信息工程系

教

案

课程名称：<u>　　工科数学　　　　　</u>

教　　师：<u>　　陈旭东　　　　　</u>

总 学 时 ：<u>　　32　　　　　　</u>

理论学时：<u>　　　　　　　　　　</u>

实训学时：<u>　　　　　　　　　　</u>

上课班级：<u>数学媒体技术 251、(3+证书)251</u>

授课学期：<u>　2025－2026 第 1 学期　</u>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 1 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 1 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">第一章、初等函数
1.1、一次函数和反比例函数</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>1</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">理解一次函数和反比例函数。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">画图。
反比例函数：$S=xy$ 不变。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第一章、初等函数

1.1、一次函数和反比例函数

教学目的：理解一次函数和反比例函数。

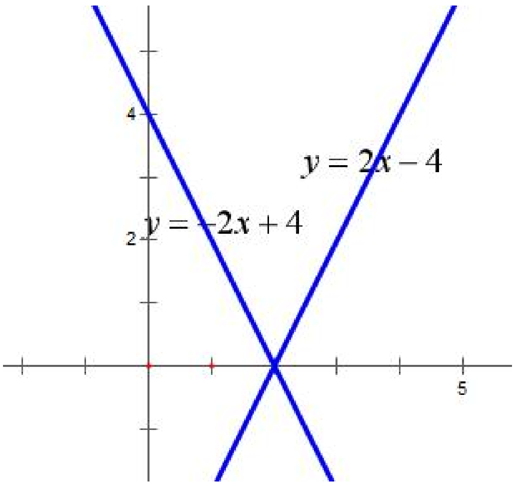
教学重点：画图。

教学难点：反比例函数：$S=xy$ 不变。

1、$k>0$ 时 y 随着 x 的增加而增加，

$k<0$ 时 y 随着 x 的增加而减少。

2、画 $y=2x-4$ 和 $y=-2x+4$ 的图像。



3、 $y=kx+b$ 过点(1，3)和(3，7)，求该一次函数。

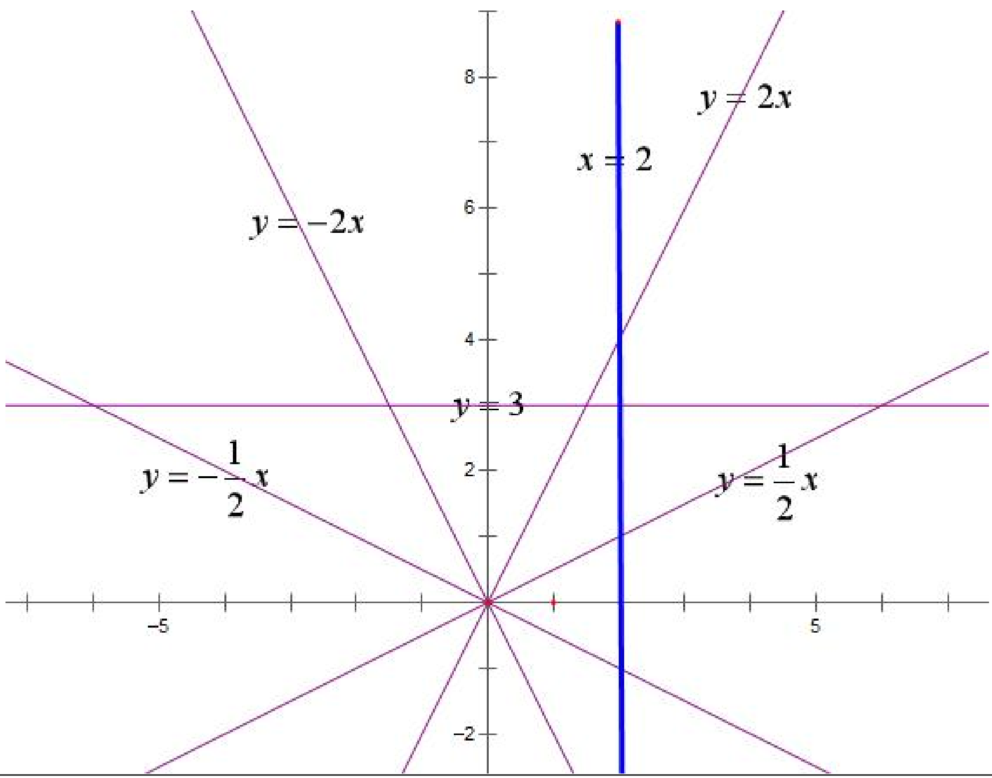
解：$\begin{cases}3=k+b\\7=3k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\k=2\end{cases}\Rightarrow y=2x+1$

4、画图。

(1)、 $y=2x$ 　　　　(2)、 $y=\frac{1}{2}x$

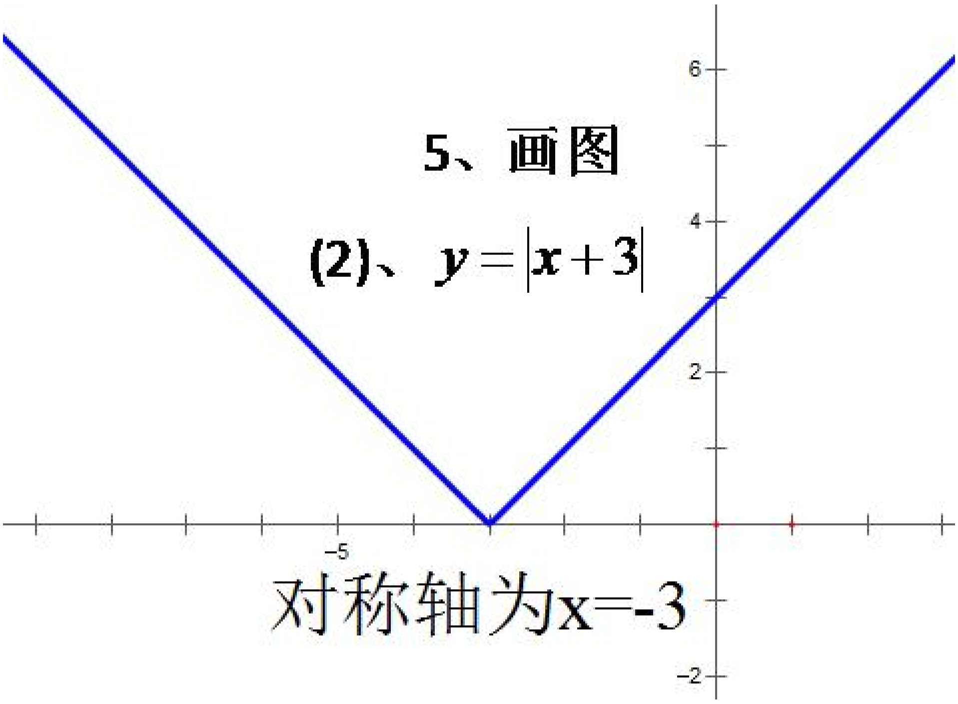
(3)、 $y=-2x$ 　　　　(4)、 $y=-\frac{1}{2}x$

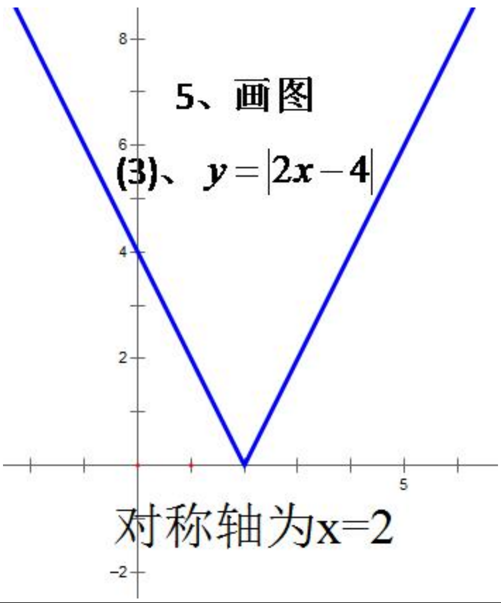
(5)、 $x=2$ 　　　　(6)、 $y=3$



5、画图

(1)、 $y=|x-2|$ (2)、 $y=|x+3|$ (3)、 $y=|2x-4|$





二、反比例函数：$y=\frac{k}{x}$ 1、$k>0$ 时 y 随着 x 的增加而减少， $k<0$ 时 y 随着 x 的增加而增加。 2、注意图像关于原点对称。 3、已知函数 $y=y_1+y_2$，其中 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 $x-2$ 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=3$ 时，$y=5$，求此函数的解析式。 解：y_1 与 x 成正比例，设比例系数为 k_1，则有 $y_1=k_1x$；y_2 与 $x-2$ 成反比例，设比例系数为 k_2，则有 $y_2=\frac{k_2}{x-2}$，故 $y=y_1+y_2=k_1x+\frac{k_2}{x-2}$， 当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=3$ 时，$y=5$，则 $\begin{cases}-1=k_1\times 1+\frac{k_2}{1-2}\\ 5=k_1\times 3+\frac{k_2}{3-2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1\\ k_2=2\end{cases}$，所以 $y=x+\frac{2}{x-2}$。
复习思考题、作业题：$y=kx+b$ 过点(2，4)和(3，8)，求该一次函数。
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 2 周	课 次	第 2 次	
章 节 名 称	1.2、二次函数的基本性质			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学时数	1
教 学 目 的 要 求	理解二次函数的概念。			
教 学 方 法	讲解法、讨论法			
教 学 重 点 难 点	重点：画图。 难点：求解二次不等式。			

