揭阳职业技术学院

师范教育系

《几何思维训练》教案

（2025-2026学年第2学期）

教师姓名：章慧芬

所授专业：小学教育

授课班级：251

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 1 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 1 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">ξ 1.1 预备知识</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">了解几何学的历史，激发学生对数学的兴趣和探究欲望
学会几个常用几何性质</td></tr>
<tr><td>思 人
政 目
育 标</td><td colspan="4">1、培养严谨求实的科学精神；
2、锤炼坚持不懈的意志品质；
3、增强文化自信与民族自豪感。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：几个常用几何性质的运用
难点：几个常用几何性质的证明</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

ξ 1.1 预备知识

通过了解几何学的历史，结合九章算术、几何原本等中外经典，讲好中国古代数学家刘徽和祖冲之的贡献，树立文化认同。

讲好欧几里得的“几何原本”，让学生可以深刻体会到数学逻辑的严密性和演绎体系的力量，从而激发学生对数学的兴趣和探究欲望，进一步得到思维上的拓展和提升，对他们未来的学习和生活产生积极的影响。

几个常用的几何性质

1、在一个圆内，同弧或等弧所对的弦相等，所对的圆周角相等或互补。

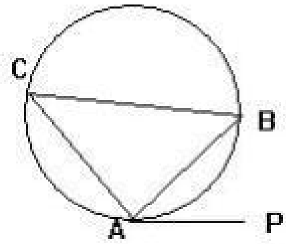
2、在一个圆内，同弧或等弧所对的圆心角是圆周角的两倍。

3、圆的内接四边形对角互补。

关键是 180^0，有三种做法，(1)、利用三角形内角 180^0；

(2) 、利用圆周角 360^0；

(3)、利用直径所对的角为 90^0。

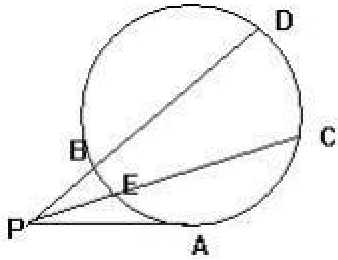


4 、AP 是圆的切线，求证7 PAB=7 BAC

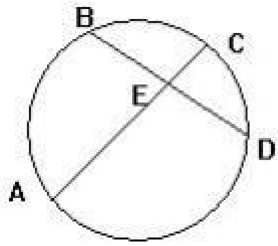
5、切割线定理：

PA 切圆于 A，PC 交圆于 E、C，PD 交圆于 B、D。

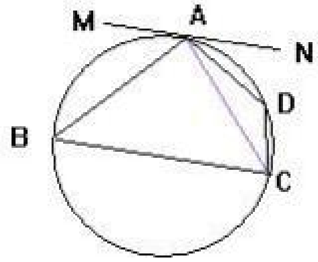
求证：$PA^2=PE\times PC=PB\times PD$



6、圆内弦 BD、AC 相交于 E，求证：AE× EC=BE× ED。

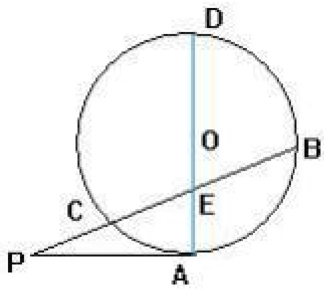


7、BC 是四边形 ABCD 的外接圆的直径，MN 切该圆于 A，上MAB=25^{0}，求上D。



解：上 ACB=上 MAB=25^{0}，用到 AB 是直径，即上BAC=90^{0}，故上B=65^{0}，故上D=115^{0}。

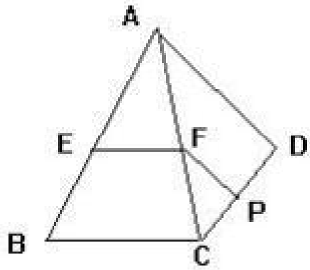
8、PA 切圆于 A，PB 交圆于 B、C，上BPA=30^{0}，PA=$2\sqrt{3}$，PC=1，求该圆半径。



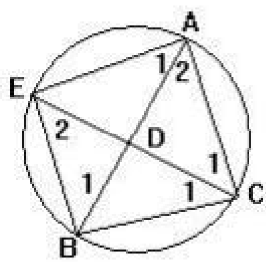
解：AE=$2\sqrt{3}\tan 30^{0}=2$，PE=4，故 CE=EP-PC=3，

又由切割线定理 PA^{2}=PB× PC，即 12=1 × PB=PB，故 BC=11，即 BE=8，由 CE× BE=AE× ED，故 24=2 × ED，故 ED=12，故半径=7。

9、四边形 ABCD 中，EF∥BC，FP∥AD，求：$\frac{EF}{BC}+\frac{FP}{AD}$



10、圆内接ΔABC的上C 的平分线 CD 交圆于 E，连接 BE，已知 BD=3，CE=7，BC=5，求 BE。



解：Δ CAD 和 Δ BED 和 Δ CEB 相似，故 BE=$\frac{CE\times BD}{BC}=\frac{21}{5}$。

复习思考题、作业题：勾股定理、射影定理
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 2 周	课 次	第 2 次
章 节 名 称	1.2 等线段的证法		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	
教 学 目 的 要 求	两条相等线段的证法。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：构造全等三角形。 难点：怎么作辅助线。		

教学步骤及内容：

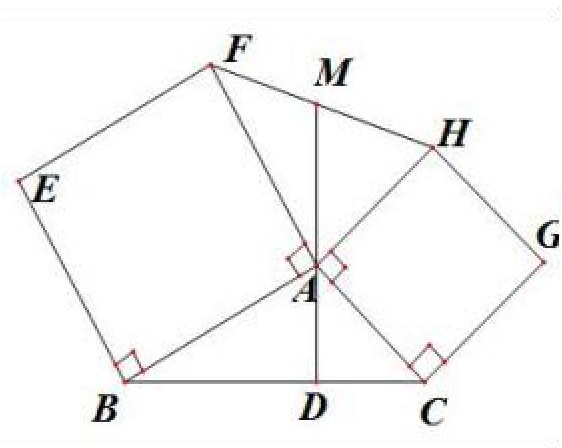
1.2 等线段的证法

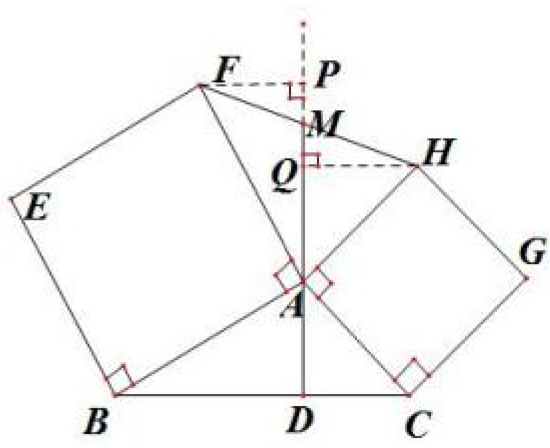
教学目的：两条相等线段的证法。
教学重点：构造全等三角形。
教学难点：怎么作辅助线。

证明等角最常用的方法就是利用相似三角形，求证等线段最常用的方法就是利用两个三角形全等。

1、在ΔABC的两条边 AB 和 AC 上向外作正方形 ABEF 和 ACGH，

求证：BC 边上的高 AD 平分 FH。





分析：主体是ΔABC，但一定要用到ABEF和ACGH是正方形，即AB=AF和AC=AH。

证明：作FP⊥DA交DA于P，作HQ⊥DA交DA于Q，上BAD+上BAF+上FAP=180^0，故

上DBA=上FAP，故ΔBDA与ΔAPF全等，即FP=AD，

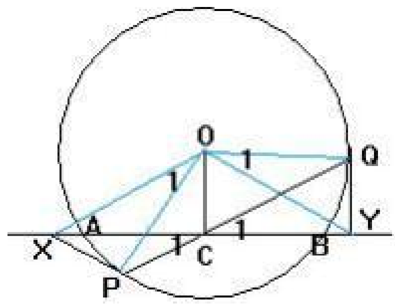
同理，HQ=AD，故FP=HQ，故ΔFMP与ΔHMQ全等，故AD平分FH。

利用两个三角形全等来求证两条线段相等，首先必须求证全等三角形，在这种情况下求证全等三角形所需要的条件一定需要角相等，而求证角相等一般用相似和在一个圆内，同弧或等弧所对的弦相等，所对的圆周角相等或互补。

2、C是圆O的一条弦的中点，PQ是该圆过C的另一条弦，XP切圆于P，交AB于X，QY切圆于Q交AB于Y，

求证：①、XP=QY

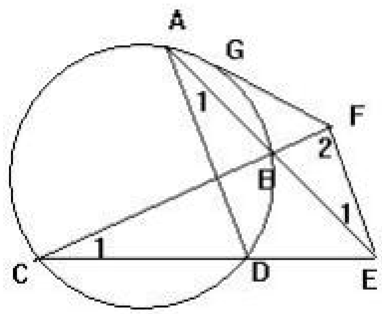
②、AX=BY



证明：XP⊥OP，XC⊥OC，故X、P、C、O四点共圆于以XO为直径的圆，故上XOP=上XCP，

QY⊥OQ，CY⊥OC，故Y、Q、C、O四点共圆于以YO为直径的圆，故上QOY=上QCY，

故上XOP=上QOY，故ΔXOP和ΔYOQ，故XP=QY和OX=OY，显然AC=BC，故AX=BY。



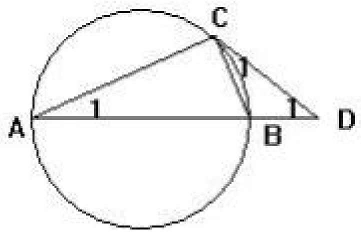
3、圆的二弦AB、CD相交于圆外一点E，由E引AD的平行线与BC相交于F，FG切圆于G，

求证：EF=FG

证明：ΔEFB与ΔCFE相似，故$\dfrac{EF}{CF}=\dfrac{BF}{EF}$，

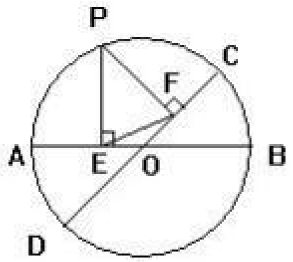
即$EF^2=CF\times BF$，由切割线定理$GF^2=CF\times BF$可知EF=FG

4、AB 是圆的直径，弦 AC 使∠BAC=30^{0}，过点 C 引切线交 AB 的延长线于 D，求证：AC=CD

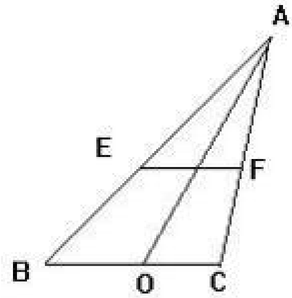


证明：∠BAC=∠BCD=30^{0}，∠ABC=60^{0}，故∠BDA=30^{0}，故三角形 ACD 是等腰三角形。

5、AB、CD 是圆的直径，P 为圆上任意一点，PF⊥DC，PE⊥AB。
求证 EF 为一定值。

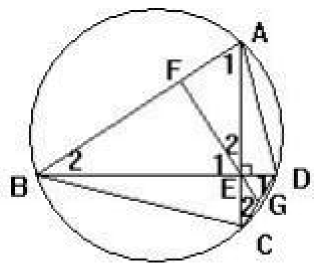


证明：PF⊥DC，PE⊥AB，故四边形 PEOF 对角互补，故 P、E、O、F 四点共圆，由于∠EOF 固定，EF 为该圆周角所对的弦，故 EF 为一定值。



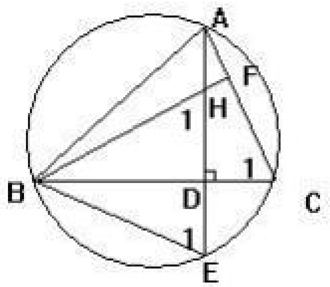
6、EF 与三角形 ABC 的底边 BC 平行，AO 是三角形 ABC 的中线，D 为 EF 和 AO 的交点。
求证：ED=DF。

7、A、B、C、D 四点共圆，AC⊥BD，FE⊥AB 交 CD 于 G，求证：CG=GD。



证明：∠CDB=∠CAB，又∠AFE=CED=90^{0}，故∠DCE=∠AEF=∠GEC=∠ABE，即三角形 CEG 是等腰三角形，同理，三角形 EGD 也是等腰三角形，故 CG=GE=GD。

