $\{S_n\}$  有界, 则由数列极限存在准则知道, 单调有界数列必有极限, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 此时正项级数收敛; 反之, 若正项级数收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则数列  $\{S_n\}$  必有界, 由此得到如下定理:

**定理 1** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件是: 它的前  $n$  项部分和数列  $\{s_n\}$  有界.

借助于正项级数收敛的充分必要条件, 我们可建立一系列具有较强实用性的正项级数审敛法.

1、(比较审敛法) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 且  $u_n \leq v_n (n=1,2,\dots)$

则: 1) 如  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  亦收敛; 2) 如  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  亦发散.

**证** (1) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛于  $\sigma$ , 且  $u_n \leq v_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和  $s_n$  满足

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sigma$$

即单调增加的部分和数列  $\{s_n\}$  有上界. 由定理 1 可得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则它的前  $n$  项部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

因  $u_n \leq v_n$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  的前  $n$  项部分和

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \geq u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_n$$

所以当  $n \rightarrow \infty$  时  $\sigma_n \rightarrow +\infty$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

由于级数的每一项同乘以一个非零常数, 以及去掉级数的有限项不改变级数的敛散性, 因而比较审敛法又可表述如下:

**推论 1** 设  $C$  为正数,  $N$  为正整数,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 且

$u_n \leq Cv_n$  ( $n = N, N+1, \cdots$ ), 则:

1) 如  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  亦收敛; 2) 如  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  亦发散.

**例 1** 判定调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的敛散性.

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \cdots$$

$$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是发散的，故有比较判别法知，调和级数发散。

**例 2** 讨论  $p$ -级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性，其中  $p > 0$ 。

**解** (1) 若  $0 < p \leq 1$ ，则  $n^p \leq n$ ，可得  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ；又因调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散，由定理 2 知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

发散。

(2) 若  $p > 1$ ，有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots \\ &\quad \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) + \cdots \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1} + \cdots \\ s_{2^{n-1}} &\leq \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \quad (p > 1, \frac{1}{2^{p-1}} < 1) \end{aligned}$$

即  $s_{2^{n-1}}$  有上界，又对任意  $n$  有  $n \leq 2^{n-1}$ ，所以  $s_n \leq s_{2^{n-1}}$ ，故  $s_n$  有界，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  ( $p > 1$ ) 是收敛的。

综上所述，当  $0 < p \leq 1$  时， $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  是发散的；当  $p > 1$  时， $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  是收敛的。 $p$ -

级数是一个很重要的级数，在解题中往往会充当比较审敛法的比较对象，其它的比较对象主要有几何级数、调和级数等。

**例 3** 判定级数的敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$$

解：因为  $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n} (n=1, 2, \cdots)$ ，故收敛。

**例 4** 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0)$  的敛散性。

解 (1) 当  $a > 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  的通项  $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$ ，而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$  是一个公比为  $\frac{1}{a}$  的等比级数，且  $\frac{1}{a} < 1$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$  收敛，故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  收敛；

(2) 当  $a = 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  的通项  $\frac{1}{1+a^n} = \frac{1}{2}$ ，且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$  发散，故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  发散。

(3) 当  $a < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  的通项  $\frac{1}{1+a^n} > \frac{1}{2}$ ，而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$  发散，故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  发散。

**例 5** 设  $a_n \leq b_n \leq c_n (n=1, 2, \cdots)$ ，且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛，证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛。

证 因  $a_n \leq b_n \leq c_n, n=1, 2, \cdots$ ，可得  $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$ ；而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛，

由级数收敛的性质知  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$  收敛，再由比较审敛法得  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$  收敛。而

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n - a_n) + a_n]$$

故可得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛。

**例 6** 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$  的敛散性。

$$(1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq 2(\frac{\pi}{2n})^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2})$$

**推论 2\*** (比较审敛法的极限形式) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  为两个正项级数, 如果两级数的通项  $u_n, v_n$

满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ , 则

1) 当  $0 < l < +\infty$  时, 同时收敛或同时发散;

2) 当  $l = 0$  时, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;

3) 当  $l = +\infty$  时, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散。

**证** 由极限的定义, 取  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ , 存在着自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有不等式

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \frac{l}{2}$$

成立, 可得  $\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3l}{2}$ , 即  $\frac{l}{2} \cdot v_n < u_n < \frac{3l}{2} \cdot v_n$ ; 再由推论 1 即得结论.

**练习:** 判别级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

的敛散性.

**解** (1) 因  $\frac{n}{n^2 - 2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 2}$  发散;

(2) 因  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  收敛.

**2、极限审敛法** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 则

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = l$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = +\infty$ 。则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散;

(2) 若存在  $p > 1$ , 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n$  存在, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛。

例7 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  的敛散性。(  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$  )。

例8 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$  的敛散性。

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = \ln e = 1$ ，所以级数收敛。

3、比值审敛法（达朗贝尔判别法）

若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，则：

(1) 当  $\rho < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛；

(2) 当  $\rho > 1$  (或  $\rho = +\infty$ ) 时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散；

(3) 当  $\rho = 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的敛散性用此法无法判定。

证 (1) 当  $\rho < 1$  时，则可取一足够小的正数  $\varepsilon$ ，使得  $\rho + \varepsilon = r < 1$ ；又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，据

极限的定义，对正数  $\varepsilon$ ，存在自然数  $N$ ，当  $n > N$  时，使得  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$  成立，即

$$-\varepsilon + \rho < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + \rho$$

则有  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r$ ，可得  $u_{n+1} < r \cdot u_n$  ( $n = N+1, N+2, \dots$ )

即有

$$u_{N+1} < r \cdot u_N$$

$$u_{N+2} < r \cdot u_{N+1} < r^2 \cdot u_N$$

$$u_{N+3} < r \cdot u_{N+2} < r^2 u_{N+1} < r^3 \cdot u_N$$

...