教学步骤及内容：

1.2、二次函数的基本性质

二次函数：$y=ax^2+bx+c$，$(a\neq 0)$

教学目的：理解二次函数的概念。

教学重点：画图。

教学难点：求解二次不等式。

1、二次函数一定要讨论对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$。

2、跟 x 轴的交点就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解。

3、韦达定理 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

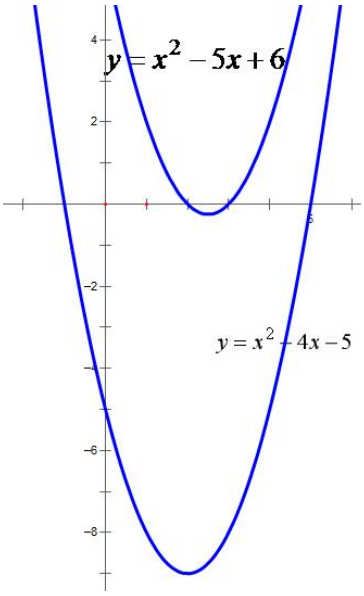
4、画图，求出 y 的取值范围。

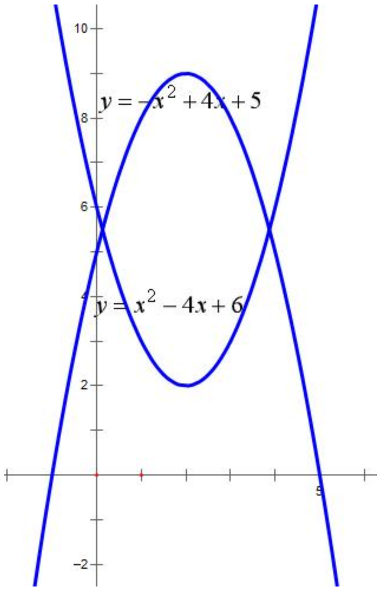
(1)、$y=x^2-4x-5$　　(2)、$y=x^2-5x+6$

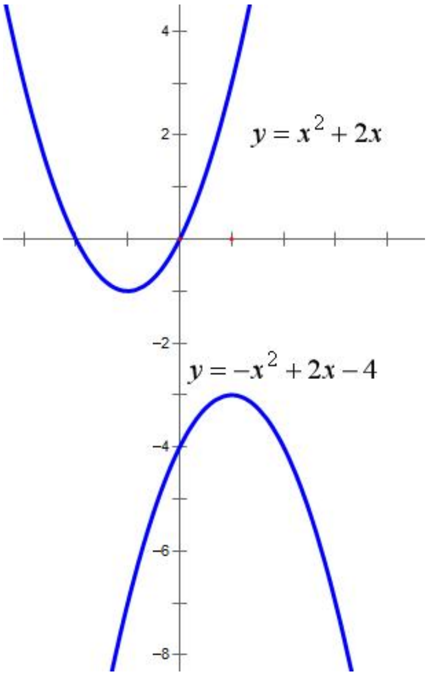
(3)、$y=x^2-4x+6$　　(4)、$y=-x^2+4x+5$

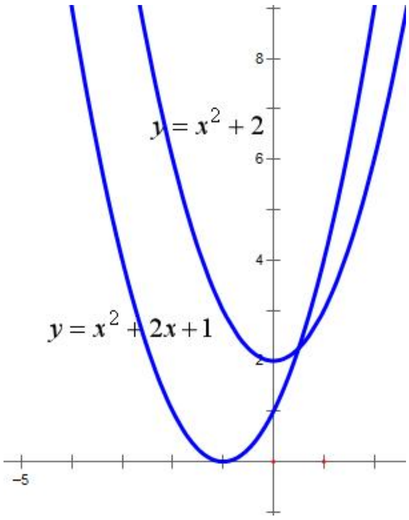
(5)、$y=-x^2+2x-4$　　(6)、$y=x^2+2x$

(7)、 $y = x^2 + 2$ (8)、 $y = x^2 + 2x + 1$









5、解不等式

(1)、 $x^2 - 4x - 5 > 0$ (2)、 $x^2 - 5x + 6 < 0$

(3)、 $x^2 - 4x + 6 > 0$ (4)、 $x^2 - 4x + 6 < 0$

(5)、 $-x^2 + 4x + 5 > 0$ (6)、 $-x^2 + 4x + 5 < 0$

(7)、 $-x^2+2x-4>0$　　　　　　(8)、 $-x^2+2x-4<0$

解：(1)、先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5>0$ 的解为 $x>5$ 或 $x<-1$；

(2)、先解 $x^2-5x+6=0$ 可得 $x_1=2$ 或 $x_2=3$，故 $x^2-5x+6<0$ 的解为 $2<x<3$；

(3)、 $x^2-4x+6=0$ 的判别式 $\Delta=16-24<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使 $x^2-4x+6>0$，故解集为全体实数 R；

(4)、 $x^2-4x+6=0$ 的判别式 $\Delta=16-24<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使得 $x^2-4x+6>0$，没有 x 使得 $x^2-4x+6>0$，故解集为空集；

(5)、 $-x^2+4x+5>0 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0$，

先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5<0$ 的解为 $-1<x<5$；

(6)、 $-x^2+4x+5<0 \Leftrightarrow x^2-4x-5>0$，

先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5>0$ 的解为 $x>5$ 或 $x<-1$；

(7)、 $-x^2+2x-4>0 \Leftrightarrow x^2-2x+4<0$，判别式 $\Delta<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使得 $x^2-2x+4>0$，没有 x 使得 $x^2-2x+4<0$，故解集为空集；

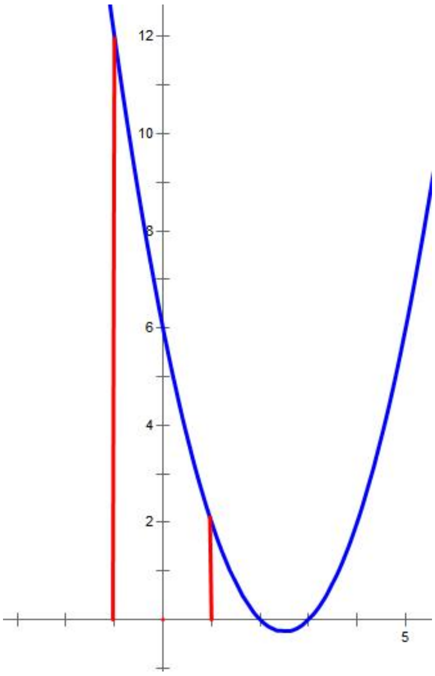
(8)、 $-x^2+2x-4<0 \Leftrightarrow x^2-2x+4>0$，判别式 $\Delta<0$，方程无解，开口向上，

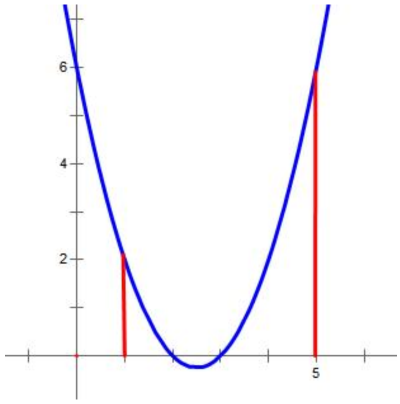
故任何 x 都使得 $x^2-4x+6>0$，故解集为全体实数 R；

6、求下列函数的 y 的取值范围

(1)、 $y=x^2-5x+6(-1\le x\le 1)$

(2)、 $y=x^2-5x+6(-1\le x\le 3)$



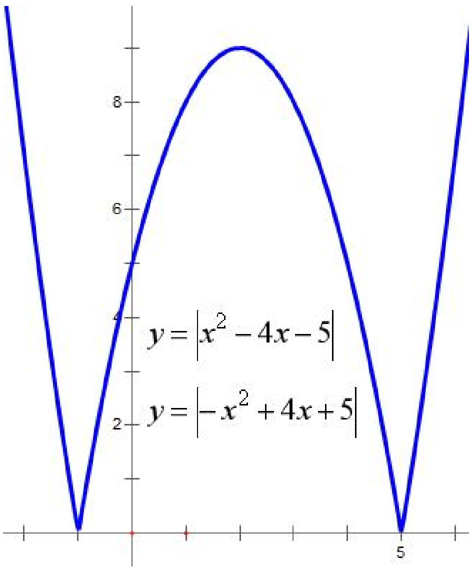


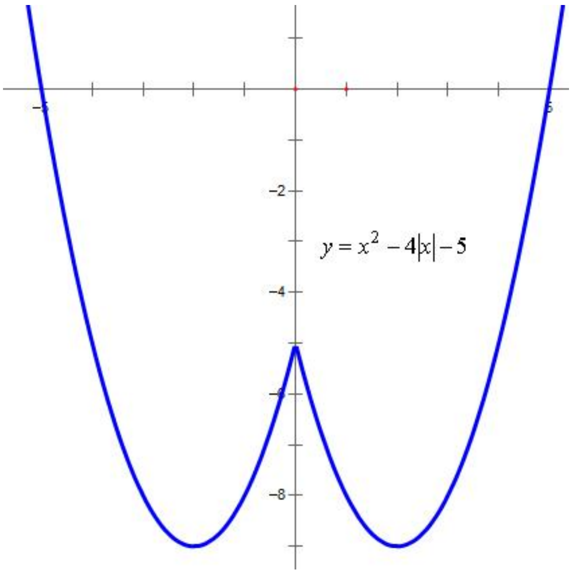
7、画图

(1)、 $y=\left|x^2-4x-5\right|$

(2)、 $y=\left|-x^2+4x+5\right|$

(3)、 $y=x^2-4|x|-5$





8、求 $y=x^2+2ax+a^2+1$ 在 $-1\le x\le 1$ 的最小值。

解：对称轴为 $x=-a$，

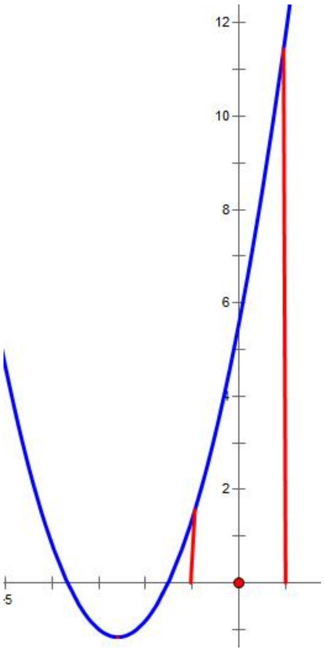
(1)、若 $-a\ge 1$ 即 $a\le -1$，则在 $x=1$ 处取得最小值：$1^2+2a1+a^2+1=a^2+2a+2$；