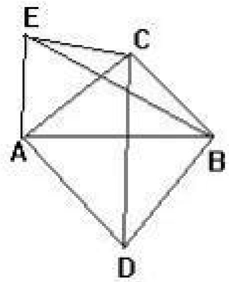
8、设▿ABC 中 BC 边上的高为 AD，直线 AD 交外接圆于 E，H 是垂心。求证：HD=DE。



分析：若 HD=DE，则▿BDH 和▿BDE 必全等，即只需证明 BH=BE

证明：7 BFC=7 BDH=90^{0}，故7 BHD=7 BCA=7 BEA，故 BH=BE，故▿BDH 和▿BDE 全等，故 HD=DE。

9、在▿ABC 中，分别以 AB 和 AC 为一边作等边三角形 ABD 和 ACE，求证：CD=BE



分析：利用全等三角形，并且必须用到两个等边三角形。

证明：在▿ABE 和▿ADC 中，AB=AD，7 EAB=7 CAD，AE=AC，故▿ABE 和▿ADC 全等，故 CD=BE。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 3 周	课 次	第 3 次
章 节 名 称	1.3 等角的证法		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	两个相等角的证法。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：构造相似三角形。 难点：找出相似三角形。		

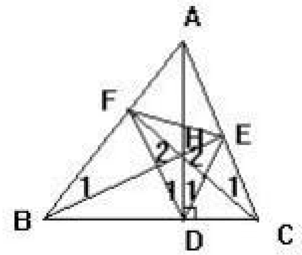
教学步骤及内容：

1.3 等角的证法

证明等角最常用的方法就是利用相似三角形和在一个圆内，同弧或等弧所对的圆周角相等，求证二个三角形相似一般求证两组对边相等，如果利用在一个圆内，同弧或等弧所对的圆周角相等，则首先必须证明四点共圆，而证明四点共圆一般用对角互补。

1、设 AD、BE、CF 是锐角 ▿*ABC* 的高，交点为 H。

求证：AD 平分7 FDE。



证明：7 FBE+ 7 FHB=90^0，7 ECF+ 7 EHC=90^0，

又7 FHB= 7 EHC，故7 FBE= 7 ECF。

（其实也可以 ▿*FBC* 的外接圆是以 BC 为直径的圆，

▿*EBC* 的外接圆是以 BC 为直径的圆，故 ▿*FBC* 的外接圆和 ▿*EBC* 的外接圆是同圆，

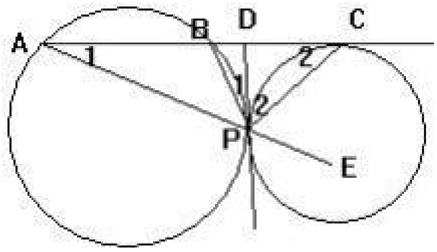
故 B、C、E、F 四点共圆，故7 FBE= 7 ECF。）

由于7 BFH= 7 BDH=90^0，故 B、F、H、D 四点共圆，故7 FBE= 7 FDH，

由于7 CEH= 7 CDH=90^0，故 D、C、D、H 四点共圆，故7 FCE= 7 EDH，

故7 FDH= 7 EDH。

2、二圆外切于 P，一圆在其上一点 C 的切线交另一圆于 A、B。

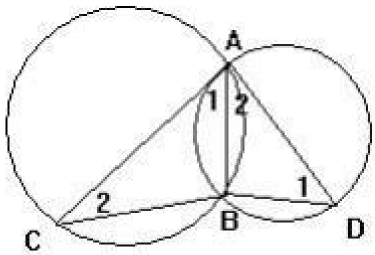


求证：PC 是7 APB 的外角7 BPE 的角平分线。

证明：DP 是两圆的切线，故7 A= 7 BPD，

7 DPC= 7 DCP，故7 EPC= 7 1+ 7 2= 7 BPC。

3、两圆相交于两点 A、B，在每一圆中各作一弦 AC、AD 使切于另一圆。



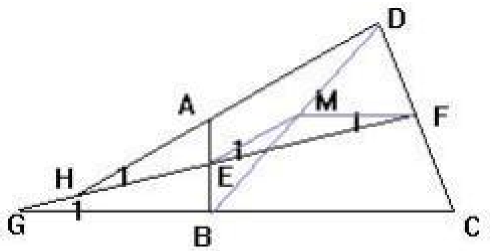
求证：7 ABC= 7 ABD。

证明：AD 是切线，故7 BAD= 7 C= 7 2，

AC 是切线，故7 BAC= 7 D= 7 1，

故7 ABC= 7 ABD= 180^0 - 7 1 - 7 2。

4、AD=BC，E、F 分别是 AB 和 DC 的中点，DA 和 FE 交于 H，CB 和 FE 交于 G。



求证：7 DHF= 7 CGF。

分析：一定要用到 E、F 是中点和 AD=BC，作 EM 平行 AD，MF 平行 BC，这样 EM 可以代替 AD，MF 可以代替 BC，就用到 AD=BC，E、F 分别是 AB 和 DC 的中点。

证明：连接 BD，作 EM 平行 HD 交 BD 于 M，则 EM= $\frac{1}{2}$ AD= $\frac{1}{2}$ BC=MF，故

7 MEF= 7 MFE= 7 1，

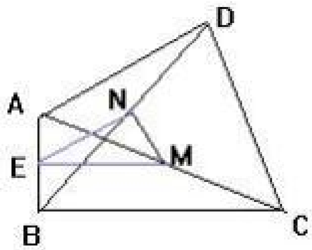
EM 平行 HD，故7 DHF= 7 MEF= 7 1，

FM 平行 GC，故7 CGF= 7 MFE= 7 1，

故7 DHF= 7 CGF。

5、AD=BC，M、N 分别是 AC 和 BD 的中点，

求证：AD 与 MN 的夹角和 BC 与 MN 的夹角相等。



分析：一定要用到 M、N 是中点和 AD=BC，作 EN 平行 AD，作 EM 平行 BC，这样 EN 可以代替 AD、EM 可以代替 BC，也可以和 MN 围成三角形。

证明：作 EN 平行 AD，作 EM 平行 BC，则

EN=$\frac{1}{2}$AD=$\frac{1}{2}$BC=EM，

故三角形 EMN 是等腰三角形，

故 AD 与 MN 的夹角和 BC 与 MN 的夹角相等。

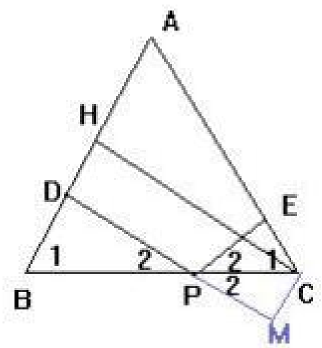
复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 4 周	课 次	第 4 次
章 节 名 称	1.4 和差倍分的证法和定值问题		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	学会求线和角的和与差，学会求定值问题。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：通过延长或截取使得两条线段相等。 难点：求定值问题。		

教学步骤及内容：

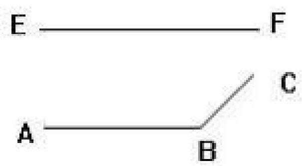
1.4 和差倍分的证法和定值问题



1、已知ΔABC是等腰三角形，AB=AC，P 为底边 BC 上任一点，PD⊥AB 交 AB 于 D，PE⊥AC 交 AC 于 E，CH⊥AB 交 AB 于 H。

求证：DP+PE=CH。

证明：延长 DP 到 M 使 PM=PE，AB=AC，故 ∠ABC=∠ACB=∠1，∠BDP=∠CEP=90^0，故∠BPD=∠CPE=∠CPM=∠2，故ΔPCE和ΔPCM全等，故∠PCM=∠ACB=∠ABC=∠1，故 AB∥CM，显然 HC∥DM，故四边形是平行四边形，故 DP+PM=CH，即 DP+PE=CH。



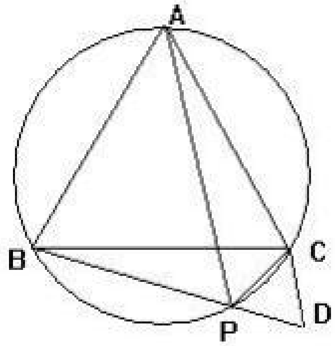
2、求证 AB+BC=EF 一般有两种：

(1)、延长 AB 到 D 使 BD=BC，然后证明 EF=AD;

(2)、在 EF 上取 D 使 ED=AB 然后证明 DF=BC。

其实第一题也可以按照第二种做法去做。

3、等边三角形外接圆上任一点的连线中，最长的线是其余两边之和。P 是等边三角形 ABC 的外接圆任一点.



求证：AP=BP+CP。

证明：延长 BP 到 D，使 PD=PC，则在ΔBCD和ΔACP中，

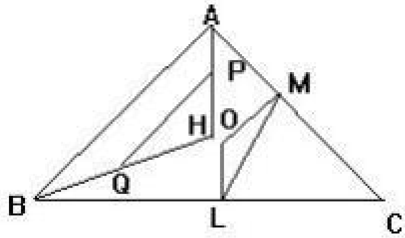
BC=CA，∠CBP=∠CAP，注意∠APB=∠APC=∠60^0，

故∠DPC=∠60^0，由于 PD=PC，故ΔPCD也是等边三角形，故∠PCD=∠60^0，故∠BCD=∠ACP=∠60^0，故ΔBCD和ΔACP全等，

故 AP=BD，故 AP=BP+CP。

4、 H 是三角形 ABC 的垂心，O 是外心，OL⊥BC 交 BC 于 L。

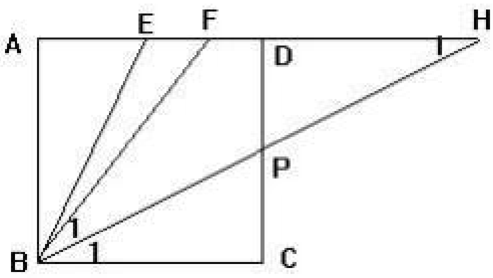
求证：AH=2OL。



证明：设 P、Q 是 AH 和 BH 的中点，设 M 是 AC 的中点，O 是外心，OL⊥BC，故 L 也是 BC 中点，故 2PQ 和 2ML 都平行且相等于 AB，故 PQ 和 ML 平行且相等。又 AH、OL 都垂直于 BC，故 AH∥OL，同理，QH∥OM，故ΔHQP三ΔOML，故 OL=HP=$\frac{1}{2}$AH。

5、E 为正方形 ABCD 中 AD 的中点，F 是 ED 的中点。

求证：2∠ABE=∠CBF。



证明：作∠CBF 的角平分线 BPH 交 AD 于 H，则∠CBP=∠PBF=PHD，

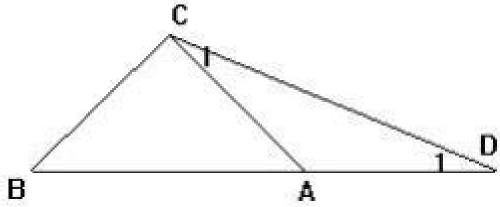
下证ΔAEB三ΔCPB，不妨设 AB=1，

FH=BF=$\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$，故 DH=1，故 P 是 CD 的中点，故ΔAEB三ΔCPB，

故∠ABE=∠CBP，故 2∠ABE=∠CBF。

6、在ΔABC中，延长 BA 使 AD=AC。

求证：$\angle BCD=90^0+\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$。



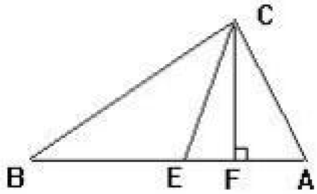
证明：$\angle BCD=\angle C+\angle 1$，又

$\angle BCD=180^0-\angle B-\angle 1$，相加可得：

$2\angle BCD=\angle C+\angle 1+180^0-\angle B-\angle 1$，

故：$\angle BCD=90^0+\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$。

7、CE 平分∠C 交 AB 于 E，CF⊥AB 交 AB 于 F。



求证：$2\angle ECF=\angle A-\angle B$。

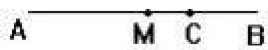
证明：$2\angle BCE+\angle A+\angle B=180^0$，

$\angle ECF=\angle BCE-\angle FCA=\angle BCE-(90^0-\angle A)=\angle BCE+\angle A-90^0$，

故$\angle BCE=90^0+\angle ECF-\angle A$，代入$2\angle BCE+\angle A+\angle B=180^0$可得，