则相加有

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots < r \cdot u_N + r^2 \cdot u_N + r^3 \cdot u_N + \dots$$

因  $0 < r < 1$ , 得级数  $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$  收敛, 再由级数得性质得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 当  $\rho > 1$  时, 存在充分小的正数  $\varepsilon$ , 使得  $\rho - \varepsilon > 1$ , 同上由极限定义, 当  $n > N$  时, 有  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$  即  $u_{n+1} > u_n$ , 因此当  $n > N$  时, 级数  $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$  的一般项是逐渐增大的, 故它不趋向

于零, 由级数收敛的必要条件知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(3) 当  $\rho = 1$  时, 级数可能收敛, 也可能发散. 如对于  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 不论  $p$  取何值, 总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^p} \bigg/ \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

但是, 该级数却在  $p > 1$  时收敛,  $p \leq 1$  时发散.

**例 9** 判定下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n} (c > 0)$$

解: (1) 因  $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$ , 故  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

由比值审敛法知该级数是收敛的.

(2) 因  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ , 故  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

由比值审敛法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  是发散的.

(3) 因  $u_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$ , 故

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

由比值审敛法知该级数是收敛的.

(4) 因  $u_n = \frac{c^n n!}{n^n}$ ,  $u_{n+1} = \frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$  故

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{c}{e}$$

所以 当  $\frac{c}{e} < 1$ , 即  $0 \leq c < e$  时, 级数收敛; 当  $\frac{c}{e} > 1$ , 即  $c > e$  时, 级数发散; 当  $\frac{c}{e} = 1$ , 比值审敛法失效。

练习: 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$$

解: 因  $u_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ , 故  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2n \cdot (2n+1)} = 1$

用比值法无法确定该级数的敛散性; 注意到  $2n > 2n-1 \geq n$ , 可得  $(2n-1) \cdot 2n > n^2$ , 即

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} < \frac{1}{n^2}; \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛, 由比较判别法知级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \text{ 收敛.}$$

#### 4、根值审敛法或柯西审敛法

若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ , 则:

(1) 当  $\rho < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 当  $\rho > 1$  (或  $\rho = +\infty$ ) 时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散;

(3) 当  $\rho = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的敛散性用此法无法判定.

**证** (1) 当  $\rho < 1$  时, 可取一足够小的正数  $\varepsilon$ , 使得  $\rho + \varepsilon = r < 1$ ; 据极限的定义, 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时有  $\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r$

即  $u_n < r^n$ ; 而等比级数  $\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n$  ( $0 < r < 1$ ) 是收敛的, 由比较判别法知  $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$  收敛; 再由级数的性质

得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 当  $\rho > 1$  时, 同理存在充分小的正数  $\varepsilon$ , 使得  $\rho - \varepsilon > 1$ , 据极限定义, 当  $n > N$  时有

$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$ , 即  $u_n > 1$ , 因此级数的一般项不趋向于零, 由级数收敛的必要条件知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(3) 当  $\rho = 1$  时, 级数可能收敛, 也可能发散. 如级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  是收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是发散的,

但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

**例 10** 判定下列级数的敛散性

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$       (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a, b, a_n > 0$

解: (1) 因  $u_n = \frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$ , 则  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0 < 1$

故原级数收敛.

(2) 因  $u_n = \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ , 则  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$ , 所以

当  $\frac{b}{a} < 1$ , 即  $b < a$  时, 原级数收敛; 当  $\frac{b}{a} > 1$ , 即  $b > a$  时, 原级数发散; 当  $\frac{b}{a} = 1$ , 即  $b = a$  时,

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , 从而原级数发散.

练习: 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$  的敛散性.

解 因  $u_n = \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ , 则  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{2} < 1$

故原级数收敛.

**注:** 对于利用比值审敛法与根值审敛法失效的情形(即  $\rho = 1$  时), 其级数的敛散性应另寻它法加以判定, 通常可用构造更精细的比较级数来判别.

## 二. 交错级数及其审敛法

### 1. 定义 2

$$\text{称 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots \quad (u_n > 0)$$

$$\text{或 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^n u_n + \cdots \quad (u_n > 0)$$

为交错级数.

### 2. 定理 2. (莱布尼茨(Leibniz)定理)

如果交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  满足条件:

$$1) \quad u_n \geq u_{n+1} (n=1, 2, \cdots); \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

则级数收敛, 且其和  $s \leq u_1$ , 其余项的绝对值满足:  $|r_n| \leq u_{n+1}$ .

证明: 设级数的部分和为  $S_n$ , 则

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \quad (1)$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \quad (2)$$

由条件 1) 可知: (1)、(2) 两式中括号内两数的差都是非负的, 于是由 (1) 知:  $\{S_{2n}\}$  单调上升, 且  $S_{2n} \geq 0$ ;

$$\text{由 (2) 知: } S_{2n} \leq u_1;$$

根据单调有界数列必有极限可知数列  $\{S_{2n}\}$  存在极限, 记为  $s$ .

且显然  $s \leq u_1$ . 又由于  $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ , 而  $u_{2n+1} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$

所以:  $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \rightarrow s, (n \rightarrow \infty)$ .

由于:  $S_{2n+1} \rightarrow s, S_{2n} \rightarrow s, (n \rightarrow \infty)$ , 所以:  $S_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$ .

即交错级数收敛, 且其和  $s \leq u_1$ .

又由于此时余项:  $r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)$  所以:

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots$$

也是一个交错级数, 且满足交错级数的条件, 从而且和应小于级数的第一项, 即有:  $|r_n| \leq u_{n+1}$ .

**例 11** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  的敛散性.

解: 由于  $u_n = 1/n > 1/(n+1) = u_{n+1}$ , 且  $u_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ , 所以级数收敛.