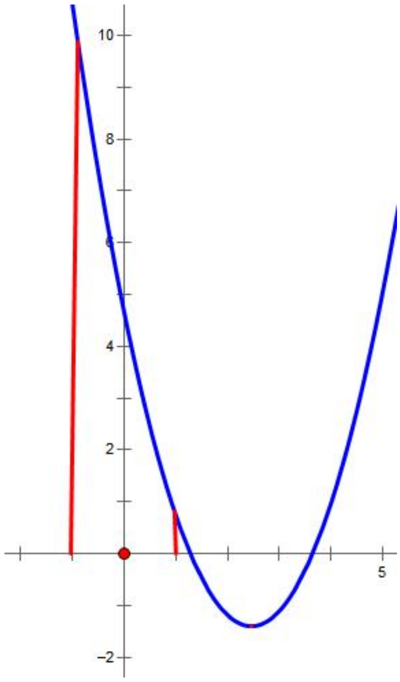
(2)、若 $-a\le -1$ 即 $a\ge 1$，则在 $x=-1$ 处取得最小值：

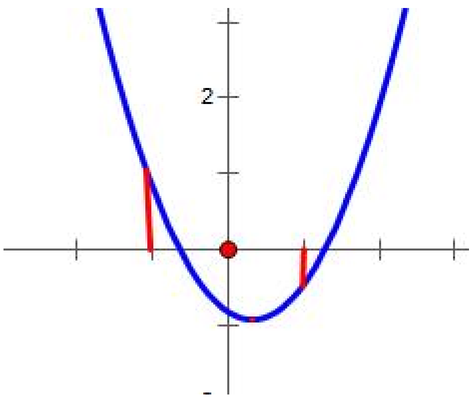
$(-1)^2+2a(-1)+a^2+1=a^2-2a+2$；

(3)、若 $-1<-a<1$ 即 $1>a>-1$，则在 $x=-a$ 处取得最小值：

$(-a)^2+2a(-a)+a^2+1=1$。







9、公式

1、$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$， $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

2、$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$， $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

3、$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。

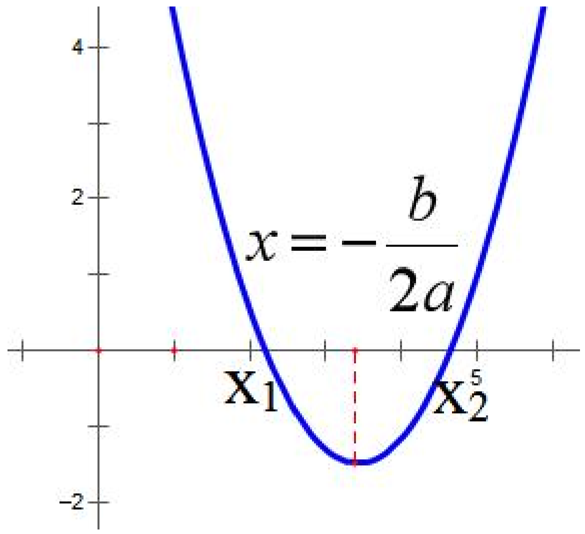
4、$(a+\frac{1}{a})^2-2=(a-\frac{1}{a})^2+2=a^2+\frac{1}{a^2}$。

5、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$， $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

10、二次函数：$y=ax^2+bx+c$，$(a\neq 0)$

①、图象是一条抛物线，关于$x=-\frac{b}{2a}$对称，顶点是$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$。

(怎么来的？)



复习思考题、作业题：解不等式：$x^2-2x-8<0$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 2-3 周	课 次	第 3-4 次		
章 节 名 称	1.3、讨论二次函数				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	对二次函数分情况讨论。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：求解不等式。 难点：讨论对称轴的取值范围。				

教学步骤及内容：

1.3、讨论二次函数

1、不等式$(2+x)(1-x)>0$的解为(　　)。

$A.\{x|x<2或x>1\}$　　$B.\{x|x<-1或x>2\}$

$C.\{x|-2<x<1\}$　　$D.\{x|-1<x<2\}$

解：$(2+x)(1-x)>0 \Rightarrow (x+2)(x-1)<0$，故$-2<x<1$。

$ab=c \Rightarrow (-a)b=-c或a(-b)=-c$

$a+b=c \Rightarrow -a-b=-c$

2、不等式$\dfrac{x+1}{x-2}\le 2$的解集为______________。

解：$\dfrac{x+1}{x-2}\le 2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2}-2\le 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{2x-4}{x-2}\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x+1-2x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow \dfrac{-x+5}{x-2}\le 0 \Rightarrow (-x+5)(x-2)\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x+1-2x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow \dfrac{-x+5}{x-2}\le 0 \Rightarrow \begin{cases}(-x+5)(x-2)\le 0\\ x\ne 2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-5)(x-2)\ge 0\\ x\ne 2\end{cases} \Rightarrow x\ge 5\text{或}x<2$。

或解 $\frac{x+1}{x-2}\le 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-2\le 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-\frac{2x-4}{x-2}\le 0$

$\Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2}\le 0 \Rightarrow \begin{cases}-x+5\ge 0\\ x-2<0\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-x+5\le 0\\ x-2>0\end{cases}$，解得 $x<2$ 或 $x\ge 5$。

3、已知关于 x 的不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$，则 $a+b$ 的值是(　　)。

$A.-5$　　$B.-3$　　$C.5$　　$D.6$

解：因为不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$，所以 $-1,3$ 是方程 $x^2-ax-b=0$ 的两实数根，由根与系数的关系得，$\begin{cases}-1+3=a\\ -1\times 3=-b\end{cases}$ 所以 $a=2,b=3$，则 $a+b=5$ 故选 C。

或解：$(x+1)(x-3)<0$ 的解集就是 $\{x|-1<x<3\}$，

即 $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow x^2-2x-3<0$ 和 $x^2-ax-b<0$ 同解，

比较系数可得 $a=2,b=3$。

4、不等式 $-x^2+5x-6>0$ 的解集是(　　)。

$A.\{x|-2<x<3\}$　　$B.\{x|-3<x<2\}$

$C.\{x|2<x<3\}$　　$D.\{x|-3<x<-2\}$

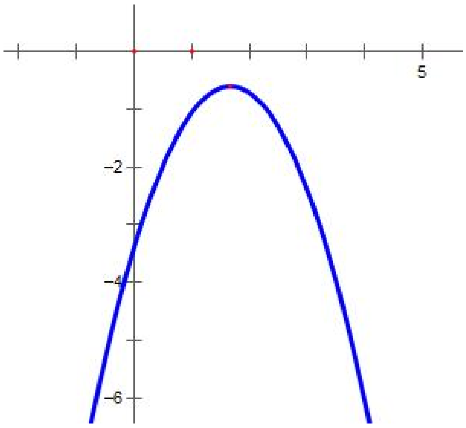
解：$-x^2+5x-6>0 \Rightarrow x^2-5x+6<0 \Rightarrow (x-2)(x-3)<0 \Rightarrow 2<x<3$。

5、若不等式 $ax^2+2x-3<0$ 的解集为 R，则实数 a 的取值范为(　　)。

$A.-\frac{1}{3}<a\le 0$　　$B.a<-\frac{1}{3}$

$C.a>-\frac{1}{3}$　　$D.a<-\frac{1}{3}$ 或 $a=0$

解：$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<0\\ 4+12a<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<0\\ a<-\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow a<-\frac{1}{3}$。



6、已知不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-2<0$对任意$x\in R$恒成立，求实数a的取值范围是。

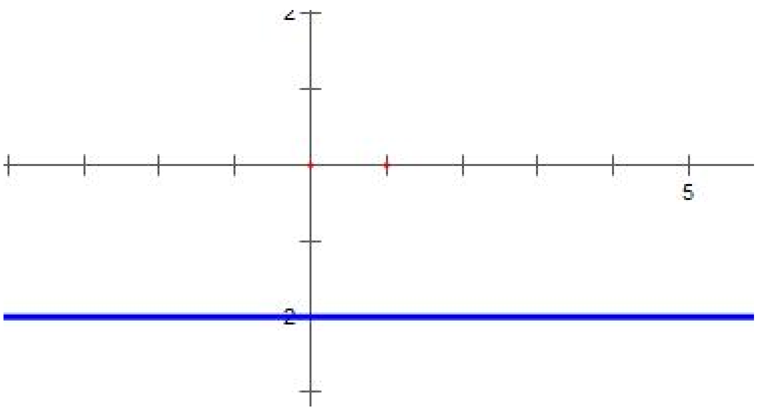
解：设$y=(a-2)x^2+2(a-2)x-2$，

①、当$a=2$时，$y=-2<0$，符合题意；

②、当$a\neq 2$时，只需$\begin{cases}a-2<0\\ \Delta<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ 4(a-2)^2+8(a-2)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ 4(a-2)+8>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a<2\\ a-2+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ a>0\end{cases}\Rightarrow 0<a<2$。

故$0<a\leq 2$。



7、若不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$，求则不等式$a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$的解集。

解：$(x+1)(x-2)<0$的解集就是$\{x|-1<x<2\}$，

即 $(x+1)(x-2)<0 \Rightarrow x^2-x-2<0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

即 $-x^2+x+2>0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

比较系数可得 $a=-1$， $b=1$， $c=2$，

故 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 可化为 $x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$。

8、解不等式： $m^2x^2+2mx-3<0$。

解：若 $m=0$， $-3<0$ 永远成立，故解为全体实数，

若 $m\neq 0$，先解 $(mx-1)(mx+3)=0$ 可得 $x_1=\dfrac{1}{m}$， $x_2=-\dfrac{3}{m}$

(1)、若 $m>0$，则 $\dfrac{1}{m}>-\dfrac{3}{m}$，故不等式的解为： $-\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}$；

(2)、若 $m<0$，则 $\dfrac{1}{m}<-\dfrac{3}{m}$，故不等式的解为： $\dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}$。