$2(90^0+\angle ECF-\angle A)+\angle A+\angle B=180^0$，

故：$2\angle ECF=\angle A-\angle B$。



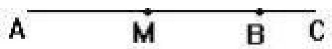
8、已知 M 是 AB 的中点，C 在 AB 上。

求证：2CM=AC - CB。

证明：$CM=AC-AM=AC-\frac{1}{2}AB=AC-\frac{1}{2}(AC+CB)=\frac{1}{2}(AC-CB)$，

故：2CM=AC - CB。

9、已知 M 是 AB 的中点，C 在 AB 的延迟线上。

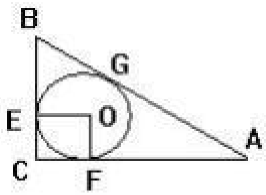


求证：2CM=AC+BC。

证明：$CM=MB+BC=\frac{1}{2}AB+BC=\frac{1}{2}(AC-BC)+BC=\frac{1}{2}(AC+BC)$

故：2CM=AC+BC。

10、证明：直角三角形两直角边之和等于斜边与内切圆直径之和。



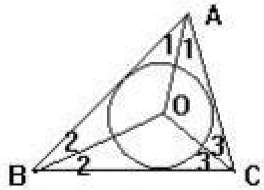
已知 RtΔABC 中，角 C 是直角，RtΔABC 的内切圆切 AB、BC、CA 于 G、E、F。

求证：BC+CA=AB+2r。（其中r 为内切圆半径）

证明：BE=BG，GA=AF，CE=CF=r，

故：BC+CA=BE+AF+CE+CF=BG+AF+2r=AB+2r。

11、O 为ΔABC 的内心，求证：∠BOC=$90^0+\frac{1}{2}$∠A。



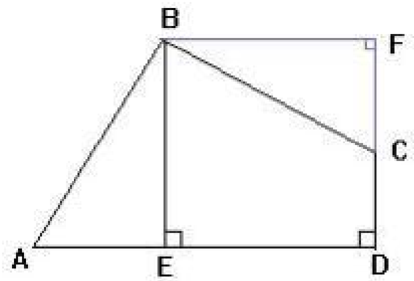
证明：∠BOC=180^0 - ∠2 - ∠3，

又 2∠1+2∠2+2∠3=180^0，故∠1+∠2+∠3=90^0，即

∠2+∠3=90^0 - ∠1，代入∠BOC=180^0 - ∠2 - ∠3 可得，

∠BOC=180^0 -（90^0 - ∠1）=90^0+∠1=$90^0+\frac{1}{2}$∠A。

12、 在四边形 ABCD 中，AB⊥BC，CD⊥AD，$AD^2+CD^2=2AB^2$。



(1)、求证：AB=BC;

(2)、若 BE⊥AD 交 AD 于 E，求证：BE=AE+CD。

证明：(1)、由 $AD^2+CD^2=2AB^2$ 可得：

$AC^2=2AB^2$，又 AB⊥BC，故 AB=BC;

(2)、作 BF⊥CD 交 CD 于 F，则ΔABE≌ΔCBF，故 AE=CF，要证 BE=AE+CD，只需证 BE=CF+CD=FD，又 EBFD 是矩形，故 BE=FD。

13、在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC，∠ABC=90^0，E 是 CD 的中点，过 E 作 DC 的垂线交 AB 于 P，交 BC 于 M，点 F 在 ME 上，CF=AD，MF=MA。

(1)、若∠MFC=120^0，求证：AM=2MB;

(2)、求证：∠MPB=$90^0-\frac{1}{2}\angle FCM$。

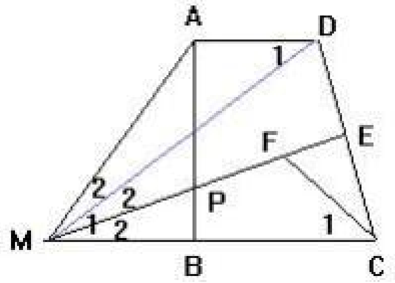
（1）分析：一定要用到 CF=AD，MF=MA，故必须找两个三角形包括这 4 条边。

并且要注意 ME 是垂直平分线。

证明：(1)、ME 是 CD 的垂直平分线，故 MD=MC，又 CF=AD，MF=MA，

故ΔAMD三ΔFMC，故∠MAD=∠MFC=120^0，

故∠MAB=30^0，故 AM=2MB。



(2)、ΔAMD三ΔFMC，故

∠ADM=∠DMC=∠MCF，注意 ME 是垂直平分线，故∠CME=∠EMD=∠DMA=∠2=$\frac{1}{2}\angle 1$，

故∠MPB=$90^0-\angle 2=90^0-\frac{1}{2}\angle 1=90^0-\frac{1}{2}\angle FCM$ 。

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 5 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 5 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">1.5 平行线的证法</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">学会求证两条线平行。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">重点：1、角⑴、同位角相等；⑵、内错角相等；⑶、同旁内角相等
2、边：AB平行且相等CD
难点：通过相似三角形求证同位角相等，内错角相等，同旁内角互补。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

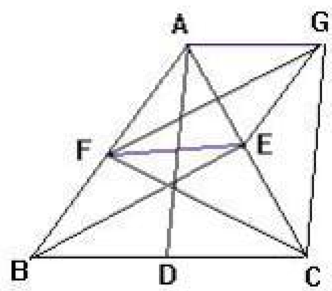
1.5 平行线的证法

1、求证平行一般只有两种：

$$\begin{cases} 1、角\begin{cases} ⑴、同位角相等 \\ ⑵、内错角相等 \\ ⑶、同旁内角相等 \end{cases} \\ 2、边：AB平行且相等CD \end{cases}$$

2、AD、BE、CF 是ΔABC 的中线，若直线 EG∥AB，FG∥BE。

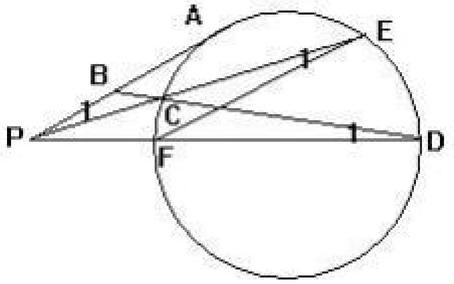
求证：CG∥AD。



证明：EG∥AB，FG∥BE，故 BFGE 是平行四边形，故 GE 平行且相等 BF，即 GE 平行且相等 AF，故 AG 平行且相等 FE，FE 平行且相等 DC，故 AG 平行且相等 DC，故 AGDC 是平行四边形，

故 CG∥AD。

3、由圆外一点 P 作切线 PA，A 为切点，由 PA 的中点 B 作割线 BD 交圆于 C、D，PC 交圆于 E，PD 交圆于 F。

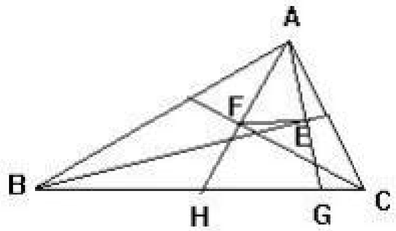


求证：FE∥PA。

证明：$BP^2=BA^2=BC\times BD$，故 $\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{BD}{BP}$，上 PBD 是公共角，故上 BPE=上 PDB=上 PEF，故 FE∥PA。

4、从三角形一顶点 A 向另两角的平分线作垂线 AE、AF，E、F 是垂足。

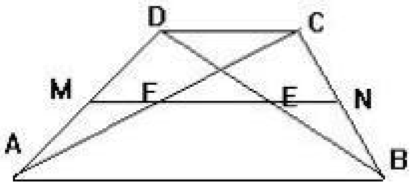
求证：FE∥BC。



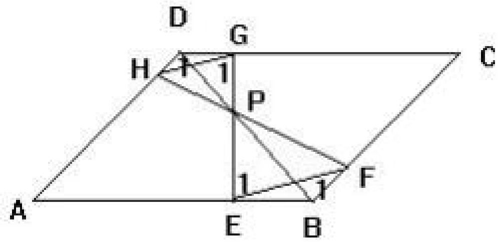
证明：BE 是角 B 的平分线，AG⊥BE，故 E 是 AG 的中点，同理 F 是 AH 的中点，故 FE∥BC。

5、CD∥AB，E、F 分别是 DB 和 CA 的中点，

求证：EF∥AB。



证明：设 M、N 分别是 AD 和 BC 的中点，则 MF∥CD，NE∥CD，故 EF∥CD，即 EF∥AB。



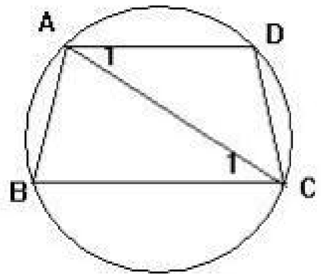
6、ABCD 是平行四边形，P 是 BD 上任一点，过 P 的直线 GE、HF 分别垂直 AB 和 BC，GE 交 AB 于 E，交 CD 于 G，HF 交 BC 于 F，交 AD 于 H。

求证：HG∥EF。

证明：PG⊥CD，PH⊥AD，故H、P、G、D 四点共圆，故上 PDH=上 PGH，由于 AD∥BC，故上 PDH=上 PBC，同理，F、P、E、B 四点共圆，故上 PBC=上 PEF，故上 PGH=上 PEF，故 HG∥EF。

7、A、B、C、D 四点共圆，AB=CD。

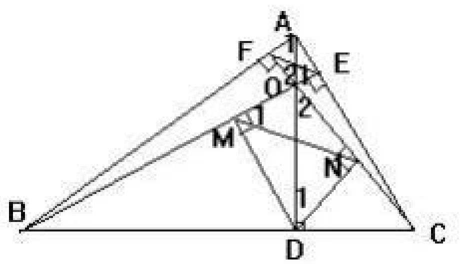
求证：AD∥BC。



证明：AB=CD，故∠CAD=∠ACB，故 AD∥BC。

8、AD、BE、CF 是三角形 ABC 的高，从垂足 D 引 DM⊥BE 于 M，引 DN⊥CF 于 N。

求证：MN∥FE。

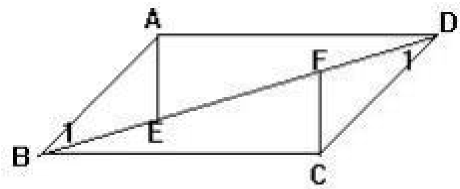


证明：设垂心为 O，OF⊥AF，OE⊥AE 可知 A、F、O、E 四点共圆，故∠OEF=∠OAF=∠1，则∠FOA=∠COD=∠2，注意到∠1+∠2=90^0，故∠ODN=∠1，

由于 DM⊥BE，DN⊥CF，故 MDNO 四点共圆，故∠OMN=∠ODN=∠1=∠OEF，故 MN∥FE。

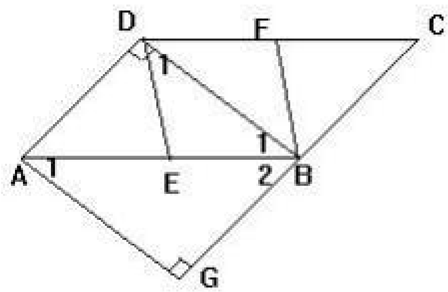
9、在平行四边形 ABCD 中，E、F 是对角线 BD 上的两点，BE=DF。

求证：AE∥CF。



证明：显然，∠DBA=∠BDC，BE=DF，AB=CD，故ΔABE≌ΔCDF，故∠BEA=∠CFD，即∠AED=∠CFB，故 AE∥CF。

10、在平行四边形 ABCD 中，E、F 是 AB、CD 的中点，过 A 作直线 AG 使AG∥DB 交 CB 的延长线于 G。



求证：①、DE∥BF；

②、若∠G=90^0，求证：四边形 DEBF 是菱形。

求证：①、显然，DF∥EB，又 DF=$\frac{1}{2}$DC=$\frac{1}{2}$AB=EB，故 DF 和 EB 平行且相等。故 EBFD 是平行四边形，故 DE∥BF；

②、显然 AD∥BG，AG∥DB，故 AGBD 是平行四边形，又上 G=90^{0}，故 AGBD 是矩形，故上 ADB=90^{0}，又 DE 是直角三角形 ADB 的中线，故 DE=EB，

由①可知 EBFD 是平行四边形，故四边形 DEBF 是菱形。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教 学 后 记	

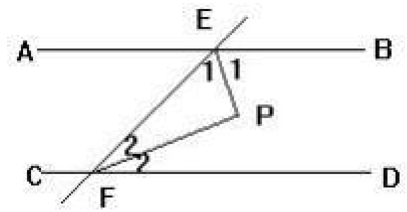
授课时间	第 6 周	课 次	第 6 次
章 节 名 称	1.6 垂直的证法		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	学会求证两条线垂直。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：求证直角和勾股定理 难点：找出 90 度角。		