且知其和  $s < 1$ , 以  $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  代替  $s$  产生的误差  $r_n$  满足  $|r_n| \leq 1/(n+1)$ .

**例 12** 断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$  的敛散性.

解: 级数为交错级数,

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0;$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则有 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

故当  $x \geq 3$  时, 有  $f'(x) \geq 0$ , 从而当  $x \geq 3$  时,  $f(x)$  单调上升, 于是当  $n \geq 3$  时, 有  $u_n = \ln n/n >$

$\ln(n+1)/(n+1) = u_{n+1}$ . 所以该级数收敛.

### 三. 绝对收敛与条件收敛

设有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ , 其中  $u_n$  为任意实数, 那么该级数叫做任意项级数. 可

见, 交错级数是任意项级数的一种特殊形式.

对任意项级数, 我们给每项加上绝对值符号构造一个正项级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots,$$

任意项级数的敛散性判定涉及绝对收敛与条件收敛.

**定义 3** 设有任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛.

例如:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$  是绝对收敛;  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  是条件收敛.

由任意项级数各项的绝对值组成的级数是正项级数, 因此, 一切判别正项级数敛散性的方法, 都可以用来判别任意项级数是否绝对收敛.

**2. 定理 3** 若  $\sum u_n$  绝对收敛, 则  $\sum u_n$  必定收敛.

证明: 设  $\sum u_n$  绝对收敛, 即  $\sum |u_n|$  收敛.

$$\text{记: } W_n = \frac{1}{2} (|u_n| + u_n), \quad V_n = \frac{1}{2} (|u_n| - u_n).$$

显然:  $0 \leq W_n, V_n \leq |u_n|$ ,

由于  $\sum |u_n|$  收敛, 所以正项级数  $\sum W_n$  和  $\sum V_n$  收敛.

因为:  $u_n = W_n - V_n$ , 由级数的性质可知: 级数  $\sum u_n$  收敛.

**注:** 1) 上述定理的逆不成立; 例如:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

2) 对  $\sum u_n$  敛散性的判断, 可以转化为对正项级数  $\sum |u_n|$  的敛散性的判断;

3) 当  $\sum |u_n|$  发散时, 不能断定  $\sum u_n$  发散, 但当用比值法或根值法得到正项级数  $\sum |u_n|$  发散时,

则可断定级数  $\sum u_n$  发散. (此时有  $|u_n| \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ), 从而  $u_n \not\rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$

**例 13** 判断下列级数的敛散性, 并指明是绝对收敛还是条件收敛。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

**解:** (1) 因为  $|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ , 而调和级数 (去掉第一项)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

发散. 而原级数为交错级数, 且满足莱布尼兹定理, 故收敛, 所以条件收敛。

$$(2) \text{ 由于 } |u_n| = \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{(2^n)^n}{n!} = \frac{[(1+1)^n]^n}{n!} > \frac{(1+n)^n}{n!} > \frac{n^n}{n!} > 1 \quad (n > 1)$$

所以,  $|u_n| \not\rightarrow 0$ , 从而,  $u_n \not\rightarrow 0$ . 即原级数发散.

**练习:**

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2^n}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^n \theta$$

**解:** (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e/2 > 1$ ,

所以  $|u_n| \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 从而  $u_n \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 因此原级数发散.

$$(2) \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n+1} = 1/2 < 1,$$

$\therefore \sum |u_n|$  收敛, 从而原级数绝对收敛.

(3) 因为  $\frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散. 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ 且}$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1},$$

所以此交错级数满足收敛条件, 从而原级数为条件收敛.

$$4) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{|\sin \theta|^{n+1}}{|\sin \theta|^n} = |\sin \theta|$$

所以 当  $|\sin \theta| < 1$ , 即  $\theta \neq 2k\pi \pm \pi/2$  时, 级数绝对收敛;

当  $\sin \theta = 1$ , 即  $\theta = 2k\pi + \pi/2$  时, 级数发散;

当  $\sin \theta = -1$ , 即  $\theta = 2k\pi - \pi/2$  时, 级数收敛.

**总结:**

1. 三个重要的级数:

$$(1) p\text{-级数: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p \leq 1 \text{ (发散)} \quad p > 1 \text{ (收敛)}$$

$$(2) \text{几何级数: } \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad |q| \geq 1 \text{ (发散)} \quad |q| < 1 \text{ (收敛)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ 收敛}$$

2. 正项级数的审敛法是:

比较法, 比较法的极限形式, 比值法

2. 交错级数的判定法及绝对收敛, 条件收敛

## § 12.3 幂级数

### 一、函数项数的概念

设有定义在区间  $I$  上的函数列  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

由该函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

称作**函数项级数**. 而

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (2)$$

称为函数项级数 (1) 的**前  $n$  项部分和**.

对于确定的值  $x_0 \in I$ , 如常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (3)$$

收敛, 则称函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在点  $x_0$  收敛, 点  $x_0$  是函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**收敛点**; 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

发散, 则称函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在点  $x_0$  发散, 点  $x_0$  是函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**发散点**. 函数项级数的

全体收敛点的集合称为它的**收敛域**; 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的全体发散点的集合称为它的**发散域**.