9、已知 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，则不等式 $2x^2+bx+a<0$ 的解集为______。

解： $(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{3})<0$ 的解就是 $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，

即 $(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{3})<0 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}<0 \Rightarrow -12x^2-2x+2>0$ 和 $ax^2+bx+2>0$ 同解，比较系数可得 $a=-12$， $b=-2$，

故 $2x^2+bx+a<0$ 可化为 $2x^2-2x-12<0$

$\Rightarrow x^2-x-6>0 \Rightarrow (x-3)(x+2)>0 \Rightarrow x>3$ 或 $x<-2$。

10、解关于 x 的不等式 $ax^2+2x+a>0(a\geq 0)$。

解：(1)、若 $a=0$， $2x>0 \Rightarrow x>0$，故解为全体正实数；

(2)、若 $a>0$， $\Delta=4-4a^2$，

当 $\Delta<0$，即 $a>1$ 时， $x\in R$，

当 $\Delta=0$，即 $a=1$ 时， $x\neq -1$，

当 $\Delta>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $ax^2+2x+a=0$ 的两根为

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，且 $x_1<x_2$，

所以$x<\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$或$x>\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$。

11、解关于x的不等于$ax^2+(1-2a)x-2>0$。

解：若$a=0$，$x-2>0\Rightarrow x>2$，

若$a\neq 0$，先解$ax^2+(1-2a)x-2=0$可得$x_1=-\frac{1}{a}$，$x_2=2$

(1)、若$a>0$，则$-\frac{1}{a}<2$，故不等式的解为：$x>2$或$x<-\frac{1}{a}$；

(2)、若$a<0$，先解$-\frac{1}{a}>2\Rightarrow -1<2a\Rightarrow -\frac{1}{2}<a$，故

①、若$-\frac{1}{2}<a<0$，则解为$-\frac{1}{a}>x>2$；

②、若$-\frac{1}{2}=a$，则无解；

③、若$a<-\frac{1}{2}$，则解为$2>x>-\frac{1}{a}$。

12、对x^2-5x+6和x^2+x-1因式分解。

解：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$；

$x^2+x-1=(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$。

复习思考题、作业题：对x^2-5x-6和x^2+x-3因式分解。

下次课预习要点

教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 4 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 5 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">1.4、指数运算</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>1</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">掌握指数的运算。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：指数的提取。

难点：指数的乘方。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

1.4、指数运算

教学目的：掌握指数的运算

教学重点：指数的提取。

教学难点：指数的乘方。

指数的性质：若 a、b、c 都大于 0，则：

①、$a^b a^c = a^{b+c}$　　②、$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

③、$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$　　④、$(\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}$

⑤、$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$　　⑥、$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

常用公式：

1、$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

2、$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

3、$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，　　$a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$。

1、化简$\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt{(a-2b)^2}$ 的结果是(　　)。

A. $3b-2a$　　　　B. $2a-3b$　　　　C. b 或 $2a-3b$　　　　D. b

解：$\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt{(a-2b)^2}=a-b+|a-2b|$

若 $a \ge 2b$，则原式$=a-b+a-2b=2a-3b$，

若 $a<2b$，则原式$=a-b-(a-2b)=b$，选 C。

2、式子 $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的化简结果为(　)。

A、1　　B、10　　C、100　　D、$\sqrt{10}$

解：$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}$

$=\sqrt{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{6+2\sqrt{9-5}}=\sqrt{10}$。

3、已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，则 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=$(　)。

解：$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3 \Rightarrow x+x^{-1}+2=9 \Rightarrow x+x^{-1}=7$，

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}=\pm\sqrt{x+x^{-1}-2}=\pm\sqrt{5}$。

(互为倒数一般要平方，这样才能用到互为倒数)

复习思考题、作业题：

设 a、b 满足 $0<a<b<1$，则下列不等式中正确的是(　　)。

A. $a^a<a^b$　　　　B. $b^a<b^b$　　　　C. $a^a<b^a$　　　　D. $b^b<a^b$

解：令 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，

对于 A，$(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{4})^1<(\frac{1}{4})^2 \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{16} \Rightarrow 4>16$，矛盾；

对于 B，$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^1<(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{4} \Rightarrow 2>4$，矛盾；

对于 C，$(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (\frac{1}{4})^1<(\frac{1}{2})^1 \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2} \Rightarrow 4>2$，

成立； 对于 D，$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{1} < (\frac{1}{4})^{1} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 2 > 4$，矛盾；	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第　4—5　周	课　次	第　6　次
章　节 名　称	1.5、指数函数		
授　课 方　式	理论课（√ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	掌握指数函数的性质		
教　学 方　法	讲解法、讨论法		
教　学 重　点 难　点	重点：指数的单调性 难点：指数的定义域和值域		

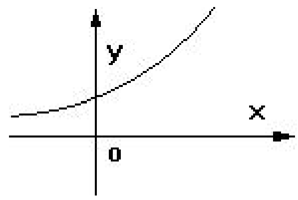
教学步骤及内容：

1.5、指数函数

方法：一定要化同底$4^x=(2^x)^2$，$9^x=(3^x)^2$

任何时候指数函数的底数不能为负，不是指指数的底数不能为负，例$y=(-2)^x$和$y=(-2)^3$。

一、指数函数的图象



方法：y永远大于 0，需要讨论的是a是否大于 1。

1、$y=a^x$　(a>1) 由图象可知：

①、定义域是R

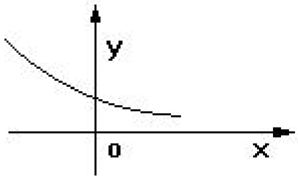
②、值域是(0，+∞)。

(当x→－∞时，图象无限接近于x轴，但永远不会相交。)

③、过点(0，1)，在R上函数是递增。

④、当x∈(－∞，0)时，y∈(0，1)；当x∈[0，+∞)时，y∈[1，+∞)。

2、$y=a^x$ （$1>a>0$）由图象可知：



①、定义域是 R

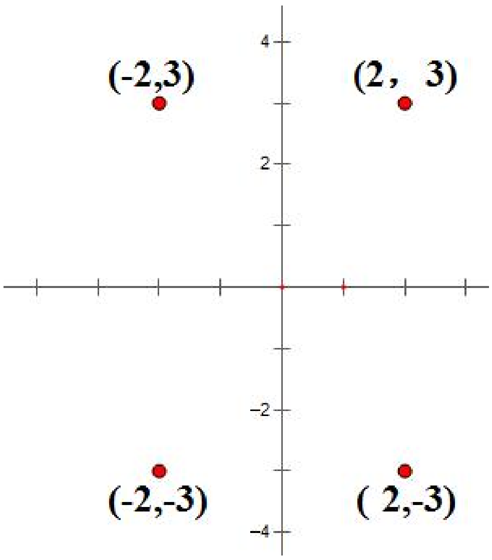
②、值域是(0，＋∞)。

(当 $x\to+\infty$时，图象无限接近 x 轴，但永远不会相交。)

③、过点(0，1)，在 R 上函数是递减的。

④、当 $x\in(-\infty，0)$时，$y\in(1，+\infty)$；当 $x\in[0，+\infty)$时，$y\in(0，1]$。

注意：会画 $y=2^x$、$y=2^{-x}$、$y=-2^x$、$y=-2^{-x}$、$y=2^{|x|}$、$y=\left|2^x\right|$的图象。



二、会判断 $y=a^{f(x)}$ 的单调区间。

(考试 $f(x)$ 一般是二次函数)

方法：增增$\Longrightarrow$增，减减$\Longrightarrow$增，增减$\Longrightarrow$减。

1、求 $y=2^{x^2-4x+7}$ 的值域和单调性。

解：$x^2-4x+7\geq3\Rightarrow2^{x^2-4x+7}\geq2^3=8$，故值域为[8，＋∞)，

$y=2^t$ 在 R 上单调递增，

$t=x^2-4x+7$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增，

故 $y=2^{x^2-4x+7}$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增。

2、求 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}$ 的值域和单调性。

解：$x^2-4x+6\geq 2\Rightarrow 0<(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}\leq(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，

故值域为 $(0,\frac{1}{4}]$，$y=(\frac{1}{2})^t$ 在 R 上单调递减，

$t=x^2-4x+6$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增，

故 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}$ 在(－∞，2]单调递增，在[2，＋∞)单调递减。

三、综合练习

1、$f(x)=a^{x-2}$ 恒过定点______________。

2、$f(x)=3a^{x-2}+5$ 恒过定点___________。

3、求方程 $4^x-2^{x+2}-5=0$ 的解。

解：$4^x-2^{x+2}-5=0\Rightarrow(2^x)^2-2^2 2^x-5$，

令 $t=2^x$，可得 $t^2-4t-5=0\Rightarrow t=5\text{或}-1(\text{舍去})$，即 $2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5$。

4、求 $y=\dfrac{10^x-\frac{1}{10^x}}{10^x+\frac{1}{10^x}}$ 的值域和单调性。

解：$y=\dfrac{10^x-\frac{1}{10^x}}{10^x+\frac{1}{10^x}}=\dfrac{100^x-1}{100^x+1}=\dfrac{100^x+1-2}{100^x+1}=1-\dfrac{2}{100^x+1}$，

$100^x>0\Rightarrow 100^x+1>1\Rightarrow 0<\dfrac{1}{100^x+1}<1\Rightarrow 0<\dfrac{2}{100^x+1}<2$

$\Rightarrow 0 > -\dfrac{2}{100^x+1} > -2 \Rightarrow 1 > 1-\dfrac{2}{100^x+1} > -1$，故值域为(－1，1)，

$y=100^x+1$单调递增，故$y=\dfrac{1}{100^x+1}$单调递减，故$y=\dfrac{2}{100^x+1}$单调递减，

故$y=-\dfrac{2}{100^x+1}$单调递增，故$y=1-\dfrac{2}{100^x+1}$单调递增。

5、已知$f(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$。

(1)、求奇偶性；　　(2)、求单调性；　　(3)、求解$f(t^2-2t)+f(-t-4)>0$。

解：(1)、$f(-x)=e^{-x}-\dfrac{1}{e^{-x}}=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，奇。