教学步骤及内容：

1.6 垂直的证法

1、AB∥CD，直线 EF 交 AB 于 E，交 CD 于 F，∠BEF 的平分线与∠DFE 的平分线相交于 P。

求证：EP⊥FP。



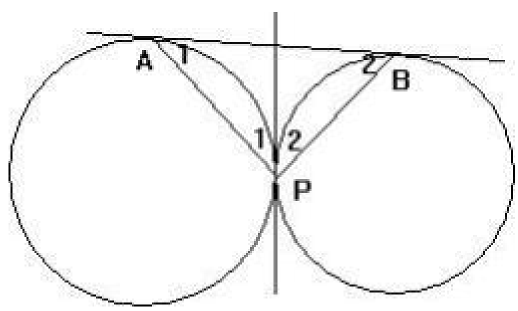
证明：设∠DFP=∠EFP=∠2，

$\angle BEP=\angle CEP=\angle 1$，又 $\angle 1+\angle 1+\angle 2+\angle 2=180^0$，

故 $\angle 1+\angle 2=90^0$，故 EP⊥FP。

2、已知两圆外切于 P，AB 是公切线，A、B 是切点。

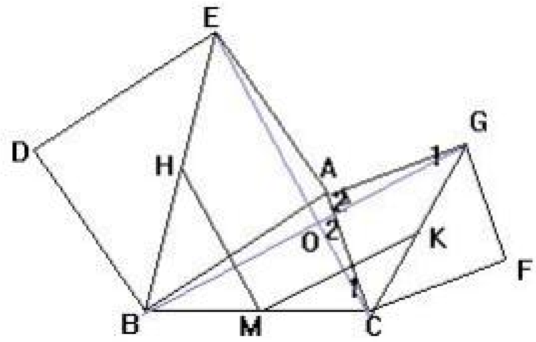
求证：$\angle APB=90^0$。



证明：∠BAP=∠PAB，∠ABP=∠PBA，

故 $2\angle APB=180^0$，即 $\angle APB=90^0$。

3、在三角形 ABC 中，以 AB 和 AC 为边向外作正方形 BAED 和 ACFG，设 H、M、K 分别为 BE、BC 和 CG 的中点。



求证：①、HM⊥MK；

②、HM=MK。

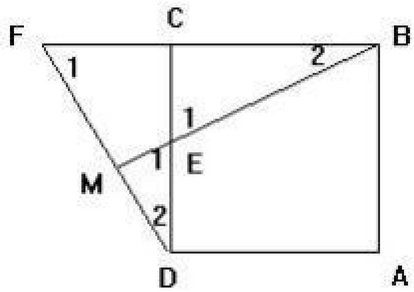
证明：①、连接 EC 和 BG（这样才能用到 H、M、K 是中点），则 2HM 平行且相等于 EC，2MK 平行且相等于 BG，故可以改证 EC⊥BG。

在ΔEAC 和ΔBAG 中$\begin{cases} EA = BA \\ \angle EAC = \angle BAG \\ AC = AG \end{cases}$，故ΔEAC≌ΔBAG,

故∠BGA=∠ECA=∠1，由于∠CAG=90^0，故∠COG=90^0，即 EC⊥BG。

②、由于ΔEAC≌ΔBAG，故 EC=BG，即 HM=$\frac{1}{2}$EC=$\frac{1}{2}$BG=MK。

4、在正方形 ABCD 的 CD 边上取一点 E，在 BC 的延长线上取一点 F，CF=CE。求证：BE⊥DF。

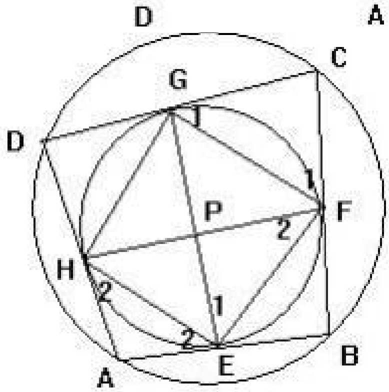


证明：延长 BE 交 FD 于 M，

CF=CE，CD=BC，∠FCD=∠ECB=90^0，

故ΔFDC≌ΔEBC，故∠F=∠CEB=∠MED=∠1，

∠FDE=∠EBC=∠2，且∠1+∠2=90^0，故 BE⊥DF。



5、两个圆分别是四边形 ABCD 的外接圆和内切圆，切点是 G、H、E、F。求证 GE⊥HF。

证明：即证∠PEF+∠PFE=90^0。

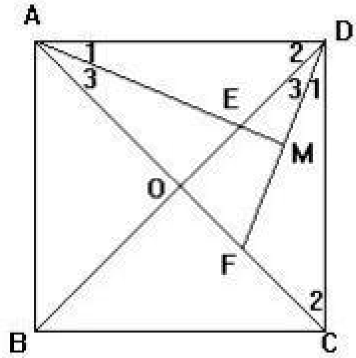
∠CGF=∠CFG=∠PEF=∠1，

∠AHE=∠AEH=∠EFP=∠2，

又∠A+∠2+∠2=180^0，∠C+∠1+∠1=180^0，∠A+∠C=180^0，

相加可得∠A+∠2+∠2+∠C+∠1+∠1=360^0，即 2∠2+2∠1=180^0，

即上PEF+上PFE=90^0。



6、正方形ABCD中，AC和BD交于O，E、F分别在OD、OC上，DE=CF，AE的延长线交DF于M。

求证：AM⊥DF。

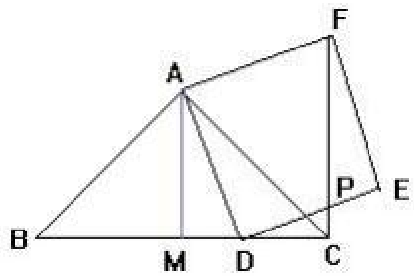
分析：用到DE=CF，和AD=CD，当然就是ΔADE≌ΔDCF。

证明：在ΔADE和ΔDCF中，$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \text{上}DCF = 45^\circ \\ DE = CF \end{cases}$，故ΔADE≌ΔDCF，

故上DAE=上CDF=上1，上OAD=上ODC=45^0，

故上OAE=上ODF，又上AEO=上DEM，故上AMD=上AOE=90^0。

7、在ΔABC中，AB=AC，上BAC=90^0，D在BC上，以AD为一边向右作正方形ADEF，CF交DE于P。



①、求证：CF⊥BC;

②、若AC=$4\sqrt{2}$， CD=2，求CP。

①、证明：上BAD=90^0-上DAC，

上CAP=90^0-上DAC，故上BAD=上CAF，

在ΔBAD和ΔCAF中，$\begin{cases} BA = CA \\ \angle BAD = \text{上}CAF = 45^\circ \\ AD = AF \end{cases}$，故ΔBAD≌ΔCAF，

故上ACP=上B=45^0，显然上BCA=45^0，故CF⊥BC。

②、作AM⊥BC交BC于M，BC=8，MD=MC-DC=2，AM=4，

显然，ΔDCP≈ΔAMD，故$\frac{AM}{CD}=\frac{MD}{CP}$，即$\frac{4}{2}=\frac{2}{CP}$，故CP=1。

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	

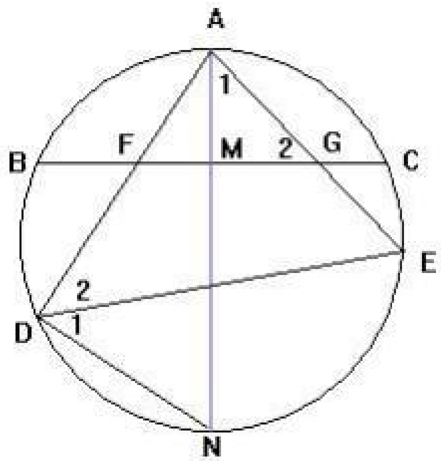
授课时间	第 7 周	课 次	第 7 次
章 节 名 称	1.7 四点共圆		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	学会求证四点共圆。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：利用四点共圆得到同弧或等弧所对的圆周角相等。 难点：找出对角互补。		

教学步骤及内容：

1.7 四点共圆的证法

教学目的：学会求证四点共圆。
教学重点：利用四点共圆得到同弧或等弧所对的圆周角相等。
教学难点：找出对角互补。

1、证明四点共圆一般是证明对角互补。



2、设 A 是弧 BAC 的中点，过 A 作二弦 AD 及 AE，并设这两直，线交 BC 于 F 和 G。

求证：D、E、F、G 四点共圆。

分析：必须体现 A 是中点，过 A 作直径。

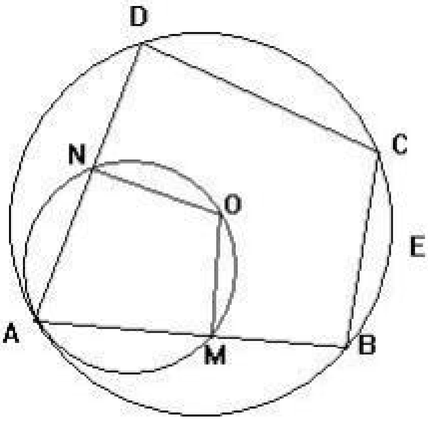
证明：过 A 作直径 AN 交 BC 于 M，

上NAE=上NDE=上1，则上MGA+上1=90˚，

上1+上EDA=90˚，故上MGA=上EDA，

即上EDA+上FGE=180˚，故 D、E、F、G 四点共圆。

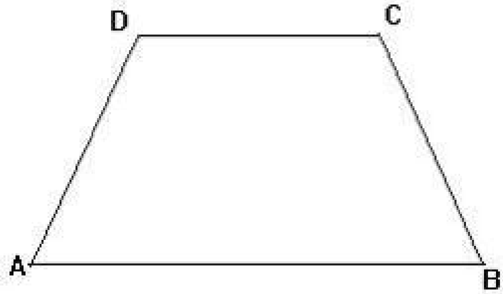
3、O 是四边形 ABCD 的外接圆的圆心，N、M 是 AD 和 AB 的中点。