设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $D$ , 则对  $D$  内任意一点  $x$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛, 其收敛的和自

然依赖于  $x$ ，即其收敛和应为  $x$  的函数，记为  $s(x)$ ；称函数  $s(x)$  为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**和函数**。

$s(x)$  的定义域就是级数的收敛域，并记为

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

则在收敛域  $D$  上有  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ 。把  $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$  叫做函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**余项**，对收

敛域上的每一点  $x$ ，有  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ 。

从以上的定义可知，函数项级数在区域上的敛散性问题是指出在该区域上的每一点的敛散性，因而其实质还是常数项级数的敛散性问题。因此我们仍可以用数项级数的审敛法来判别函数项级数的敛散性。

## 二、幂级数及其收敛性

### 1、幂级数的定义：

函数项级数中最简单且最常见的一类级数是各项均为幂函数的函数项级数，称其为**幂级数**，它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (3)$$

其中常数  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$  称作**幂级数的系数**。

**注：**幂级数的表示形式也可以是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

它是幂级数的一般形式，作变量代换  $t = x - x_0$  即可以把它化为(3)的形式。因此在以后的讨论中，如不作特殊说明，我们用幂级数(3)作为主要的讨论对象如： $1+x+x^2+\cdots+\cdots+x^n+\cdots$ ， $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$ 都是幂级数。

### 2、幂级数的收敛域与发散域

$x$  取数轴上哪些点时幂级数收敛，取哪些点是幂级数发散？这就是幂级数的收敛性问题。

例 1. 考察幂级数  $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

解：当  $|x| < 1$  时，这级数收敛于和  $\frac{1}{1-x}$ ；

当  $|x| \geq 1$  时，这级数发散。

因此，这幂级数的收敛区域是开区间  $(-1, 1)$ ，发散域是  $(-\infty, -1)$  及  $[1, +\infty]$ 。

如果  $x$  在区间  $(-1, 1)$  内取值，则  $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

在这个例中这个幂级数的收敛域是一个区间,

事实上,对于一般的幂级数如下定理:

**定理 1(阿贝尔定理):**

如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x=x_0 (x_0 \neq 0)$  时收敛, 则适合不等式  $|x| < |x_0|$  的一切  $x$ , 这幂级数收敛且绝对

收敛, 反之. 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  当  $x=x_0$  时发散, 则适合不等式  $|x| > |x_0|$  的一切  $x$  这幂级数发散.

证明: 设  $x_0$  是幂级数 (3) 的收敛点, 即级数  $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$  收敛.

根据级数收敛的必要条件, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ , 于是存在一个常数  $M$ , 使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

这样级数 (3) 的一般项的绝对值

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

因为当  $|x| < |x_0|$  时, 等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  收敛 (公比  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ),

所以级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  收敛, 即级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛.

**定理的第二部分可用反证法证明:**

倘若幂级 (3) 当  $x=x_0$  时发散, 而有一点  $x_1$  适合  $|x_1| > |x_0|$  使级数收敛, 则级数当  $x=x_0$  时应收敛, 这与假设矛盾, 定理得证.

阿贝尔定理很好地揭示了幂级数的收敛域与发散域的结构: 定理 1 的结论表明, 如果幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0 \neq 0$  处收敛, 则可断定在开区间  $(-|x_0|, |x_0|)$  之内的任何  $x$ , 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  必收敛;

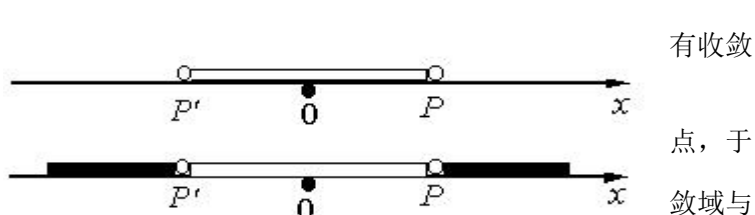
如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0 \neq 0$  处发散, 则可断定在闭区间  $[-|x_0|, |x_0|]$  之外的任何  $x$ , 幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  必发散. 至此断定幂级数的发散点不可能位于原点与收敛点之间 (因原点必是幂级数的收敛

点).

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在数轴上既

有收敛点 (且不仅仅只是原点), 也有发散点, 于是, 我们可以这样来寻找幂级数的收



发散域. 首先从原点出发, 沿数轴向右搜寻, 最初只遇到收敛点, 然后就只遇到发散点, 设这两部分的界点为  $P$ , 而点  $P$  则可能是收敛点, 也可能是发散点. 再从原点出发, 沿数轴向左方搜寻, 相仿也可找到另一个收敛域与发散域的分界点  $P'$ ; 位于点  $P'$  与  $P$  之间的区域就是幂级数的收敛域, 位于这两点之外的区域就是幂级数的发散域, 且两个分界点关于原点对称 (图 7-4-1). 至此我们可得到如下重要推论:

**推论 1** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  不是仅在某一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必存在一个确

定的正数  $R$  存在, 使得

(1) 当  $|x| < R$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛;

(2) 当  $|x| > R$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  发散;

(3) 当  $x = \pm R$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可能收敛, 也可能发散.

我们把此正数  $R$  称作幂级数的**收敛半径**.  $(-R, R)$  称为幂级数的**收敛区间**. 若幂级数的收敛域为  $D$ , 则

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$$

即幂级数的收敛域是收敛区间与收敛端点的并集.

特别地, 如果幂级数只在  $x = 0$  处收敛, 则规定收敛半径  $R = 0$ , 此时的收敛域为只有一个点  $x = 0$ ; 如果幂级数对一切  $x$  都收敛, 则规定收敛半径  $R = +\infty$ , 此时的收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

### 3、幂级数的收敛半径求法

**定理 2:** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  系数满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 则幂级数的收敛半径:

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

证明: 考察幂级数 (3) 的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots \quad (5)$$

这级数相邻两项之比为：
$$\frac{|\alpha_{n+1}x^{n+1}|}{|\alpha_nx^n|} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot |x|.$$

1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \rho$  ( $\rho \neq 0$ ) 存在, 根据比值审敛法, 则:

当  $\rho|x| < 1$  即  $|x| < \frac{1}{\rho}$  时, 级数(5)收敛, 从而级数(3)绝对收敛;

当  $\rho|x| > 1$  即  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时, 级数(4)发散, 并且从某一个  $n$  开始  $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_nx^n|$ , 因此一般项

$$|a_nx^n| \not\rightarrow 0$$

所以  $a_nx^n \not\rightarrow 0$ , 从而级数(3)发散, 于是收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$ .