(2)、$y=e^x$单调递增，$y=e^{-x}$单调递减，故$y=-e^{-x}$单调递增，

故$f(x)=e^x-e^{-x}$单调递增。

(3)、$f(t^2-2t)+f(-t-4)>0 \Rightarrow f(t^2-2t)>-f(-t-4)$

$\Rightarrow f(t^2-2t)>f(t+4)$，$f(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$单调递增，

故$t^2-2t>t+4 \Rightarrow t^2-3t-4>0$，故$(t+1)(t-4)>0$，故$t>4$或$t<-1$。

复习思考题、作业题： 1、$f(x)=2a^{x-3}+6$恒过定点____(3, 8)________。 2、$f(x)=2\log_a(x-2)+6$恒过定点___(3, 6)_____。	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 6 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 7 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">1.6、对数运算</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">掌握对数的运算</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：对数的运算规则

难点：对数和指数的转换</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

1.6、对数运算

对数的性质：若 a、b、c 都大于 0，则：

①、$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$，　　$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$；

②、$\log_a b^c = c\log_a b$，　　$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$

③、$a^{\log_a b} = b$；

④、$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (换底公式)；

⑤、$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$；

⑥、若 a、b 同时大于 1 或同时大于 0 小于 1，则 $\log_a b > 0$。

1、求值 $\lg 25 + \frac{2}{3}\lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2$。

解：$\lg 25 + \frac{2}{3}\lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2$

$= 2\lg 5 + 2\lg 2 + \lg 5(\lg 5 + 2\lg 2) + \lg^2 2$

$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(\lg 5+2\lg 2)+\lg^2 2$

$=2+\lg^2 5+2\lg 5\lg 2+\lg^2 2$

$=2+(\lg 5+\lg 2)^2=3$。

2、求值$2\log_{12}2+\log_{12}3$。

解：$2\log_{12}2+\log_{12}3=\log_{12}4+\log_{12}3=\log_{12}12=1$。

3、求值$\log_2\dfrac{1}{25}\cdot\log_3\dfrac{1}{8}\cdot\log_5\dfrac{1}{9}$。

解：$\log_2\dfrac{1}{25}\cdot\log_3\dfrac{1}{8}\cdot\log_5\dfrac{1}{9}=-\log_2 25\cdot\log_3 8\cdot\log_5 9$

$=-\log_2 25\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}\dfrac{\log_2 9}{\log_2 5}=-2\log_2 5\dfrac{3}{\log_2 3}\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 5}$

$=-12$。

4、求值$\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$

解：$\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}=\dfrac{\log_{2^3}3^2}{\log_2 3}=\dfrac{\frac{2}{3}\log_2 3}{\log_2 3}=\dfrac{2}{3}$。

5、已知 lg2＝a，lg3＝b，则$\log_3 6$＝(　　)。

A. $\dfrac{a+b}{a}$　　B. $\dfrac{a+b}{b}$　　C. $\dfrac{a}{a+b}$　　D. $\dfrac{b}{a+b}$

解：$\log_3 6=\dfrac{\lg 6}{\lg 3}=\dfrac{\lg 2+\lg 3}{\lg 3}=\dfrac{a+b}{b}$。

6、已知：$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，则$\log_{42}56$＝__________。

解：$\log_2 3=a\Rightarrow\log_3 2=\dfrac{1}{a}$，$\log_{42}56=\dfrac{\log_3 56}{\log_3 42}=\dfrac{\log_3 7\times 8}{\log_3 7\times 6}$

$$=\frac{\log_3 7+\log_3 8}{\log_3 7+\log_3 6}=\frac{b+\log_3 2^3}{b+\log_3 2\times 3}=\frac{b+3\log_3 2}{b+\log_3 2+\log_3 3}=\frac{b+3\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{a}+1}$$

$$=\frac{ab+3}{ab+1+a}$$ 。

复习思考题、作业题：

求值 $\log_{64}32\cdot\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}$

解：原式= $\log_{2^6}2^5\cdot\log_2 5^{-2}\cdot\log_3 2^{-3}\cdot\log_5 3^{-2}$

$$=\frac{5}{6}\log_2 2\times[(-2)\log_2 5]\times[(-3)\log_3 2]\times[(-2)\log_5 3]$$

$$=-\frac{5}{6}\times 2\times 3\times 2\times\log_2 5\times\log_3 2\times\log_5 3$$

$$=-10\log_2 5\times\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=-10$$

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 6—7 周	课 次	第 8 次
章节名称	1.7、对数函数		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	掌握对数函数的性质		
教学方法	讲解法、讨论法		
教学重点难点	重点：指数的单调性 难点：对数函数的定义域和值域		

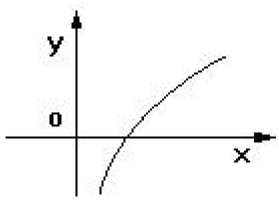
教学步骤及内容：

1.7、对数函数

一、对数函数的图象

方法：x 永远大于 0，需要讨论 x 是否大于 1。

1、$y=\log_a x$　$(a>1)$



由图象可以知道：

①、定义域是(0，+∞)

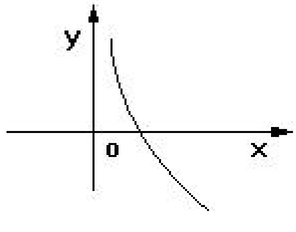
②、值域是 R。

(当 $x\to 0$ 时，图象无限接近于 y 轴，但永远不会相交。)

③、过点(1，0)，在 R 上函数是递增的。

④、当 $x\in(0，1)$时，$y\in(-\infty，0)$时；当 $x\in[1，+\infty)$时，$y\in[0，+\infty)$。

2、$y=\log_a x$　$(1>a>0)$



由图象可以知道：

①、定义域是(0，+∞)

②、值域是 R。

(当 $x\to 0$ 时，图象无限接近于 y 轴，但永远不会相交。)

③、过点(1，0)，在 R 上函数是递减的。

④、当 $x\in(0，1)$时，$y\in(0，+\infty)$；当 $x\in[1，+\infty)$时，$y\in(-\infty，0]$

画图 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_2(-x)$，$y=-\log_2 x$，

$y=-\log_2(-x)$，$y=\log_2|x|$，$y=|\log_2 x|$，$y=|\log_2|x||$

二、会判断 $y=\log_a f(x)$ 的单调区间和值域。

方法：增增⟹增，减减⟹增，增减⟹减，

1、求 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 的单调区间。

解：$y=\log_{0.2} t$ 在(0，+∞)上单调递减，

而 $t=x^2-4x-5$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，+∞)单调递增，

故 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 在(－∞，2]单调递增，在[2，+∞)单调递减。

解：$y=\log_{0.2} t$ 在(0，+∞)上单调递减，

而 $t=x^2-4x-5$ 在(－∞，－1)单调递减，在(5，+∞)单调递增，

故 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 在(－∞，－1)单调递增，在(5，+∞)单调递减。

2、求 $y=\log_{0.5}(x^2-4x+8)$ 的值域。

解：$x^2-4x+8\geqslant 4$，故 $\log_{0.5}(x^2-4x+8)\le\log_{0.5}4=-2$，

故函数的值域为(－∞，－2]。

3、已知函数 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]单调递减，则 a 的取值范围为____。

解：令 $y=\log_2 t$，$t=2-ax$，由于母函数 $y=\log_2 t$ 单调递增，

而原函数 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]单调递减，

故 $t=2-ax$ 在[0，1]单调递减，故 $a>0$，

但还必须保证 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]有意义：

$0\le x\le 1\Rightarrow 0\le ax\le a\Rightarrow 0\ge -ax\ge -a\Rightarrow 2\ge 2-ax\ge 2-a$

故 $2-a>0\Rightarrow a<2$。

三、综合练习

1、 判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的奇偶性。

解：$f(-x)=-f(x)$

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}$$

$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\sqrt{x^2+1}^2-x^2=1$$

$$1=1$$

成立，故是奇函数。

2、设 a，b，c 为正数，且 $3^a=4^b=6^c$，则有(　　)。

A. $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$　　C. $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$　　D. $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

解：$3^a=4^b=6^c\Rightarrow\begin{cases}a=\log_3 k\\ b=\log_4 k\\ c=\log_6 k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=\log_k 3\\ \frac{1}{b}=\log_k 4\\ \frac{1}{c}=\log_k 6\end{cases}$，

对于 A：$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow\log_k 6=\log_k 3+\log_k 4\Rightarrow\log_k 6=\log_k 12$，

对于 B：$\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow 2\log_k 6=2\log_k 3+\log_k 4\Rightarrow\log_k 36=\log_k 36$，成立，故选 B。

3、 $f(x)=\log_a(x-1)$ 恒过定点____________。

4、不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)>x^2-x+\frac{1}{2}$的解集为。

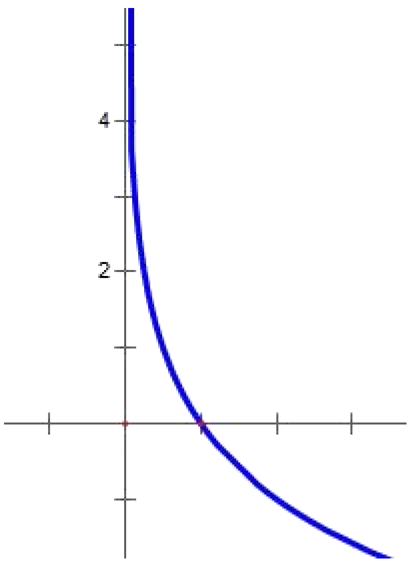
A. $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，0)∪(1，$\frac{1+\sqrt{3}}{2})$　　　　B.(－∞，$\frac{1-\sqrt{3}}{2})$∪$(\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，＋∞)

C. $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，0)　　　　D. (1，$\frac{1+\sqrt{3}}{2})$

解：代x＝1.1 可得$\log_{\frac{1}{2}}(1.21-1.1)>1.21-1.1+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}0.11>0.61$成立，故排除 B 和 C，