求证：A、M、O、N 四点共圆。

证明：ON 是 AD 的中垂线，OM 是 AB 的中垂线，故 ONTAD，OMTAB，故 A、M、O、N 四点共圆。

4、ABCD 是等腰梯形，AB∥CD。



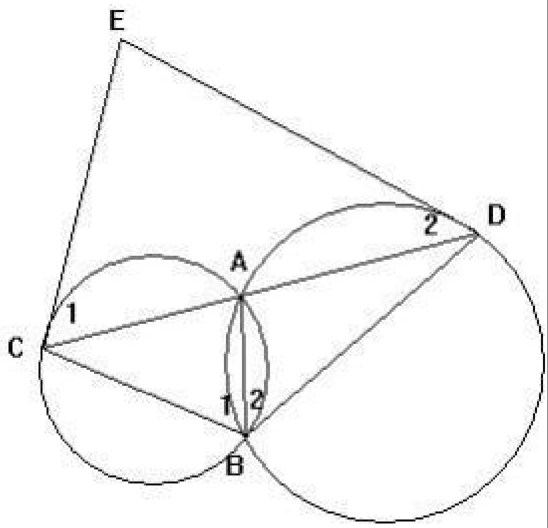
求证：A、B、C、D 四点共圆。

证明：7 A=7 B，AB∥CD，

故7 D+7 A=180˙，

即7 D+7 B=180˙，故 A、B、C、D 四点共圆。

5、两圆相交于 A 和 B，过 A 任引一条直线交两圆于 C 和 D，在 C 和 D 引各该圆的切线交于 E。



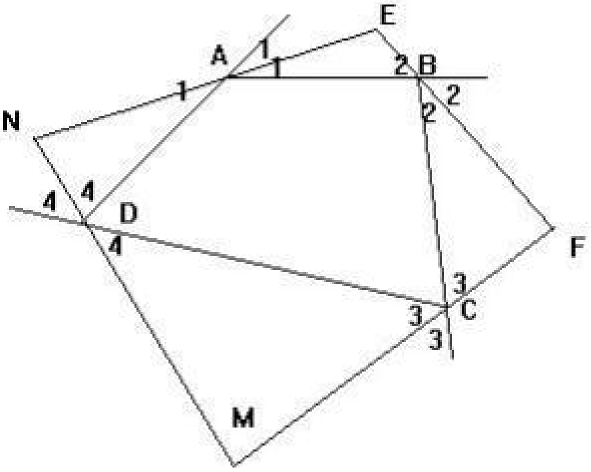
求证：B、C、D、E 共圆。

证明：CE 是切线，故7 ECD=7 CBA=7 1，

7 EDC=7 ABD=7 2，又7 E+7 1+7 2=180˙，

即7 E+7 CBD=180˙，故 B、C、D、E 共圆。

6、ABCD 是四边形，AE、BF、CM、DN 分别是上 A、上 B、上 C、上 D 的外角的平分线，其中 E、F、M、N 是这四条角平分线的交点。



求证：E、F、M、N 四点共圆。

证明：四边形的外角和是 360°，

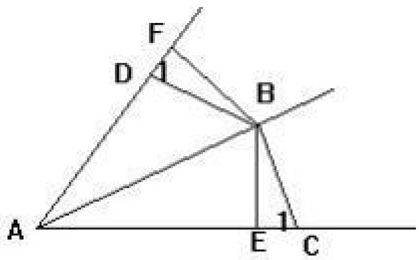
即 2 上 1+2 上 2+2 上 3+2 上 4=360°，

即上 1+上 2+上 3+上 4=180°，又上 1+上 2+上 E+上 3+上 4+上 M=360°，

故上 E+上 M=180°，故 E、F、M、N 四点共圆。

7、BA 是上 CAD 的角平分线，BE⊥AC，2AE=AD+AC。

求证：A、C、B、D 四点共圆。



解：作 BF⊥AD 交 AD 于 F。

由 2AE=AD+AC 可得 2AE=AD+AE+EC，

故 AE=AD+EC=AF - DF+EC，又 AE=AF，

故 DF=EC，又 BF=BE，上 BFD=上 BEC=90°，

故ΔBFD三 ΔBEC，故上 BDF=上 ACB，又上 BDF+上 ADB=180°，

故上 ADB+上 ACB=180°，故 A、C、B、D 四点共圆。

复习思考题、作业题：

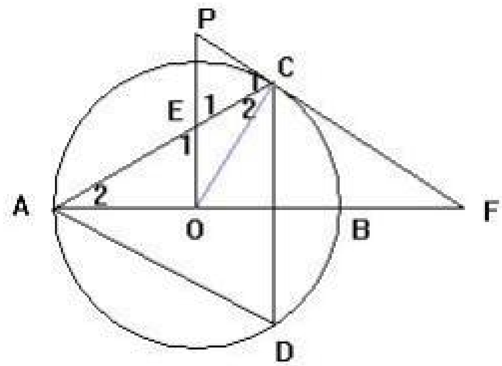
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 8 周	课 次	第 8 次	
章 节 名 称	1.8、圆			
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	学会求圆+三角形。			
教 学 方 法	讲解法、讨论法			
教 学 重 点 难 点	重点：证明圆内的三角形全等或相似。 难点：在圆内求证两个角相等和两条边相等。			

教学步骤及内容：

1.8、圆



1、以 AB 为直径的圆O 是 ΔADC 的外接圆，过 O 作 PO ⊥ AB，交 AC 于 E，PC 的延长线交 AB 的延长线于点 F，$\angle PEC=\angle PCE$。

①、求证：FC 为圆的切线；

②、若 AD=DC=AC=$\sqrt{3}$，求 AB。

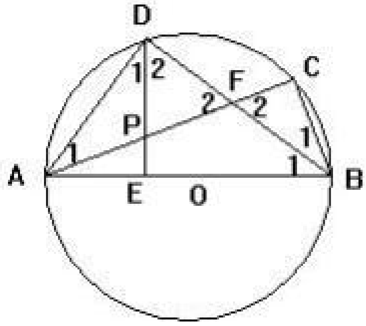
①、证明：∠OAE+∠OEA=90°，又

∠OEA=$\angle PEC=\angle PCE$，

∠OAC=∠OCA，故∠PCE+∠OCA=90°，故 FC 为圆的切线；

②、$2OA\cos\angle OAC=AC$，$2OA\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，故 OA=1，故 AB=2。

2、ΔABC 内接于圆 O，AB 是直径，上CBA 的平分线交 AC 于 F，交圆 O 于 D，DE⊥AB 于 E，交 AC 于 P。



①、求证：上DAC=上DBA；

②、求证：P 是 AF 的中点。

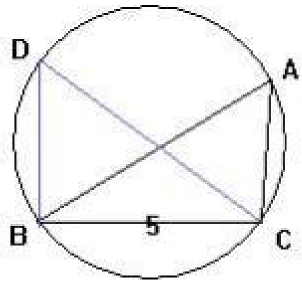
证明：①、BD 是上B 的平分线，

故上DBC=上DBA=上DAC=上1；

②、由于上C=上ADB=90°，

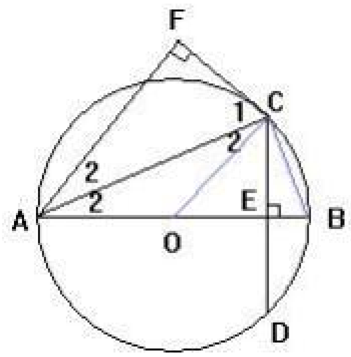
故上BFC=上AFD=上FDE=上2，故上ADP=上1，故 P 是 AF 的中点。

3、在锐角三角形ΔABC中，BC=5，sinA=$\frac{4}{5}$。



求：ΔABC 外接圆直径。

解：作直径 CD，则上A=上D，故 CDsinD=5，即 CD=$\frac{25}{4}$。



4、AB 为圆 O 的直径，弦 CD⊥AB 于 E，CF⊥AF 于 F，CF=CE。

①、求证：FC 为圆的切线；

②、若 sin上BAC=$\frac{2}{5}$，求$S_{\Delta CBD}:S_{\Delta ABC}$。

①、证明：连接 OC 和 CB，显然

上FCA+上FAC=90°，由$\begin{cases} CF=CE \\ \text{上}AFC=\angle AEC=90^\circ \end{cases}$可知上FAC=上EAC，又上EAC=上ACO，

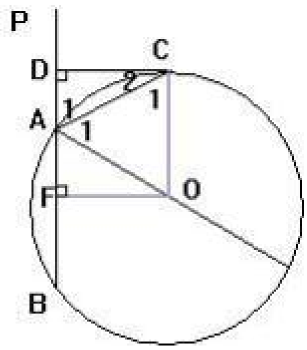
故上FCA+上ACO=90°，故 FC 为圆的切线；

②、显然$\Delta ABC \sim \Delta CBE$，故

$S_{\Delta CBE}:S_{\Delta ABC}=(\frac{BC}{AB})^2=\sin^2\angle BAC=\frac{4}{25}$，

故$S_{\Delta CBD}:S_{\Delta ABC}$=8：25。

5、PA 交圆 O 于 A、B 两点，AE 是圆 O 的直径，C 在圆上，CA 平分∠PAE，CD⊥PA 于 D。



①、求证：CD 为圆的切线；

②、若 DC+DA=6，圆 O 是直径为 10，求 AB。

①、证明：连接 OC，CA 平分∠PAE，故

∠PAC=∠OAC=∠OCA，由于∠PAC+∠PCA=90°，故

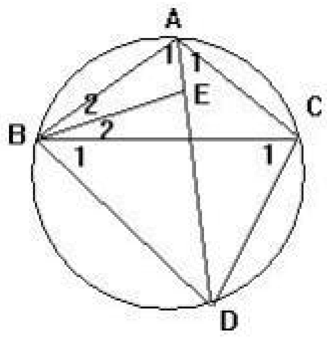
∠OCA+∠PCA=90°，故 CD 为圆的切线；

②、解：作 OF 垂直 PB 于 F，设 AD 为x，则 CD=$6-x$，DF=OC=5，AF=$5-x$，故$(5-x)^2+(6-x)^2=25$，即x=2 或 9，但 AF<AO=5，故x=2，即 AB=6。

6、圆 O 是ΔABC的外接圆，∠BAC 与∠ABC 的平分线相交于 E，AE 交圆于 D。

①、求证：BD=DC=DE；

②、若圆 O 的半径为 10，∠BAC=120°，求ΔBDC的面积。



①、证明：AD是∠BAC 的平分线，故∠BAD=∠DAC，又∠BAD=∠BCD，

∠DAC=∠DBC，故

∠BAD=∠DAC=∠BCD=∠DBC=∠1，故 BD=DC

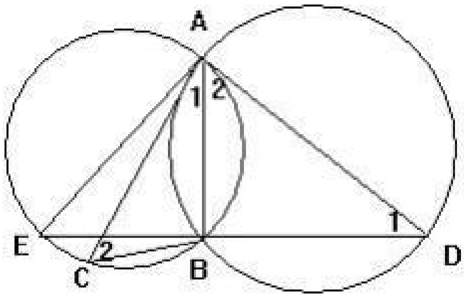
BE 是∠ABC 的平分线，故∠ABE=∠CBE=∠2，又∠BED 是ΔABE 的外角，

故∠BED=∠1+∠2，故∠BED=∠EBD，故 BD=DE;

②、这时ΔBDC是等边三角形，故 BD=$2r\cos 30^\circ=10\sqrt{3}$，故$\Delta BDC$的面积为

$\frac{\sqrt{3}}{4}(10\sqrt{3})^2=75\sqrt{3}$。

7、两圆相交于 A、B，过 A 分别作两圆的切线交两圆于 C、D，DB 的延长线交另一圆于 E。



求证：①、AC× BD=AD× AB；

②、AC=AE。

证明：①、AC 是切线，故上CAB=上D，

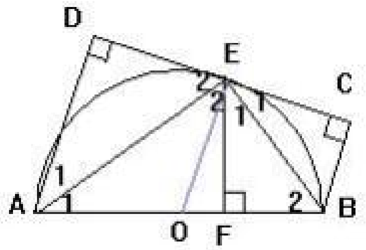
AD 是切线，故上DAB=上C，

故 $\Delta ACB \sim \Delta DAB$，故 $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{BD}$，

故 AC× BD=AD× AB；

②、由①可知$\Delta ACB \sim \Delta DAB$，故上ABC=上ABD，故上ABC 与上ABE 互补，故 AC=AE。

8、AB为圆 O 的直径，CD与圆O相切于E，AD⊥CD 于 D，BC⊥CD 于 C，EF⊥AB 于 F。



求证：①、上FEB=上CEB；

②、EF^2=AD× BC。

证明：①、CD 切圆于 E，故上CEB=上BAE=上1，

又上AFE=90°，故上EAF+上AEF=90°，AB 为圆 O 的直径，

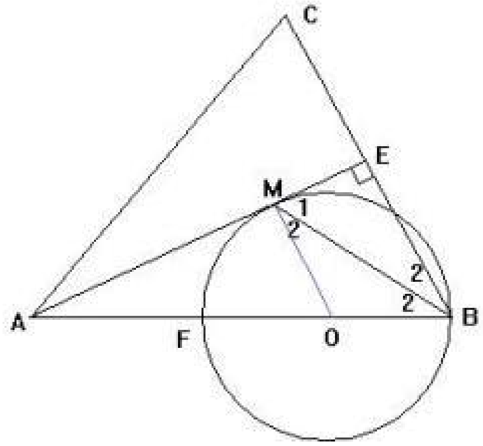
故上AEF+上BEF=90°，故上FEB=上CEB；

②、显然，EO 是梯形 ABCD 的中位线，故 DE=EC，由①可知 EF=EC，

故可以改证 DE× EC=AD× BC，即 $\frac{DE}{AD}=\frac{BC}{EC}$，即证 $\Delta AED \sim \Delta EBC$，

CD 与圆 O 相切于 E，故上AED=上ABE，又上ABE=上CBE，故 $\Delta AED \sim \Delta EBC$。

9、在ΔABC中，AB=AC，AE 平分$\angle$A 交 BC 于 E，BM 平分$\angle$B 交 AE 于 M，经过 B、M 的圆O 交 BC 于 G，交 AB 于 F，FB 恰好是直径。



①、求证：AE 与圆 O 相切；

②、若 BC=4，cosC=$\frac{1}{3}$，求圆 O 是半径。

①、证明：显然，$\angle$AEB=90°，

故$\angle$MBE+$\angle$BME=90°，

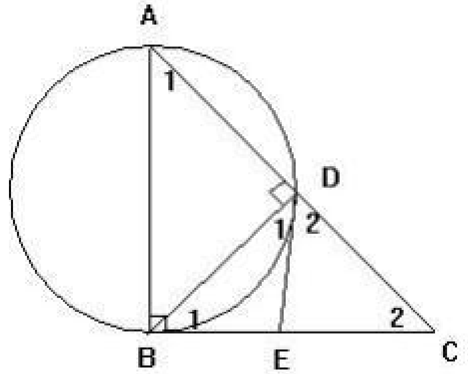
BM 平分$\angle$B，故$\angle$MBE=$\angle$MBO=$\angle$BMO，故$\angle$MBE+$\angle$BMO=90°，