2) 如果  $\rho = 0$ , 则对任何  $x \neq 0$ , 有  $\frac{|\alpha_{n+1}x^{n+1}|}{|\alpha_nx^n|} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 所以级数(5)收敛, 从而级数绝对收敛,

于是  $R = +\infty$ .

3) 如果  $\rho = +\infty$ , 则对于除  $x=0$  外的一切  $x$  值, 级数(3)必发散, 否则由定理 1 知道将有点  $x \neq 0$  使级数(5)收敛, 于是  $R=0$ .

**定理 3.** 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , 则幂级数的收敛半径:

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

例 2. 求幂级数  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$  的收敛域。

解: 因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , 所以收敛半径  $R = \frac{1}{\rho} = 1$ .

对于端点  $x=1$ , 级数成为交错级数  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ , 收敛; 对于端点  $x=-1$ , 级数成为  $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$ , 发散;

因此, 收敛域是  $(-1, 1]$ 。

例 3. 求幂级数  $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\dots$  的收敛区间。

解: 因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ,

所以收敛半径  $R = \infty$ , 从而收敛区间是  $(-\infty, +\infty)$ .

例 4. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  的收敛半径 (记号  $0! = 1$ ).

解: 因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$ ,

所以收敛半径  $R = 0$ , 即级数仅在  $x = 0$  处收敛.

例 5 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$  的收敛半径.

解: 因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} = 1$ , 故  $R = 1$ , 收敛区间为  $(-1, 1)$ .

当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ , 收敛; 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ , 收敛且为绝对收敛。综

上所述, 原幂级数的收敛域为  $[-1, 1]$ 。

例 6 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2n}$  的收敛域。

解: 令  $t = x + 1$ , 于是, 原级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n}$ , 由于  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ,  $R = 1$ 。

当  $t = -1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$  为交错级数, 收敛; 当  $t = 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  发散。

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n}$  的收敛域为  $[-1, 1)$ , 原级数的收敛域为  $[-2, 0)$ 。

例 7 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$  的收敛域。

解: 级数缺偶次幂的项, 定理 2 不能直接应用, 根据比值审敛法来求收敛半径:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)-1}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} |x|^2 = \frac{1}{4} |x|^2, \text{ 于是}$$

当  $\frac{1}{4} |x|^2 < 1$ , 即  $|x| < 2$ , 原级数收敛且为绝对收敛; 当  $\frac{1}{4} |x|^2 > 1$ , 即  $|x| > 2$ , 原级数发散, 故原

级数收敛半径为  $R=2$ 。当  $x=\pm 2$  时, 原级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pm 2}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{2n-1}, \text{ 级数发散。}$$

综上, 原级数的收敛域为  $(-2, 2)$ 。

**练习: 1、** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛区间及收敛域。

解: 级数缺奇次幂的项, 定理 2 不能直接应用,  
根据比值审敛法来求收敛半径:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)} : \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n} \right| = 4|x|^2.$$

当  $4|x|^2 < 1$  即  $|x| < \frac{1}{2}$  时级数收敛; 当  $4|x|^2 > 1$  即  $|x| > \frac{1}{2}$  时级数发散,

所以收敛半径  $R = \frac{1}{2}$ 。

2、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$  的收敛区间。

解: 令  $t=x-1$ , 则级数变为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n}$ 。

因为  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n}{2^{n+1} (n+1)} = \frac{1}{2}$ , 所以收敛半径  $R=2$ 。

当  $t=2$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  这级数发散; 当  $t=-2$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , 这级数收敛,

因此收敛区间为:  $-2 \leq t < 2$ , 即  $-2 \leq x-1 < 2$ , 或  $-1 \leq x < 3$ ,

所以原级数的收敛区间为  $[-1, 3)$ 。

3、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$  的收敛区间。

解: 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \right] = e$ , 因此  $R=1/e$ 。

当  $|x|=1/e$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n = e^{-1/2} \rightarrow 0$

因此级数的收敛区间为  $(-1/e, 1/e)$ 。

### 三、幂级数的运算

1. 设幂级数:  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

及  $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$   
 分别在区间  $(-R, R)$  及  $(-R', R')$  内收敛,  
 对于这两个幂级数, 可以进行下列四则运算:

**加法:**  $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$   
 $= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots.$

**减法:**  $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$   
 $= (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots.$

根据收敛级数的基本性质, 上面两式在  $(-R, R)$  与  $(-R', R')$  中较小的区间内成立.

**乘法:**  $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$   
 $= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_0b_2+a_2b_0)x^2+$   
 $\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n+\cdots$

这是两个幂级数的柯西乘积, 可以证明上式在  $(-R, R)$  与  $(-R', R')$  中较小的区间内成立.

**除法:** 
$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots}$$
  
 $= c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$

假设  $b_0 \neq 0$ . 为了决定系数  $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ , 可以将级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ 相乘,}$$

并令乘积中各项系数分别等于级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$  中同次幂的系数, 即得:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0, \\ a_1 &= b_1c_0+b_0c_1, \\ a_2 &= b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

由这些方程就可以顺序地求出  $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ .

相除后所得幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  的收敛区间可能比原来两级数收敛区间小.

**2. 幂级数的和函数性质:**

**性质 1:** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$  的收敛半径为  $R(R>0)$ , 则其和函数  $s(x)$  在区间  $(-R, R)$  内连续; 如果幂

级数在  $x=R$  (或  $x=-R$ ) 也收敛, 则和函数  $s(x)$  在  $x=R$  处左连续 (或在  $x=-R$  处有连续).