代x＝－0.1 可得$\log_{\frac{1}{2}}(0.01+0.1)>0.01+0.1+\frac{1}{2}$成立，选 A。



5、已知a＝0.3^3，b＝$3^{0.3}$，$c=\log_3 0.3$，$d=\log_{0.3}3$，则a，b，c，d的大小关系是__________。

解：$\log_3\frac{3}{10}<\log_3\frac{1}{3}=-1=\log_{\frac{3}{10}}\frac{10}{3}<\log_{\frac{3}{10}}3$，$0.3^3<0.3^0=1=3^0<3^{0.3}$。

6、$\log_a c$，$\log_b c$是方程$x^2-3x+1=0$的两根，求$\log_{\frac{a}{b}}c$的值。

解：$\begin{cases}\log_a c+\log_b c=3\\ \log_a c\log_b c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c b}=3\\ \dfrac{1}{\log_c a}\dfrac{1}{\log_c b}=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_c a+\log_c b}{\log_c a\log_c b}=3\\ \dfrac{1}{\log_c a\log_c b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_c a+\log_c b=3,\\ \log_c a\log_c b=1\end{cases}$

$\log_{\frac{a}{b}} c=\dfrac{1}{\log_c \dfrac{a}{b}}=\dfrac{1}{\log_c a-\log_c b}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{(\log_c a-\log_c b)^2}}$

$=\pm\dfrac{1}{\sqrt{(\log_c a+\log_c b)^2-4\log_c a\log_c b}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{9-4}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

7、已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数。

(1)、求 m 的值；

(2)、判断 $f(x)$在(1，＋∞)的单调性；

(3)、当 $a=\frac{1}{2}$时，若对于任意 $x\in[3，4]$，$f(x)>(\frac{1}{2})^x+b$ 恒成立，求 b 的取值范围。

解：(1)、是奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$

$\Rightarrow\log_a\dfrac{1+mx}{-x-1}=-\log_a\dfrac{1-mx}{x-1}\Rightarrow\log_a\dfrac{1+mx}{-x-1}=\log_a\dfrac{x-1}{1-mx}$

$\Rightarrow\dfrac{1+mx}{-x-1}=\dfrac{x-1}{1-mx}\Rightarrow 1-m^2x^2=1-x^2$，

比较系数可知 $m=1$(舍去)或 $m=-1$。

(2)、$f(x)=\log_a\dfrac{x+1}{x-1}=\log_a\dfrac{x-1+2}{x-1}=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$，

若 $a>1$，$y=x-1$ 在(1，＋∞)单调递增，

$y=\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，$y=1+\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，

$y=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$ 在(1，＋∞)单调递减；

若 0＜a＜1，y＝x－1 在(1，＋∞)递增， $y=\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，$y=1+\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减， $y=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$ 在(1，＋∞)单调递增； 解：(3)、$f(x)>(\dfrac{1}{2})^x+b\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x>b$， 即 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 的最小值$>b$， $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}$ 和 $y=-(\dfrac{1}{2})^x$ 在(1，＋∞)都单调递增， 故 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 在(1，＋∞)单调递增， 故 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 的最小值为： $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3+1}{3-1}-(\dfrac{1}{2})^3=-1-\dfrac{1}{8}=-\dfrac{9}{8}$，故 $-\dfrac{9}{8}>b$。
复习思考题、作业题： $f(x)=\log_a(x-1)+6$ 恒过定点________。
下次课预习要点

教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　8　周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第　9　次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">第二章　函数与极限
2.1、映射与函数</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（√ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">理解映射与函的概念。本章将通过把数学问题具体化（例如：国庆大阅兵，我们国家展示了强大的军事力量。我们作为中国人很骄傲。那么炮弹发射高度和发射时间我们用数学描述为什么函数？）通过类似于这样的问题，增强“四个自信”。进一步培养学生的爱国主义精神，树立远大的理想，为实现中国梦奋斗。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：认识基本初等函数。

难点：理解邻域。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第二章　函数与极限

2.1、映射与函数

教学目的：理解映射与函的概念。

教学重点：认识基本初等函数。

教学难点：理解邻域。

一、集合

1、集合：具有某种特定性质的事物的总体叫做集合。组成这个集合的事物称为该集合的元素. 用 A，B，C，D 表示集合；用 a，b，c，d 表示集合中的元素，元素与集合的关系：$a \notin A$　　$a \in A$。

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；

不是有限集的集合称为无限集。

2、集合的特性：确定性、无序性、互异性，举例。

(1)、元素的确定性：

A={1,2,3}

A={全国大于 50 公斤的人}

A={很帅的人}

(2)、元素的互异性：

A={3，6，8}

A={1，2，1}

(3)、元素的无序性：{1,2,3}={3,1,2}。

3、注意研究的对象：

$\left\{x \middle| y=\sqrt{x-2}+3\right\}=\{\text{大于等于2的所有数}\}$

$\left\{y \middle| y=\sqrt{x-2}+3\right\}=\{\text{大于等于3的所有数}\}$

4、几个常见的集合。

$R=\{\text{所有实数}\}$

$Q=\{\text{所有有理数}\}$

有理数：有限小数或无限循环小数，即 $\frac{q}{p}$， $q,p\in Z$ 。

无理数：无限不限循环小数，例 π， $\sqrt{\ }$

$Z=\{\text{所有整数}\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$

$N=\{\text{自然数}\}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$N^{*}=\{\text{正整数}\}=\{1,2,3,\cdots\}$

5、表示方法：

(1)、列举法： 把集合的全体元素一一列举出来。

例如 A={a, b, c, d, e, f, g}。

(2)、描述法： 例如 M={x|x>5 }。

(3)、常见的数集：N，Z，Q，R，N^{+}。

(4)、集合与集合的关系：A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$。如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。若作 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 则称 A 是 B 的真子集。空集 ϕ： $\phi\subset A$。

6、集合的运算

并集 $A\cup B$ ： $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}\in\mathrm{A}或x\in B\}$ 。

交集 $A\cap B$ ： $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}\in\mathrm{A}且x\in B\}$ 。

差集 $A\setminus B$： $A\setminus B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$ 。

二、区间与邻域

1、区间：开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开半闭区间 $(a,b]$， $[a,b)$，有限、无限区间。

2、邻域：以 a 为中心的 δ 邻域：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ (开区间)

去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 。

三、函数

1、函数的概念：设数集 $D\subset\mathrm{R}$，则称映射 f ： $\mathrm{D}\to\mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。

2、 函数的两个要素：定义域、对应法则。

3、常见的几种函数：常量函数： $y=2$

绝对值函数： $y=|x|$；

符号函数 $y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

取整函数 $y=[x]$ ；

分段函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$ 。

4、函数的几种特性

(1)、函数的有界性 (上界、下界；有界、无界) 有界的充要条件：既有上界又有下界。

(2)、函数的单调性 (单增、单减)。

(3)、函数的奇偶性(定义域对称、 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关系决定图形特点 (关于原点、 y 轴对称) 。

(4)、函数的周期性(定义域中成立： $f(x+l)=f(x)$)。

5、基本初等函数：

(1)、幂函数： $y=x^{a}$。

(2)、指数函数： $y=a^{x}$ 。

(3)、对数函数 $y=\log_{a}(x)$。

(4)、三角函数： $y=\sin(x), y=\cos(x), y=\tan(x)$。

6、初等函数：

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数， 例如：

$$y=\sqrt{1-x^2}\ ,\quad y=\sin^2 x,\quad y=\sqrt{tg\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数。

复习思考题、作业题：下列关系中，表示正确的是（ ）。

A、$1\in\{0,1\}$　　B、$1\subseteq\{0,1\}$

C、$1\subseteq\{0,1\}$　　D、$\{1\}\in\{0,1\}$

解：1 是集合的元素，要用$\in$，子集用$\subseteq$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 8 周	课 次	第 10 次		
章 节 名 称	2.2、函数的极限				
授 课 方 式	理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学时数	2
教 学 目 的 要 求	理解函数的极限的概念。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：用定义求证函数的极限。 难点：函数的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。				

教学步骤及内容：

2.2、函数的极限

教学目的：理解函数的极限的概念。

教学重点：用定义求证函数的极限。

教学难点：函数的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。

一、 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1、定义：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$。

注：(1)、x_0 可在函数的定义域内，也可不在，不涉及 f 在 x_0 有没有定义，以及函数值 $f(x_0)$ 的大小。只要满足：存在某个 $\rho > 0$ 使：

$(x_0 - \rho, x_0) \cup (x_0, x_0 + \rho) \subset D$。

(2)、如果自变量 x 趋于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 有一个总趋势-----以某个实数 A 为极限，则记为：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

2、几何意义：

例 1. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ 。

证明：这里$|f(x)-A|=|c-c|=0$,

因为$\forall\varepsilon>0$，可任取$\delta>0$ ，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ 。

例 2、证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ 。

分析：$|f(x)-A|=|x-x_0|$，　因此$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$|x-x_0|<\varepsilon$ 。

证明：因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ 。

例 3、证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$ 。

分析：$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 。

证明: 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon/2\ \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$， 当 $0<|x-1|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$ 。

例 4. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ 。

分析: 注意函数在 $x=1$ 是没有定义的, 但这与函数在该点是否有极限并无关系。

当 $x\neq 1$ 时， $|f(x)-A|=|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2|=|x-1|$，　$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$ ，只要$|x-1|<\varepsilon$ 。

证明: 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2|=|x-1|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ 。

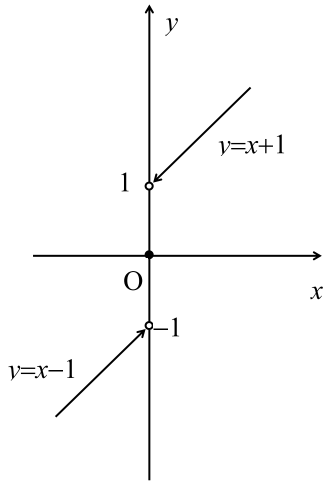
3、单侧极限

若当 $x\to x_0^-$ 时， $f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，$\forall x$：$x_0-\delta<x<x_0$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