故 AE 与圆O 相切；

②、解：CE=2，ACcosC=2，故 AC=6，即 AB=6，显然，$\Delta AOM \sim \Delta ABE$，

故$\frac{AO}{AB}=\frac{OM}{BE}$，即$\frac{6-r}{6}=\frac{r}{2}$，故$r=\frac{3}{2}$。

10、在ΔABC中，AB$\perp$BC，已 AB 为直径的圆交 AC 于 D，DE 切圆于 D，交 BC 于 E。



①、求证：DE=EC=EB；

②、若 tanC=$\frac{\sqrt{5}}{2}$，DE=2，求 AD 的长。

①、证明：DE 切圆于 D，故$\angle$EDB=$\angle$A，

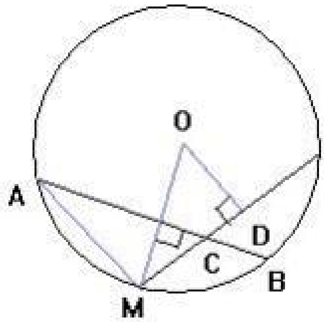
又$\angle$A+$\angle$C=90°，$\angle$EDB+$\angle$EDC=90°，

故$\angle$EDC=$\angle$C，故 DE=EC，又$\angle$C+$\angle$CBD=90°，故$\angle$CBD=$\angle$EDB，故 DE=EB。

②、解：DE=2，故 BC=4，AB=BCtanC=$2\cdot\sqrt{5}$，显然$\Delta ABD \sim \Delta ACB$，

故$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$，即$\frac{AD}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{6}$，故$AD=\frac{10}{3}$。

11、AB、MN 是两条相交弦且交于 C，M 是弧 AB 的中点，圆的半径 R=4，MN=4$\sqrt{3}$。



①、求圆心 O 到 MN 的距离；

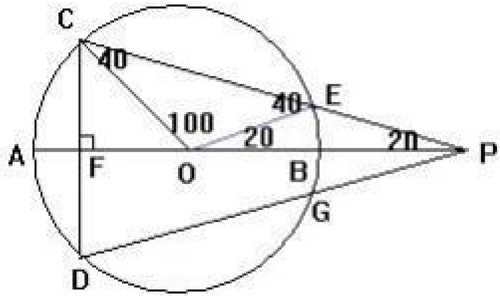
②、求∠ACM 的度数。

解：①、作 OD⊥MN 交 MN 于 D，

则 OD=$\sqrt{R^2-MD^2}=2$；

②、由于 M 是弧 AB 的中点，故 OM⊥AB，显然∠OMD=30°，故∠ACM=60°。

12、两弦 CE、DG 同时与直径 AB 交于 P，CD⊥AB，



①、求证：PC=PD；

②、若 PE 等于圆的半径，∠APC=20°，求∠AOC。

①、证明：CD⊥AB，故 CF=DF，∠CFP=∠DFP=90°，故 PC=PD；

②、解：∠EOP=∠APC=20°，故∠OEC=40°，故∠OCE=40°，即∠COE=100°，故∠AOC=60°

复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第 9 -10 周	课 次	第 9-10 次	
章 节 名 称	初等几何变换 合同变换			
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学时数	4
教 学 目 的 要 求	了解掌握反射变换、平移变换及旋转变换的概念 掌握反射变换、平移变换及旋转变换。			
教 学 方 法	讲解法、讨论法			
教 学 重 点 难 点	重点：反射变换、平移变换及旋转变换 难点：反射变换、平移变换及旋转变换的应用			

教学步骤及内容：

1、$\dfrac{S}{\pi r^2}=\dfrac{\theta}{360}=\dfrac{l}{2\pi r}$

2、若圆台的上、下底面半径分别是 1 和 3，它的侧面积是两底面面积的 2 倍，求侧圆台的母线长。

解：$\begin{cases}\dfrac{S_{大}}{\pi y^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{6\pi}{2\pi y}\\ \dfrac{S_{小}}{\pi x^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{2\pi}{2\pi x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{S_{大}}{y^2}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3\pi}{y}\\ \dfrac{S_{小}}{x^2}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{x}\end{cases}\Rightarrow y=3x$，故

$\begin{cases}\dfrac{S_{大}}{9x^2}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3\pi}{3x}\\ \dfrac{S_{小}}{x^2}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_{大}=9\pi x\\ S_{小}=\pi x\end{cases}$，故

$S_{大}-S_{小}=2(\pi+9\pi)\to 8\pi x=20\pi\to x=\dfrac{5}{2}$，故$y-x=2x=5$。

3、已知扇形的周长为 6 cm，面积是 2 cm²，则扇形的圆心角的弧度数是__。

解：$\dfrac{S}{\pi r^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{6-2r}{2\pi r}$，故$2=(3-r)r$，即$r=1$ 或 4。

4、扇形的圆心角为 120°， 半径等于 10，则扇形的面积为__.（答案：$\frac{100}{3}$ π）

5、扇形 *AOB* 的周长为 8 cm.

(1)、若这个扇形的面积为 3 cm^2，求圆心角的大小；（答案：$\frac{2}{3}$或 6）

(2)、求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弦长 *AB*。

扇形面积取得最大值 4.此时，$r=2$ ，$\therefore |AB|=2\times 2\sin 1=4\sin 1$。

6、圆锥底面半径为 1，其母线与底面所成的角为60°，求侧面积和体积

7、若圆锥的轴截面是正三角形，求侧面积是底面积。

8、圆锥的表面积是底面面积的 3 倍，求圆锥的侧面展开图扇形的圆心角。

解：$\frac{2\pi r^2}{\pi l^2}=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{2\pi r}{2\pi l}\Rightarrow\frac{2r^2}{l^2}=\frac{r}{l}\Rightarrow\frac{2r}{l}=1\Rightarrow l=2r$，

再代入$\frac{2r^2}{l^2}=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{r}{l}$可得$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{r}{2r}\to\theta=\pi$。

复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 11-14 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 11-14 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">轨迹</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>8</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1、准确理解轨迹的概念
2、掌握轨迹命题的证明方法--探求法及步骤
3、掌握轨迹命题的三种类型 了解轨迹命题两面证明的方法
常用的几个轨迹命题</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：常用的轨迹定理
难点：探求法</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第一节 轨迹的基本知识

1. 轨迹的概念

确切理解轨迹的概念

2. 轨迹的证明

理解轨迹证明的步骤

3. 轨迹的静点

了解轨迹的静点及确定

4. 轨迹图形分类

5. 轨迹命题的分类

了解轨迹命题的三种类型

6. 基本轨迹命题（定理）

理解常见的几个轨迹命题

第二节 轨迹的探求

1. 直接方法—描迹法

掌握用描迹法探求轨迹

2. 间接方法

①. 条件代换法 ②. 初等代换法 ③. 化归法

3. 探求轨迹应注意的问题

①. 注意认真审题 ②. 注意轨迹的界限 ③. 注意代换条件的等价性

4. 给定两点A、B，l为通过A的动直线，则点B关于直线l的对称点的轨迹是一个圆，即以A为中心以AB为半径的圆。

证明：因B点关于过A、B之直线的对称点就是B点自身，故点B在轨迹上。

1°设l为过A的任一直线，B'是B关于l的对称点（图2.4）。则$AB'=AB$，即B'在$\odot A(AB)$上。

2°设B'为$\odot A(AB)$上任一点，则$AB'=AB$，故A在BB'的中垂线l上，所以B'是B关于这条因B'而变但总是通过A的直线l的对称点，即点B'合于条件。

由1°、2°可以断定，所求轨迹是$\odot A(AB)$。

6. $\triangle ABC$中底边BC固定，顶角A等于定角α，求证$\triangle ABC$的内心的轨迹是对称于BC的两个圆弧，以BC为弦且其内接角等于$d+\frac{\alpha}{2}$。

证明：设I为$\triangle ABC$的内心（图2.6），连BI，CI，则

$$\begin{aligned}\angle BIC&=2d-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)\\&=2d-(2d-\angle BAC)\\&=d+\frac{\alpha}{2}。\end{aligned}$$

由于$\triangle ABC$的顶点A可能在固定边BC所在直线的两侧，故内心I就必须在对称于BC，且以BC为弦，内接角为$d+\frac{\alpha}{2}$的两个圆弧Σ_1与Σ_2之一上，即合于条

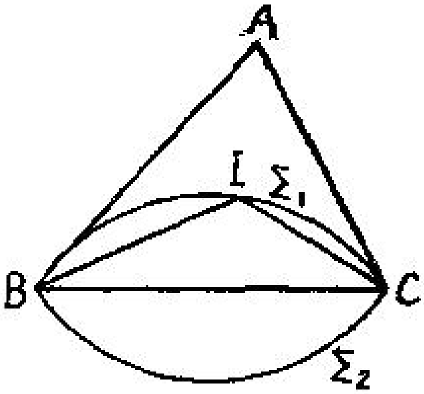


图 2.6

7. $\square ABCD$的底边BC固定，且一边AB为定长a，则其对角线交点的轨迹为一圆，圆心是BC的中点，半径是$\frac{a}{2}$。

证明：设M为BC的中点，P为$\square ABCD$两对角线AC，BD之交点（图2.7），连PM，则PM为$\triangle ABC$之中位线，于是

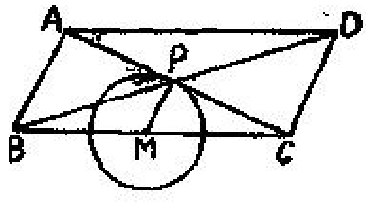


图 2.7

$$PM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a\ （定长）。$$

由于BC固定，从而它的中点M亦固定，又因$\square ABCD$的AD边可位于固定边BC所在直线的两侧，因此，P点在以M为心，$\frac{1}{2}a$为半径的圆周上，即合于条件的点P在$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上。

反之，设P为$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上任一点，连$BP$延长至$D$，使$PD=BP$，连$CP$延长至$A$，使$PA=CP$，连$BA$，$AD$，$DC$，易证$ABCD$为平行四边形，其底边$BC$固定，且$P$为对角线之交点，连$PM$，在$\triangle ABC$中，$PM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，从而$AB=2\cdot PM=2\cdot\frac{a}{2}=a$（定长），于是我们证明了$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上的点$P$合于所设条件。

8. $\triangle ABC$底边BC固定，顶角A等于α，则$\triangle ABC$重心的轨迹是两个圆弧，以BC的两个三等分点的连线段为弦，且内接角等于α。

证明：设G为$\triangle ABC$的重心，M和N为固定边BC上的两个三等分点（图2.8）。连AG交固定边BC于D，则D为BC之中点。由于M为线段BD上靠近点D的一个三等分点，N为线段DC上靠近点D的一个三等分点，连GM，GN，在$\triangle DAB$中，$DM:DB=DG:DA=1:3$，故而$GM\parallel AB$，同

理可证，$GN \parallel AC$，于是

$$\angle MGN = \angle BAC = \alpha。$$

因为$\triangle ABC$的顶点A可能在固定边BC所在直线的两侧，所以重心G就必须在对称于BC，且以MN为弦，内接角为α的两个圆弧Σ_1与Σ_2之一上，即合于条件的点G在圆弧Σ_1或圆弧Σ_2上。

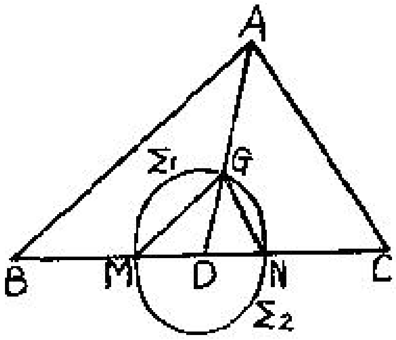


图2.8

反之，不失一般性，设G为圆弧Σ_1上任一点，连DG延长至A，使$DA=3\cdot DG$，连AB，AC，则G为$\triangle ABC$之重心。

对$\triangle DAB$而言，因为$DA=3\cdot DG$，$DB=3\cdot DM$，故有$GM \parallel AB$。同理可得$GN \parallel AC$，从而$\angle BAC=\angle MGN=\alpha$。

所以圆弧Σ_1（或圆弧Σ_2）上的点G合于所设条件。

到此我们断定所求轨迹是圆弧Σ_1和圆弧Σ_2的并集。

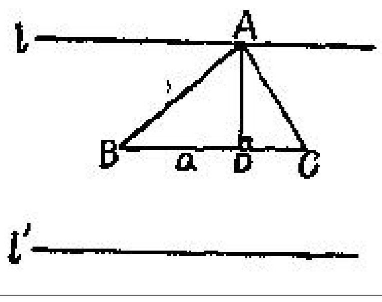
12．同底等积的各三角形顶点所成轨迹，是平行于公共底边的两直线。

这个命题与下面的命题等效：

设$\triangle ABC$的底边BC固定，且其面积等于常量S，则顶点A的轨迹是平行于BC的两条直线l和l'。

我们通过探求来确定l，l'距直线BC之距离。

探求： 若点A合于条件，则$S_{\triangle ABC}=S$，且BC有固定的位置和长度a（图2.12），过A作$AD\perp$直线BC于D，则



$\frac{1}{2}AD\cdot BC=S$，故有

$$AD=\frac{2}{BC}S=\frac{2S}{a}\quad（定长）$$

因为合于条件的点A可以在直线BC的两侧，所以点A在平行于直线

图 2.12 BC的两条直线l或l'上，l与l'各在直线BC的一侧，且距BC的距离等于定长$\frac{2S}{a}$。

证明：1°完备性的证明见探求部分，合于条件的点A在直线l或l'上。

2° 证纯粹性。在直线l（或l'）上任取一点A，连AB，AC，过A作$AD\perp$直线BC于D，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\left(\frac{2S}{a}\right)\cdot a=S\ (\text{常量})$$