**性质 2:** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内是可导的, 且有逐项求导公式:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}$$

其中  $|x| < R$ , 逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

**性质 3:** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内是可积的, 且有逐项积分公式:

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

其中  $|x| < R$ , 逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

**例 8** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  的和函数及数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  的和.

**解** 由例 2 (1) 的结果知, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  的收敛域为  $(-1, 1]$ , 设其和函数为  $s(x)$ , 即

$$s(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

则由逐项可导性, 得

$$\begin{aligned} s'(x) &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

两边积分, 即得幂级数得和函数为

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$$

再令和函数中的  $x = 1$ , 可得到数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  的和为  $\ln 2$ .

**例 9** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的收敛区间及和函数.

**解** (1) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$ , 得到收敛半径  $R = 1$ .

当  $x = 1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} n$ , 一般项不趋于 0, 因此它发散;

当  $x = -1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ , 一般项不趋于 0, 它也发散;

所以幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的收敛区间为  $(-1, 1)$ .

(2) 用传统方法求和函数

设和函数为:  $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$

两边由 0 到  $x$  积分, 得

$$\int_0^x S(x) dx = x + x^2 + x^3 \dots + x^n + \dots$$

$$= x(1 + x + \dots + x^{n-1} + \dots)$$

$$= x(1 + \int_0^x S(x) dx.)$$

因此, 
$$\int_0^x S(x) dx = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1.$$

对两边求导, 得

$$S(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x S(t) dt = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以幂级数的和函数为  $\frac{1}{(1-x)^2}$ .

例 10 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的和函数.

解: 此级数的收敛区间为  $(-1, 1)$ .

设和函数为 
$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad \text{则有 } s(0) = 1,$$

从而: 
$$xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

于是 
$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < 1.$$

所以: 
$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$$

从而: 
$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & 0 < |x| < 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

练习：求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  的和.

解：设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$  的和函数为  $s(x)$ .

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = 1/3$ , 所以此级数的收敛半径为:  $R=3$ .

当  $|x|=3$  时, 级数发散, 因此级数的收敛区间为  $(-3, 3)$ .

于是 
$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{x}{3-x} \quad (|x| < 3)$$

从而 
$$[s(x)]' = \left(\frac{x}{3-x}\right)' = \frac{3}{(3-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{3^n}.$$

令  $x=1$ , 得: 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

## § 12.4 函数展开成幂级数

### 一、泰勒级数

前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质. 但在许多应用中, 我们遇到的却是相反的问题: 给定函数  $f(x)$ , 要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”, 也就是说, 是否能找到一个幂级数, 它在某区间内收敛, 且其和恰好就是给定的函数  $f(x)$ , 如果能找到这样的幂级数, 我们就说, 函数在**该区间内能展开成幂级数**, 而这个幂级数在该区间内就表达函数  $f(x)$ .

#### 1、泰勒公式

如果  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有直到  $n+1$  的导数. 则对此邻域内任一  $x$  有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

上式称为  $f(x)$  的  $n$  阶泰勒展开式或泰勒公式, 利用泰勒公式, 我们可以用一个关于  $(x-x_0)$  的  $n$  次多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(也称为泰勒多项式)来近似的表达函数  $f(x)$ , 并可通过余项

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{估计误差.}$$

在泰勒公式中, 当  $x_0 = 0$  时, 记  $\xi = \theta x$ ,  $0 < \theta < 1$ , 此时公式成为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

称为  $f(x)$  的麦克劳林公式, 或称为按  $x$  的幂展开的泰勒公式.

## 2、泰勒级数

如果  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内具有各阶导数  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(x)$ ,  $\dots$ , 我们称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

为  $f(x)$  在  $x = x_0$  的**泰勒级数**. 特别当  $x_0 = 0$  时, 则称它为  $f(x)$  的麦克劳林级数. 即

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

泰勒级数是泰勒多项式从有限项到无限项的推广, 于是, 带来了两个问题: 一个是该级数在什么条件下收敛, 二是该级数是否收敛于函数  $f(x)$ , 关于这些问题, 有下述定理.

**定理** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内具有各阶导数, 则  $f(x)$  在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是  $f(x)$  的泰勒公式中的余项  $R_n(x)$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限为零. 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

**证 (必要性)** 设  $f(x)$  在  $x_0$  某邻域  $U(x_0)$  内能展开成泰勒级数, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad \text{同时把 } f(x) \text{ 的 } n$$

阶泰勒公式 (1) 可以写成:

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x) \quad (3)$$

其中  $S_{n+1}(x)$  为泰勒级数 (2) 的前  $n+1$  项之和, 因上式成立, 故有

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = f(x)$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_{n+1}(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

充分性: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 对所有的  $x \in U(x_0)$  都成立, 由

$S_{n+1}(x) = f(x) - R_n(x)$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x)$$

即  $f(x)$  的  $n$  阶泰勒级数在  $x_0$  的某领域  $U(x_0)$  内收敛, 且收敛于函数  $f(x)$ 。证毕。

特别地, 当  $x_0 = 0$  时

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

称为函数  $f(x)$  可展开成麦克劳林级数。

显然, 将函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处展开成泰勒级数, 可通过变量替换  $t = x - x_0$ , 化归为函数  $f(x) = f(t + x_0) = F(t)$  在  $t = 0$  处的麦克劳林展开. 因此, 我们将着重讨论函数的麦克劳林展开。

**定理 2** 函数  $f(x)$  的麦克劳林展开式是唯一的。

**证** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域  $(-R, R)$  内可展开成  $x$  的麦克劳林级数, 即

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

其中  $a_n$  是常数,  $n = 1, 2, \dots$ ; 由幂级数的逐项求导性, 得

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2x + \cdots + n \cdot a_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 a_n + (n+1) \cdot n \cdot \cdots \cdot 2 a_{n+1}x + \cdots$$

$\vdots$

把  $x = 0$  代入上述等式, 即有

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n, \quad \dots$$

从而

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

则函数  $f(x)$  在  $x=0$  处的幂级数展开式为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

它就是函数的麦克劳林展开式. 即函数在  $x=0$  处的幂级数展开式仅麦克劳林展开式这一种.