若当 $x\to x_0^+$ 时， $f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，

记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0^{\ +})=A$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$， $\forall x$：$x_0<x<x_0+\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

4、定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。



例 5、函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限不存在。

这是因为，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，

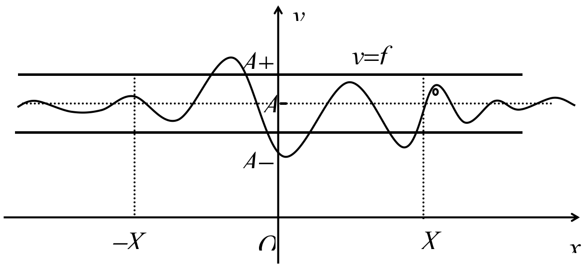
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$。

二、 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1、定义：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists \mathrm{X}>0$，对于 $\forall x$，若 $|x|>X$，

则 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$。

2、几何意义：



其中，直线 $y=c$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线。

3、定理：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

例 6、证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

分析：$|f(x)-A|=|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{|x|}$，$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ ，只要 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$。

证明: 因为 $\forall\varepsilon>0$， $\exists X=\frac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|=|\frac{1}{x}-0|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

二、函数极限的性质 1、极限的唯一性 2、函数极限的局部有界性 3、函数极限的局部保号性
复习思考题、作业题：证明 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$。
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　9　周	课　次	第　11　次	
章　节 名　称	2.3、无穷小与无穷大			
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）		教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	理解无穷小与无穷大的概念。			
教　学 方　法	讲解法、讨论法			
教　学 重　点 难　点	重点：无穷小与无穷大的转换。 难点：无穷小和无穷大的关系。			

教学步骤及内容：

2.3、无穷小与无穷大

教学目的：理解无穷小与无穷大的概念。

教学重点：无穷小与无穷大的转换。

教学难点：无穷小和无穷大的关系。

一、无穷小定义

1、定义：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小，　特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小。

$\lim\limits_{x\to t} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to t$ 时的无穷小。

例：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，　故函数 $x-1$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，故数列 $\{\dfrac{1}{n+1}\}$ 为当 $n\to\infty$ 时的无穷小。

2、很小很小的数只要它不是零，　作为常数函数在自变量的任何变化过程中，其极限就是这个常数本身，不会为零，故不是无穷小；

3、0 是无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to t} 0=0$。

二、无穷大定义

1、定义： 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时， 对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，就称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大，记为：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)。

注：当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$，按函数极限定义来说，极限是不存在的，但为了便于叙述函数的这一性态， 我们也说“函数的极限是无穷大”， 并记作：

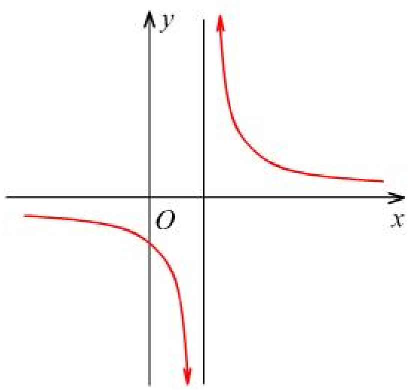
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)

2、 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ 。

证：因为$\forall M>0, \exists\delta=\dfrac{1}{M}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有$|\dfrac{1}{x-1}|>M$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

提示: 要使$|\dfrac{1}{x-1}|=\dfrac{1}{|x-1|}>M$，只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$.



三、无穷小和无穷大的关系

定理：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$ 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

即：非零的无穷小量与无穷大量是倒数关系：

当 $x_n\neq 0$ 时，有： $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$$

注意是在自变量的同一个变化过程中。

4、求下列极限

(1)、 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$

解：(1)、 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 2+0=2$ 。

(2)、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1+0=1$ 。

复习思考题、作业题：求极限： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+6}{2x}$ 。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　10　周	课　次	第　12 次		
章　节 名　称	2.4、极限运算法则				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	能够对极限进行四则运算。				
教　学 方　法	讲解法、讨论法				
教　学 重　点 难　点	重点：极限运算的性质。 难点：复合函数的极限运算法则。				

教学步骤及内容：

2.4、极限运算法则

教学目的：能够对极限进行四则运算。

教学重点：极限运算的性质。

教学难点：复合函数的极限运算法则。

一、无穷小的性质

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是无穷小量于是：

1、两个无穷小量的和差也是无穷小量：

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0,\quad \lim_{x\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{x\leftarrow\infty}(x_n \pm y_n) = 0$$

例：$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x + x)$

2、对于任意常数 C，数列$\{c\cdot x_n\}$也是无穷小量：

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(c\cdot x_n) = 0,$$

例：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

3、$\{x_n \cdot y_n\}$也是无穷小量，两个无穷小量的积是一个无穷小量。

$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$。

4、$\{|x_n|\}$也是无穷小量：

$\lim\limits_{x\to x_0} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |x_n| = 0$。

5、无穷小与有界函数的积为无穷小。

例：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$。

二、函数极限的四则运算

1、若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 有极限，则

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

2、函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，则对任何常数 a 成立

$\lim\limits_{x\to x_0}(a\cdot f(x)) = a\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

3、若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 有极限，则

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

4、若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 有极限，并且

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$。

注意：(1)、极限的四则运算成立的条件是若函 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 有极限。

(2)、有理函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，

当$Q(x_0)\neq 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$，

当$Q(x_0)=0$且$P(x_0)\neq 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$，

当$Q(x_0)=P(x_0)=0$时， 先将分子分母的公因式$(x-x_0)$约去。

例 1、 求$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1$。

例 2、 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}。$$

例 3、求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$。

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\dfrac{1}{6}$。

例 4、求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$，

根据无穷大与无穷小的关系得$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$。

例 5、 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$。

解：先用x^3 去除分子及分母，然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}。$$

例 6、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$。

解：先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0。$$

例 7、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$。

例 8、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$。

解：当 $x\to\infty$时, 分子及分母的极限都不存在,

故关于商的极限的运算法则不能应用.

因为 $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x$, 是无穷小与有界函数的乘积,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$。

三、复合函数的极限运算法则

定理：设函数 $y=f[g(x)\}$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(u)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\overset{0}{u}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$。

例 1、求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 。

解：$y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 复合而成的，

因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to 6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$ 。

或解：$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}$ 。

习题

1、计算下列极限

(1)、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$ 。

(2)、 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{3-3}{3+1}=0$

(3)、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$ 。

(4)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{0-0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$。

(5)、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$。

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$。

(6)、$\lim\limits_{x\to \infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$。

解：$\lim\limits_{x\to \infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=2-0+0=2$。

(7)、$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$。

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1-0}{2-0-0}=\dfrac{1}{2}$。

(8)、$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{x}{x^4}}{1-3\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-3\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{0+0}{1-0+0}=0$。

(9)、$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$。

解：$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$。

(10)、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})=(1+0)(2-0)=2$。

(11)、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1[1-0]}{\frac{1}{2}}=2$。

(12)、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$。

(13)、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{5}$

$=\dfrac{(1+0)(1+0)(1+0)}{5}=\dfrac{1}{5}$。

(14)、 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$。

解：$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}[\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{3}{1-x^3}]$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=\frac{-(1+2)}{1+1+1^2}=-1\text{。}$$

3、计算下列极限

(1)、 $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$ 。

解： $\lim_{x\to 0}x^2=0$ ，而 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，即 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ ，故 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 还是无穷小，

即 $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ 。

复习思考题、作业题：求 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x-1}{3x^2+6x+8}$ 。

下次课预习要点

教 学 后 记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 11 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 13 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">2.5 极限存在准则和两个重要极限</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">掌握两个重要极限。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">重点：两个重要极限的变形求法。

难点：理解两边夹定理。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

2.5 极限存在准则和两个重要极限

教学目的：掌握两个重要极限。

教学重点：两个重要极限的变形求法。

教学难点：理解两边夹定理。

一、夹逼准则：三数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$和$\{z_n\}$，如果从某项起：

(1)、$y_n \le x_n \le z_n$；

(2)、$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

用夹逼准则证明证明第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$。

例 1、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{1}$=3。

例 2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$。

二、单调有界数列必有极限：单调增加有上界的数列一定收敛；单调减少有下界的数列一定收敛。

根据此定理，可以证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$。

例 3、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$。

例 4、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x$。

解：令 $t=-x$，则 $x\to\infty$时， $t\to\infty$，于是

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\dfrac{1}{e}$。

或解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{-x})^{-x(-1)}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}$。

例 5、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x(1-\dfrac{1}{x})$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x(-1)}1 = [\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1} = e^{-1}$$ 。

例 6、求 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解：$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 。

三、习题

1、计算下列的极限

(1)、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x}$ 。

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x} = \lim_{x\to 0}\omega\frac{\sin\omega x}{\omega x} = \omega\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{\omega x} = \omega\times 1 = \omega$ 。

(2)、$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$ 。

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\frac{\sin 3x}{x}$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\frac{1}{1}1 = 3$$ 。

(3)、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ 。

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}\times 1\times 1 = \frac{2}{5}$ 。

(4)、$\lim_{x\to 0}x\cot x$ 。

解：$\lim_{x\to 0}x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0}x\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x\frac{x}{\sin x} = 1\times 1 = 1$$ 。

(5)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\times 1=2$ 。

(6)、 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ 。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x\times 1=x$ 。

2、计算下列的极限

(1)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}([1+(-x)]^{\frac{1}{-x}})^{-1}=e^{-1}$ 。

(2)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$ 。

(3)、 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\dfrac{1}{x})^{x}]^2=e^2$ 。

(4)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{1}{x})^{kx}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{1}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-k}=e^{-k}$。
复习思考题、作业题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 6x}$。
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 11 周	课 次	第 14 次
章 节 名 称	第三章、导数与微分 3.1、导数概念		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握导数的概念。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$。 难点：理解自变量增量$\Delta x$和因变量$\Delta y$。		