即l或l'上的任一点A合于所设条件。

所以点A的轨迹是直线l和l'的并集。

13．定圆内定长的弦的中点的轨迹是定圆的一个同心圆。

设定圆$O(r)$内，长度为定长$2a$的弦AB之中点为M，已知M点的轨迹是$\odot O(r)$的一个同心圆，下面来确定这个同心圆的半径。

探求：若点M合于条件，连OA，OM（图2.13），则$OM\perp AB$，在$Rt\triangle OMA$中，

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{r^2-a^2}$$
$$=k\ (\text{定长})$$

从而点M在$\odot O(k)$上。

证明：1°完备性的证明见探求部分。

2° 证纯粹性．在$\odot O(k)$上任取一点M，由于$r>\sqrt{r^2-a^2}=k$，则M点在$\odot O(r)$内部，过M作$\odot O(k)$之切线交$\odot O(r)$于A、B两点，连OA，OM，有$OM\perp AB$。于是M是AB中点。且$AB=2AM=2\sqrt{AO^2-OM^2}=2\sqrt{r^2-k^2}=2a=$定长。即在$\odot O(k)$上的任一点$M$合于所设条件。

所以点M的轨迹是$\odot O(k)$。

弦AB的中点M与圆心O的连线 $OM\perp AB$，即 $OM\perp l$。所以这组平行弦的中点只能落在与l垂直的定直径CD上(图2.14)。

反之，设M'为直径CD上任一点，过M'引弦 $A'B'\parallel AB\parallel l$，则$OM'\perp A'B'$，$M'$是$A'B'$的中点。

到此我们断定，所求的轨迹是圆O的一条定直径CD。

16．设一点至两已知相交线距离之比为常数，则该点的轨迹是两条直线。

设AB，CD是两已知相交直线，O为交点，$\frac{n}{m}$为常数。

探求：若P为$\angle BOD$(或$\angle BOD$对顶角)区内合于条件比$\frac{PE}{PF}=\frac{n}{m}$（图2.16)，为了确定$P$点的轨迹，我们在$\angle BOD$角区内作出一定点$P_0$，使得$P_0$到$AB$之距离$P_0E_0$与它到$CD$之距离$P_0F_0$之比$\frac{P_0E_0}{P_0F_0}=\frac{n}{m}$，不难证明，$P$，$P_0$之连线通过$O$点，即点$P$在线段$OP_0$所在定直线$l$上。为此，连$EF$，$E_0F_0$，因为$\frac{PE}{PF}=\frac{n}{m}=\frac{P_0E_0}{P_0F_0}$ 或$PE:P_0E_0=PF:P_0F_0$，则

$\triangle PEF\backsim\triangle P_0E_0F_0$（$\angle EPF$和$\angle E_0P_0F_0$同与$\angle BOD$相等或（或互补)。

由此得 $EF\parallel E_0F_0$，从而$\triangle OEF\backsim\triangle OE_0F_0$

则有 $OE:OE_0=PE:P_0E_0$，连OP，OP_0，则因$\angle OEP=\angle OE_0P_0=d$，又推得$\triangle OEP\backsim\triangle OE_0P_0$，故而$\angle EOP=\angle E_0OP_0$，即$OP$与$OP_0$相重合，于是$P$点在$O$、$P_0$的连线$l$上。

如果一点Q在与$\angle BOD$互补的角区内合于条件，同样可证得Q点在过O的一条定直线l'上。

证明：完备性的证明见探求。

反之，不失一般性，设在l上任取一点P，过P作$PE\perp AB$于E，$PF\perp CD$于F，显见

$$\triangle OPE\backsim\triangle OP_0E_0,$$
$$\triangle OPF\backsim\triangle OP_0F_0$$

所以 $PE:P_0E_0=OP:OP_0=PF:P_0F_0$

从而 $PE:PF=P_0E_0:P_0F_0=n:m$

即P点合于所设条件。

所以所求的轨迹是两直线l和l'的并集。

"注" 在解题过程中我们早就注意到O点至两已知相交直线的距离同时为零，$\frac{0}{0}$可以等于任何数，当合于条件的点P无限接近O点时，命题的结论成立。在此，我们把点O视为轨迹上的一个极限点。可注意当$m=n$时，就得出我们最熟悉的情况。

17．设一点至两已知相交线距离之和为常数，则该点的轨迹是一个矩形的周界。

设a，b是两已知相交直线，O为交点，k为常数。

探求：首先我们看出a，b直线上各有两点B，D与A，C合于条件，即a上的两点B，D到b的距离与b上的两点A，C到a的距离都等于常数k（图2.17），于是A，B，C，D是轨迹上的四个特殊点。

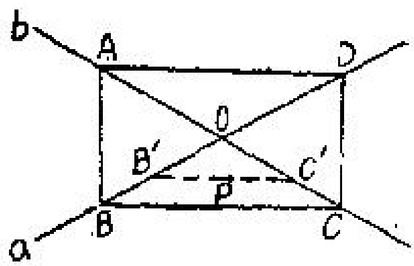


图 2.17

其次，连AB，BC，CD，DA，因A，C到直线a的距离相等，利用合同三角形的性质，容易证得$OA=OC$，同理可证$OB=OD$，故$ABCD$为平行四边形。再因点A到直线a

的距离等于点B到直线b的距离，利用合同三角形的性质，又可证得$OA=OB$，从而有$BD=AC$。因此，$ABCD$是一个矩形，下面证明这个矩形就是所求的轨迹。

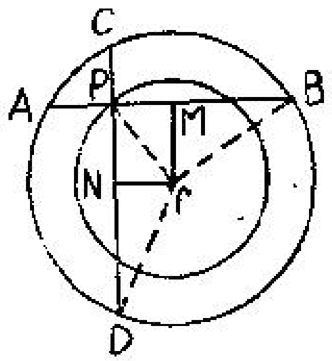
证明：设在矩形$ABCD$的周界BC上任取一点P，于是对等腰$\triangle OBC$而言，P点到两腰距离之和等于常数k（第一章1.6节例2），即P点合于所设条件。

反之，设P是不在矩形$ABCD$周界上的任一点，比方说P在$\triangle OBC$内部。过B作$B'C' \parallel BC$交a于B'交b于C'，对于$\triangle OB'C'$而言，显见P点到两腰距离之和小于常数k。仿此，P在$\angle BOC$角区内且位于$\triangle OBC$外部时，P到a、b距离之和大于常数k。这就是说，不在矩形$ABCD$周界上的任一点P，不合于所设条件。

由以上证明我们断定，所求轨迹是矩形$ABCD$的周界。

18. 设定圆中互相垂直的两弦的平方和是常数，则此两弦所在直线交点的轨迹是一圆。

设AB、CD是定圆$O(r)$中互相垂直的两弦（图2.18），$AB^2+CD^2=4k^2$（常数）。



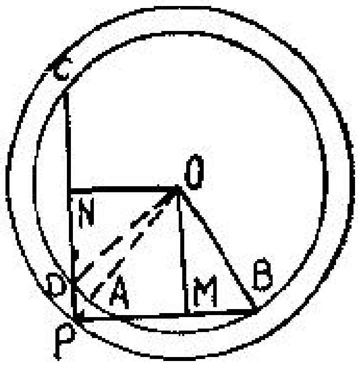


图 2.18

探求：若点P合于条件，P为两弦AB、CD之交点。作$OM \perp AB$于M，$ON \perp CD$于N，则M，N分别为弦AB，CD之中点。连OP，OB，OD，因$\triangle OBM$和$\triangle ODN$都是直角三角形，故

$$OM^2=OB^2-MB^2 \qquad ON^2=OD^2-ND^2$$

$$=r^2-\frac{1}{4}AB^2 \qquad\qquad =r^2-\frac{1}{4}CD^2$$

于是 $$OP^2=OM^2+ON^2=\left(r^2-\frac{1}{4}AB^2\right)$$

$$+\left(r^2-\frac{1}{4}CD^2\right)=2r^2-\frac{1}{4}(AB^2$$

$$+CD^2)=2r^2-k^2$$

即合于条件的点P在一个定圆$O(\sqrt{2r^2-k^2})$上。

证明：1°完备性的证明已在探求中完成。

2° 证纯粹性，在$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$上任取一点P，过P作互垂两直线分别交$\odot O(r)$于A，B及C，D，则AB，CD为$\odot O(r)$内互垂两弦，作$OM\perp$弦AB于M，$ON\perp$弦CD于N，则M，N为两弦之中点．连OP，OB，OD，因$\triangle OBM$和$\triangle ODN$都是直角三角形，故

$$OM^2=r^2-\frac{1}{4}AB^2,\quad ON^2=r^2-\frac{1}{4}CD^2$$

于是有 $$2r^2-k^2=OP^2=OM^2+MP^2=OM^2+ON^2$$

$$=r^2-\frac{1}{4}AB^2+r^2-\frac{1}{4}CD^2=2r^2$$

$$-\frac{1}{4}(AB^2+CD^2)$$

所以$AB^2+CD^2=4k^2$，即P点合于所设条件．

由1°，2°断定所求的轨迹是$\odot O(r)$的一个同心圆$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$。

讨论：（一）当$r>\frac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹为$\odot O(r)$的一个同心

圆 $\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$，这里，又分两种情况：

（1） 当$\sqrt{2r^2-k^2}>r$，即$r>|k|$时，$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$在$\odot O(r)$的外部；

（2） 当$\sqrt{2r^2-k^2}<r$，即$r<|k|$时，$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$在$\odot O(r)$的内部．

（二） 当$r=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹是一个孤立点 O。

（三） 当$r<\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹不存在。

“注” 对本题纯粹性的证明，读者可能会提出下面的疑问：当$O<|k|<r$ 时，$\sqrt{2r^2-k^2}>r$，此时点 P 在$\odot O(r)$的外部，在这种情况下，过P 点所作互垂两线是否一定都与$\odot O(r)$相交？倘若过 P 点所作$\odot O(r)$ 的两切线间的夹角为锐角（或为直角），那末，过 P 点 而又互垂的两直线要都与$\odot O(r)$相交，是不可能的．因此，必须确认两切线间的夹角为钝角．但这个问题的答案是完全肯定的，请读者自己想想看．

21． 设一圆与两定圆相交，交点各为定圆直径的端点，求此圆中心的轨迹．

探求：若点P合于条件，即$\odot P$交两定圆$\odot O(r)$与$\odot O'(r')$于A，B和A'，B'，AB与$A'B'$分别为$\odot O(r)$与$\odot O'(r')$之直径．设$PO\perp AB$，$PO'\perp A'B'$，过P 作连心线 OO' 之垂线 l，以D表垂足（图2.21）。则$\triangle OPD$，$\triangle O'PD$，$\triangle OPA$，$\triangle O'PA'$ 都是直角三角形。

故 $$PO^2-OD^2=PD^2=PO'^2-O'D^2$$

$$PA^2-r^2-OD^2=PA'^2-r'^2-O'D^2$$

由此得 $$r'^2-r^2=OD^2-O'D^2$$

$$=OD^2-(OO'-OD)^2$$

$$=2\cdot OO'\cdot OD-OO'^2$$

所以 $$OD=\frac{OO'^2+r'^2-r^2}{2\cdot OO'}\text{（常数）}$$

这表明点D是连心线OO'上的一个定点，因此合于条件的点P在通过OO'上之定点D且垂直于OO'之直线l上。

证明：完备性的证明见探求。

反之，在l上任取一点P，连OP，过O作OP的垂线交$\odot O(r)$于A，B两点，显见AB为$\odot O(r)$的一条直径，且有$PA=PB$，仿此，作$\odot O'(r')$内的一条直径$A'B'$，亦有$PA'=PB'$.