## 二、函数展开成幂级数的方法

### 1、直接展开法

由以上讨论结果可以看出, 直接按公式将所给函数  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数的步骤是:

- (1) 求出  $f(x)$  各阶导数  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ , 如果在  $x_0$  (主要讨论  $x_0=0$  的情形) 处某阶导数不存在, 就停止进行;
- (2) 求函数及各阶导数在  $x_0$  处的值

$$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots;$$

- (3) 求出幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad \text{的收敛半径}$$

$R$ ;

- (4) 考察当  $x$  在收敛区间  $(-R, R)$  内时余项  $R_n(x)$  的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

是否为零, 如果为零, 则第三步求出的幂级数就是函数  $f(x)$  的幂级数展开式; 如果不为零,

幂级数虽然收敛, 但它的和并不是所给的函数  $f(x)$ .

**例 1** 将函数  $f(x) = e^x$  展开成  $x$  的幂级数

解 求出各阶导数

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots$$

于是  $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$

故得级数  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

它的收敛半径为  $R = +\infty$

对于任何有限数  $x, \xi$  ( $\xi$  在  $0$  与  $x$  之间) 余项的绝对值为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

因为  $e^{|x|}$  有限, 而  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  是收敛级数的一般项, 所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \rightarrow 0 \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

所以得展开式  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$

**例 2** 将函数  $f(x) = \sin x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 求出各阶导数

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \dots$$

于是,  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \dots$ , 顺序循环得这几个数:  $0, 1, 0, -1,$

于是得级数

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

它的收敛半径  $R = +\infty$ 。

对于任何有限数  $x, \xi$  ( $\xi$  在  $0$  与  $x$  之间) 余项的绝对值, 当  $n \rightarrow \infty$  时极限为零

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

于是得展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

用同样的方法可证得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

## 2 间接展开法

以上两个例子是用直接方法（直接按公式  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  计算幂级数的系数）展开成幂级数的，

这种直接方法计算量较大，而且最后要考察余项  $R_n$  是否收敛于零，这是一件很不容易的事情。下面，

我们利用幂级数本身的性质，如四则运算，逐项微分，逐项积分等，把函数  $f(x)$  展开成为  $x$  的幂级数，这样计算简单，而且往往可以避免直接研究余项，根据函数展开的唯一性，可知这与直接方法所得的结果一样。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

如把它逐项微分，就得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

**例 3** 将函数  $f(x) = \ln(1+x)$  展开成  $x$  的幂级数。

解 因为  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ，而  $\frac{1}{1+x}$  是收敛的几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  ( $-1 < x < 1$ ) 的和函数，即

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

所以将上式从 0 到  $x$  逐项积分，得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

此展开式对于  $x=1$  也是正确的，于是有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

**例 4** 将函数  $f(x) = (1+x)^m$  展开成  $x$  的幂级数，其中  $m$  为任意常数。

解:  $f(x)$  的各阶导数为

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

.....,

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

.....,

所以  $f(0)=1, f'(0)=m, f''(0)=m(m-1), \dots, f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \dots$  于是得幂级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

可以证明

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1)$$

为了便于记忆和查阅, 现将几个重要函数的  $x$  幂级数展开式归纳如下:

$$(1) e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

最后, 再举一个将函数展开成  $(x-x_0)$  的幂级数的例子

例 5 将函数  $f(x)=\sin x$  展开成  $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$  的幂级数

解 因为  $\sin x = \sin \left[ \frac{\pi}{4} + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

用公式表中 (2)、(3) 得

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{3!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

两式相加, 就有

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \dots \right] \quad (-\infty < x < +\infty)$$

**例 6** 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展开成  $(x-1)$  的幂级数, 并求  $f^n(1)$ 。

**解** 方法一: 因所求的幂级数具有  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$  的形式, 故可如下运算

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - [-(x-1)]} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 - [-(x-1)]} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left[-\frac{(x-1)}{2}\right]} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \left[-\frac{(x-1)}{4}\right]} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{(x-1)}{2} \right]^n - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{(x-1)}{4} \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right] \cdot (x-1)^n, \quad -1 < x < 3 \end{aligned}$$

此式即为  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  的关于  $(x-1)$  的幂级数展开式.

方法二: 作变量替换  $t = x-1$ , 则  $x = t+1$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{(t+4)(t+2)} \\ &= \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{2(t+4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4(1+\frac{t}{2})} - \frac{1}{8(1+\frac{t}{4})}$$

因

$$\frac{1}{4(1+\frac{t}{2})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n, \quad -1 < \frac{t}{2} < 1$$

$$\frac{1}{8(1+\frac{t}{4})} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{4}\right)^n, \quad -1 < \frac{t}{4} < 1$$

于是将  $t = x - 1$  代回即得  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  的关于  $(x-1)$  的幂级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{4}\right)^n, \quad -2 < t < 2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right] \cdot (x-1)^n, \quad -1 < x < 3 \end{aligned}$$

根据麦克劳林展开式的系数公式得

$$\frac{f^n(1)}{n!} = (-1)^n \left[ \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right]$$

即

$$f^n(1) = n! \cdot (-1)^n \left[ \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right]$$

练习 1、将函数  $f(x) = 4^{x+1}$  展开成  $x$  的幂级数.