教学步骤及内容：

第三章、导数与微分

3.1、导数概念

教学目的：掌握导数的概念。

教学重点：$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$。

教学难点：理解自变量增量Δx和因变量Δy。

一、导数概念

1、定义：

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\Delta x)-\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\Delta x}\text{。}$$

$f(x)$在x_0的左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

$f(x)$在x_0的右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

2、 $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$ 。

注：如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

3、导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0，f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角。

4、曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0，y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

过切点 $M(x_0，y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线方程为：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ 。

例 1、求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数。

解：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$ ，

即 $(C)'=0$，介绍书中的求导基本公式。

例 2、求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数。

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=-1$， $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=1$ ，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

例 3、求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程。

解：$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ ，所求切线及法线的斜率分别为 $k_1=(-\dfrac{1}{x^2})|_{x=\frac{1}{2}}=-4$， $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{4}$ ，

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$ ，即 $4x+y-4=0$，

所求法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$ ，即 $2x-8y+15=0$。

例 4、设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ ax+b & x>0 \end{cases}$ ，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a、b。

解：$(e^x)'=e^x$，$(ax+b)'=a$ ，故 $e^0=a\Rightarrow a=1$，

可导肯定连续，故 $e^0=a0+b\Rightarrow b=1$。

二、函数的可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在，则

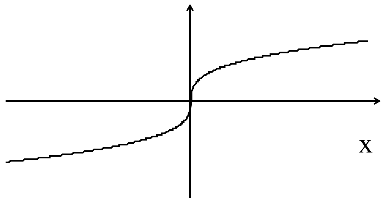
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

这就是说，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处是连续的， 所以，如果函数 $y=f(x)$在点 x 处可导，则函数在该点必连续。

另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点处可导。

例 5、 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty，+\infty)$内连续，但在点 $x=0$ 处不可导，这是因为函数在点 $x=0$ 处导数为无穷大

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=+\infty 。$$



三、导数的计算

1、导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

2、设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于(   )。

A、$f'(1)$　　B、$3f'(1)$　C、$\frac{1}{3}f'(1)$　　D、$f'(3)$

解：$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(1)$。

3、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=-f'(1)=-2$。

4、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$

$=2f'(1)=4$。

5、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)+f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$$

$=2f'(1)=4$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$=2f'(1)$

6、已知 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$ 等于____。 解：$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$ $=\dfrac{5}{4}\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f[(1-3\Delta x)+5\Delta x]-f(1-3\Delta x)}{5\Delta x}=\dfrac{5}{4}f'(1)=\dfrac{5}{2}$。
复习思考题、作业题：设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$ 等于(　)。 A、$f'(1)$　B、$2f'(1)$　C、$\dfrac{1}{2}f'(1)$　D、$f'(3)$
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 12 周	课 次	第 15 次
章 节 名 称	3.2、函数的求导法则		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	4
教 学 目 的 要 求	掌握函数导数的计算。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：求导法则。 难点：复合函数的求导。		

教学步骤及内容：

3.2、函数的求导法则

教学目的：掌握函数导数的计算。

教学重点：求导法则。

教学难点：复合函数的求导。

一、导数四则运算法则

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$都可导，则

(1)、$(u \pm v)'=u'\pm v'$,

(2)、$(C\,u)'=C\,u'$,

(3)、$(u\,v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$,

(4)、$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

二、复合函数的求导法则

如果 $u=g(x)$在点 x 可导，函数 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导，且其导数为：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$。

三、基本初等函数的倒数

(1)、$(c)'=0$　　(2)、$(x^n)'=nx^{n-1}$

(3)、$(e^x)'=e^x$　　(4)、$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5)、$(\sin x)'=\cos x$　　(6)、$(\cos x)'=-\sin x$

例 1、$f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$，求$f'(x)$及$f'(\frac{\pi}{2})$。

解：$f'(x)=3x^2-4\sin x$，故 $f'(\frac{\pi}{2})=3(\frac{\pi}{2})-4\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi^2}{4}-4$。

例 2、$y=e^x\sin x$，　求 y'。

解：$f'(x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$。

例 3、$y=\tan x$ ，求 y'。

解：$y'=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$。

例 4、求的 $f(x)=\sin x\cos x$ 导数。

解：$f'(x)=\sin' x\cos x+\sin x\cos' x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$。

例 5、求的 $f(x)=\frac{\ln x}{\cos x}$ 导数。

解：$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cos x-(\cos x)'\ln x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{x}\cos x+\sin x\ln x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\sin x\ln x}{x\cos^2 x}$。

例 6、 $y=\frac{1}{\cos x}$，求 y'。

解： $y'=(\frac{1}{\cos x})'=(\cos^{-1}x)'=-1\cos^{-2}x(\cos x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$。

例 7、 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求 y'。

解： $y'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'=2e^x\cos x$。

例 8、求导 $f(x)=(x^2+2x)e^x+\cos x$。

解： $f(x)=(x^2+2x)'e^x+(x^2+2x)(e^x)'+(\cos x)'$

$=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x-\sin x=(x^2+4x+2)e^x-\sin x$。

例 9、求导 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\sin x$。

解： $f'(x)=\frac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}+(\sin x)'$

$=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}+\cos x=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}+\cos x$。

例 10、求 $f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}+x^{25}+3$ 的导数。

解： $f'(x)=\frac{(\ln x)'\sin x-(\sin x)'\ln x}{\sin^2 x}+25x^{24}=\frac{\sin x-x\cos x\ln x}{x\sin^2 x}+25x^{24}$。

例 11、求 $f(x)=e^x\ln x+\tan x$ 的导数。

解： $f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'+(\frac{\sin x}{\cos x})'$

例 12、求下列函数的导数：

(1)、 $y=x\cdot\tan x$；　　(2)、 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

解：(1)、 $y'=x'\dfrac{\sin x}{\cos x}+x(\dfrac{\sin x}{\cos x})'=\tan x+x(\dfrac{\sin x}{\cos x})'$

$=\tan x+x\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\tan x+x\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan x+\dfrac{x}{\cos^2 x}$；

(2)、 $y'=\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

或 $y=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}=1+2(x-1)^{-1}$，

$y'=1'-2(x-1)^{-2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$。

例 13、设 $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^x$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，则 $f'\left(1\right)$ 的值为(　　)。

A. e　　B. e+1　　C. 2e　　D. e+2

解： $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^x$ 的导函数为 $f'\left(x\right)=x'\mathrm{e}^x+x(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=(1+x)\mathrm{e}^x$，

所以 $f'\left(1\right)=(1+1)\mathrm{e}^1=2\mathrm{e}$，故选 C。

例 14、求下列函数的导数：

(1)、 $y=x^4-3x^2-5x+6$；　　(2)、 $y=(x+1)(x+2)(x+3)$。

解：(1)、 $y'=4x^3-6x-5$；

(2)、 $y'=(x+1)'(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)'(x+3)++(x+1)(x+2)(x+3)'$

$=(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)$

$=x^2+5x+6+x^2+4x+3+x^2+3x+2$

$=3x^2+12x+11$。

例 15、 $y=e^{2x}$，求 y'。

解：令 $t=2x$，则 $y'=(e^{2x})'=e^t t'=e^{2x}(2x)'=2e^{2x}$。

例 16、 $y=e^{x^2}$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(e^{x^2})'=e^t t'=e^{x^2}(x^2)'=2xe^{x^2}$。

例 17、 $y=\ln 2x$，求 y'。

解：令 $t=2x$，则 $y'=(\ln 2x)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{1}{x}$。

或解： $y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$，故 $y'=(\ln 2)'+(\ln x)'=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$。

例 18、 $y=\ln x^2$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(\ln x^2)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{x^2}(x^2)'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$。

或解： $y=\ln x^2=2\ln x$，故 $y'=2\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$。

例 19、 $y=\sin 2x$，求 y'。

解：令 $t=2x$，则 $y'=(\sin 2x)'=t'\cos t=(2x)'\cos 2x=2\cos 2x$。

例 20、 $y=\cos x^2$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(\cos x^2)'=t'(-\sin t)=-(x^2)'\sin x^2=-2x\sin x^2$。

例 21、 $y=(x^3+2x^2+3x+6)^6$，求 y'。

解： $y'=6t^5t'=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(x^3+2x^2+3x+6)'$

$=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(3x^2+4x+3)$。

例 22、y=lnsin x，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：令 t=sinx，则 $y'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}$。

例 23、 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，求 y'。

解： $y'=[(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(1+[(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}]')=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x})']$

$$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}]$$

$$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}]。$$

例 24、$y=e^{x^3}$，求 y'。

解：$y'=(e^{x^3})'=(e^t)'t=e^{x^3}(x^3)'=3x^2e^{x^3}$。

例 25、$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 y'。

解：$y'=(\sin t)'(t)'=\cos\frac{2x}{1+x^2}(\frac{2x}{1+x^2})'$

$$=\frac{(2x)'(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}。$$

例 26、$y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 y'。

解：$y'=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1}(1-2x^2)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(-4x)=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$。

例 27、$y=\ln\cos(e^x)$，求 y'。

解：$y'=\frac{1}{\cos e^x}(\cos e^x)'=-\frac{1}{\cos e^x}\sin e^x(e^x)'=-\frac{e^x\sin e^x}{\cos e^x}$。

例 28、$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'。

解：$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$。

例 29、 $f(x)=x^2e^x+\frac{\ln x}{x}+\cos x+\frac{1}{\sqrt{x}}+8$，求 $f'(1)$。 解： $f'(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'+\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}-\sin x+(x^{-\frac{1}{2}})'$ $=2xe^x+x^2e^x+\frac{1-\ln x}{x^2}-\sin x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$， 故 $f'(1)=2e+e+1-\sin x-\frac{1}{2}=3e+\frac{1}{2}-\sin 1$。 例 30、 $f(x)=x^{-3.8}e^{x-2}+\frac{2\ln x}{x^3}+\cos x\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}+8$，求 $(f(1))'$。 解： $(f(1))'=0$。
复习思考题、作业题：已知 $y=\cos x\sin x$，求 y'。
下次课预习要点

教 学 后 记	