**解** 因  $4^{x+1} = 4 \cdot e^{x \ln 4}$ , 利用  $e^x$  的展开式得

$$4^{x+1} = 4 \cdot \left[ 1 + \frac{(x \ln 4)}{1!} + \frac{(x \ln 4)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln 4)^n}{n!} + \dots \right]$$

$$= 4 + 8 \ln 2 \cdot x + \frac{2^4 (\ln 2)^2}{2!} x^2 + \dots + \frac{2^{n+2} (\ln 2)^n}{n!} x^n + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad \mathbf{2、将函数}$$

$f(x) = \arctan x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 因  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , 而  $\frac{1}{1+x^2}$  可展开式为

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^n + \cdots \quad x \in (-1,1)$$

两边从 0 到  $x$  逐项积分得

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad x \in (-1,1)$$

因为当  $x=1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$  是收敛的, 当  $x=-1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$  是发散的, 所以  $\arctan x$

在  $x \in (-1,1]$  上的幂级数展开式为

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

### 三、函数的幂级数展开式的应用

#### 1、近似计算

例 9.38 求  $e$  的近似值, 要求误差不超过  $10^{-4}$ 。(2.7183)

例 9.39 计算  $\cos 10^0$  的近似值, 要求误差不超过  $10^{-4}$ 。(0.9511)

例 9.40 计算  $\ln 2$  的近似值, 要求误差不超过  $10^{-4}$ 。

解: 由前面, 令  $x=1$  可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

如果取这级数前  $n$  项和作为  $\ln 2$  的近似值, 其误差为  $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$ 。

为了保证误差不超过  $10^{-4}$ , 就需要取级数的前 10000 项进行计算. 这样做计算量太大了, 我们必需用收敛较快的级数来代替它.

把展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

中的  $x$  换成  $-x$ , 得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (1 \geq x > -1),$$

两式相减, 得到不含有偶次幂的展开式:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots) \quad (-1 < x < 1).$$

令  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , 解出  $x = \frac{1}{3}$ . 以  $x = \frac{1}{3}$  代入最后一个展开式, 得

$$\ln 2 = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \cdots).$$

如果取前四项作为  $\ln 2$  的近似值, 则误差为

$$\begin{aligned} |r_4| &= 2(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \cdots) < \frac{2}{3^{11}} [1 + \frac{1}{9} + (\frac{1}{9})^2 + \cdots] \\ &= \frac{2}{3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4 \cdot 3^9} < \frac{1}{700000}. \end{aligned}$$

于是取  $\ln 2 \approx 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7})$ .

同样地, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{3} \approx 0.33333, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \approx 0.01235, \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} \approx 0.00082, \quad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \approx 0.00007.$$

因此得  $\ln 2 \approx 0.6931$ .

**例 9.41** 1、 计算定积分  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$  的近似值, 要求误差不超过 0.0001 (取  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$ ).

2、 计算积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  的近似值, 要求误差不超过 0.0001.

解: 1、 将  $e^x$  的幂级数展开式中的  $x$  换成  $-x^2$ , 得到被积函数的幂级数展开式

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

于是, 根据幂级数在收敛区间内逐项可积, 得

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}] dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots). \end{aligned}$$

前四项的和作为近似值, 其误差为

$$|r_4| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 4!} < \frac{1}{90000},$$

所以  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!}) \approx 0.5205$ .

2、 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 因此所给积分不是反常积分. 如果定义被积函数在  $x=0$  处的值为 1, 则它

在积分区间 $[0, 1]$ 上连续.

展开被积函数, 有  $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots (-\infty < x < +\infty)$ .

在区间 $[0, 1]$ 上逐项积分, 得  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$ .

因为第四项  $\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{30000}$ ,

所以取前三项的和作为积分的近似值:  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.9461$ .

## 2、欧拉公式

复数项级数: 设有复数项级数

$$(u_1 + i v_1) + (u_2 + i v_2) + \dots + (u_n + i v_n) + \dots$$

其中  $u_n, v_n (n=1, 2, 3, \dots)$  为实常数或实函数. 如果实部所成的级数

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

收敛于和  $u$ , 并且虚部所成的级数  $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$

收敛于和  $v$ , 就说复数项级数收敛且和为  $u + i v$ .

绝对收敛: 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + i v_n)$  的各项的模所构成的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + i v_n)$

绝对收敛.

复变量指数函数: 考察复数项级数  $1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$ .

可以证明此级数在复平面上是绝对收敛的, 在  $x$  轴上它表示指数函数  $e^x$ , 在复平面上我们用它来定义复变量指数函数, 记为  $e^z$ . 即

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots$$

欧拉公式: 当  $x=0$  时,  $z=iy$ , 于是

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{1}{2!} (iy)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (iy)^n + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{1}{2!} y^2 - i \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{4!} y^4 + i \frac{1}{5!} y^5 - \dots \\ &= (1 - \frac{1}{2!} y^2 + \frac{1}{4!} y^4 - \dots) + i(y - \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{5!} y^5 - \dots) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

把  $y$  定成  $x$  得  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 这就是欧拉公式.

复数的指数形式: 复数  $z$  可以表示为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta},$$

其中  $r = |z|$  是  $z$  的模,  $\theta = \arg z$  是  $z$  的辐角.

三角函数与复变量指数函数之间的联系:

因为  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , 所以

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

这两个式子也叫做欧拉公式.

复变量指数函数的性质:  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ .

特殊地, 有  $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

复习思考题、作业题:

设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 能否推得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛? 反之是否成立?

由正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 可以推得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

收敛. 反之不成立.

幂级数逐项求导后, 收敛半径不变, 那么它的收敛域是否也不变?

不一定

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n},$$

它们的收敛半径都是 1, 但它们的收敛域各是  $[-1,1]$ ,  $[-1,1)$ ,  $(-1,1)$

下次课预习要点

教 学  
后 记