由 $OD=\dfrac{OO'^2+r'^2-r^2}{2\cdot OO'}$ 推得$OD^2-O'D^2=r'^2-r^2$

于是 $$PA^2=PO^2+OA^2=OD^2+PD^2+r^2$$

$$=OD^2+PO'^2-O'D^2+r^2$$

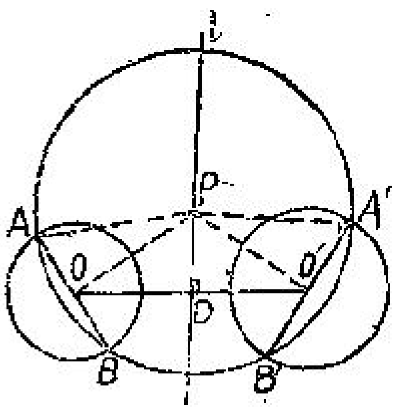


图 2.21

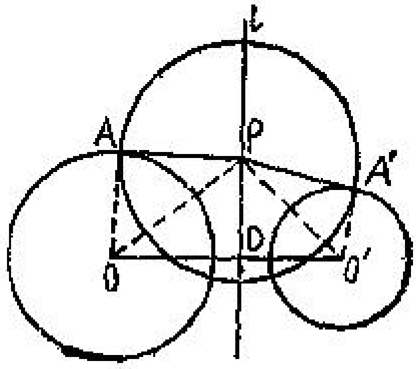


图 2.22

$$PA+PB=PA+PC=AC=k.$$

3° 若A在P、C之间（图3.4），则

$$PB-PA=PC-PA=AC=k.$$

4° 若P与A相重合（图3.5），则 $PB+PA=AC+0=k$

或 $$PB-PA=AC-0=k.$$

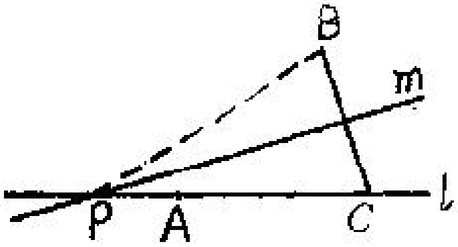


图 3.4

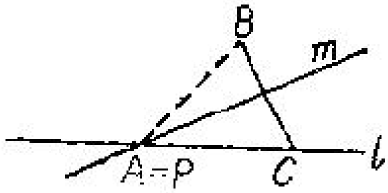


图 3.5

5° 若m平行于l（图3.6），因C在A的两旁各有一个，设C'在l上关于点C在A的异侧，且有$AC'=AC=k$，这时，$C'B$之中垂线m'必与l相交于一点P'，而P'与A、C的位置关系属于上面四种情况之一。

由于有两个C点，故本题总会有一解。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第　15-17　周	课　次	第　15-17　次		
章　节 名　称	作图问题				
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	6
教　学 目　的 要　求	1、掌握几何作图的基本知识和基本的作图方法 2、掌握作图成法，理解作图步骤 3、掌握作图法中的轨迹交接法、三角形奠基法				
思　人 政　目 育　标	1、强化规则意识和法治观念 2、锻炼创新思维与问题解决能力 3、树立审美意识与人文情怀				
教　学 方　法	讲解法、讨论法				
教　学 重　点 难　点	重点：基本作图 难点：交轨法及奠基法				

教学步骤及内容：

第一节 尺规作图的基本知识

1.尺规作图与作图公法

尺规作图必须遵守既定规则，违反规则则无法完成题目，类比社会生活中的法律与道德规范，让学生理解“无规矩不成方圆”，树立规则意识和法治观念。

①.几何作图 ②. 尺规作图 ③. 解作图题 ④.作图公法 ⑤.几何作图的条件 ⑥.几何作图的分类

2.作图成法（基本作图问题）

3.解作图题的步骤

4.尺规作图不能解决的问题

第二节 常用的作图方法

1.轨迹相交法

2.三角形奠基法

假设给了一些条件，而设法求作具备这些条件的图形，这就是初等几何作图问题。完成作图以后，便可以断言具备某些条件的图形存在，或者说在什么样的情况下具备这样条件的图形才能存在，使言之有物。其实解初等几何作图问题在某种意义上来说就是存在问题的证明。

几何作图在学习几何中的重要意义是大家所公认的，几何作图问题的价值有很多：

（1）完成一个作图题在学生头脑里能把个别的几何事实具体化，将注意力从字面上的几何命题转到这命题所含有的现实几何关系上来，比如说，在学习了“垂直于弦的半径平分这弦”的定理以后，再做一到简单的题目：“过圆内一已知点求作一弦使被此点所平分”，学生是不难解决的。由此，我们可以总结到，如果简单地重复定理的条文来复习巩固这个定理的意义就不大了，但是，用这个定理作为工具来解这个作图题，可以使学生明白到，不仅仅半径垂直于弦，同时，弦也是垂直于半径的，这样就有了积极的意义了。所以说初等几何作图的第一个价值在于，几何作图是建立学生的具体几何观念的重要手段，是克服学生单纯死记硬背定理条文的好办法。

（2）几何作图可以提供题材，把所学的命题用来解决某些具体问题，使学生学会学以致用，这一点几乎对于几何课的每一章节都适用。解作图题时还经常需要学生有一定的主动性和独立性，也给他们尝试一下自己的能力的机会，因此，初等几何作图的第二个价值在于，它为初等几何课程的几乎每一个章节提供了练习的材料。

（3）几何作图的学习给制图学提供了理论基础，它在实践上的意义是不可忽视的。工农业生产经常需要改良工具，创造新的产品，不仅在设计过程中需要绘图样，在零件加工过程中，往往也是需要精确而又迅速的作图技能。

（4）在解作图题的过程中，要运用一系列相当复杂的逻辑思维，解作图题的各个部分的术语“分析”“作法”“证明” “讨论”，是其价值的体现。

初等几何作图的基本作图的几种类型

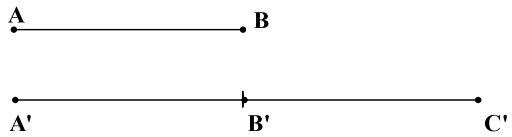
初等平面几何的研究对象不外乎直线、圆以及由它们或它们的部分所构成的图形，所以我们作图工具习惯上是先用直尺和圆规的。仅用直尺和圆规经有限次手续的作图称为尺规作图或规矩作图或初等几何作图。不能经有限次数使用直尺和圆规完成的作图被称为规矩作图不能问题或不可作问题。所谓不可作问题并非是问题无解，而只是说限用直尺和圆规是不可能的，例如：任意角的三分之一必然存在，但是我们却不能用直尺和圆规做出来。尺规作图的原理有：图形相似、对应角相等、对应边之比相等；图形全等、对应角相等、对应边相等。初中阶段的几种基本作图分别是作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；平分已知角（即作已知角的平分线）；作线段的垂直平分线；过一点作已知直线的垂线；过一点作已知直线的平行线；求作三角形，已知三边或二边及其夹角或二角及其夹边；平分一弧。

作一条线段等于已知线段

已知：线段 AB

求作：线段 $A'B'$，使得 $A'B' = AB$

作法：作射线 $A'C'$，以 A' 为圆心，以 AB 长为半径画弧交射线 $A'C'$ 于 B'，则 $A'B'$ 就是所求作的线段。



作一个角等于已知角

已知：$\angle AOB$

求作：$\angle A'O'B'$，使得 $\angle A'O'B' = \angle AOB$

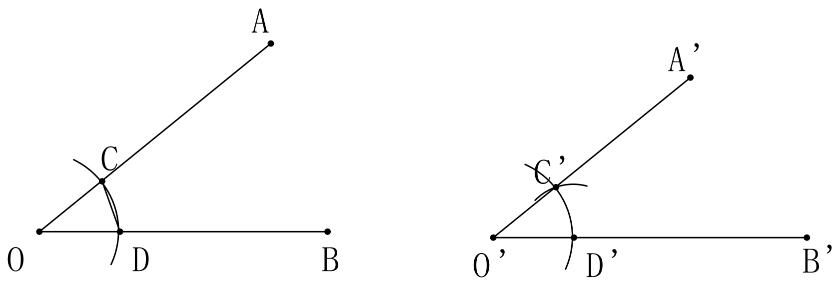
分析：求作一个角等于已知角 $\angle AOB$，只要在 $\angle AOB$ 的两边上取 C，D，连接 CD，在作射线 $O'B'$，在 $O'B'$ 上取点 D'，使 $O'D' = OD$，在利用圆的性质找出 C' 点，连接 $C'D' = CD$ 使 $\Delta OCD \cong \Delta O'C'D'$ 即可.

作法：（1）作射线 $O'B'$；

（2）以点 O 为圆心，以任意长为半径画弧，交 OA 于点 C，交 OB 于点 D；

（3）以点 O' 为圆心，以 OC 的长（或 OD 的长）为半径画弧，交 $O'B'$ 于 D'；（4）以点 D' 为圆心，以 CD 的长为半径画弧，交前面的弧于点 C'；

（5）过 点 C' 作射线 $O'A'$．$\angle A'O'B'$ 就是所求作的角.



平分已知角（即作已知角的平分线）

已知：$\angle ABC$

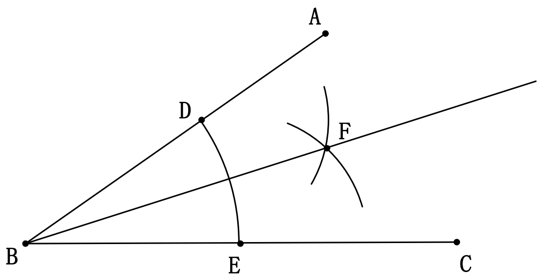
求作：$\angle ABC$ 的平分线

作法:⑴以点 B 为圆心,任意长为半径画弧分别交 AB，BC 于 D，E；

⑵分别以 D，E 为圆心,以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径画弧,两弧交于点 F；

⑶作射线 BF．射线 BF 即为 $\angle ABC$ 的平分线.

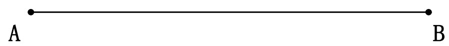
证明:根据作图可知, $BD = BE$，$DF = EF$，$BF = BF$．则 $\Delta BDF \cong \Delta BEF(SSS)$，故 $\angle ABF = \angle CBF$．



作线段的垂直平分线

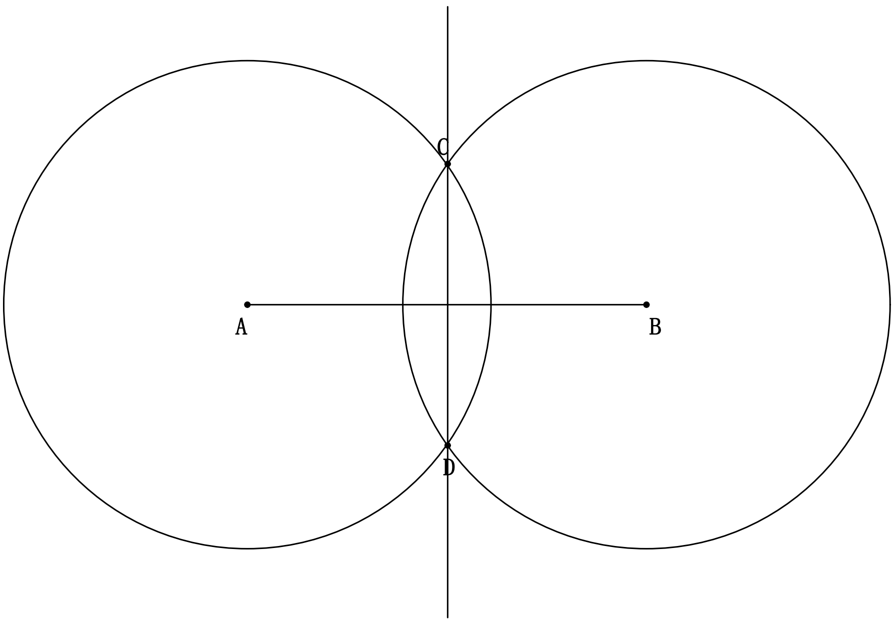
已知：线段 AB

求作：其垂直平分线；



分析与作法：分别以 A，B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 为半径，画圆两圆相交与 C，D 两点，连接 CD，CD 即为 AB 的垂直平分线。

证明：如图：$\because AC = BC$，$AD = BD$，根据线段垂直平分线的性质可知 CD 即为 AB 的垂直平分线；



解作图题的步骤

解作图题分为四步:

1°分析 遇到比较困难不是一目了然的作图题,常假定合于条件的图已作出，研究已知件和求作件间的关系，从而得出作图的
线索，这过程称为分析，是解题重要的一步.

2°作法 根据分析的线索,按作图公法及已知作图题作图.利用已知作图题时，只须说明清楚，不必将它本身的作图过程絮絮而

道. 教师对学生可随时追查他们掌握一些基本作图题的熟练情况.

3°证明 用以表明所作图形确具所设条件.

4°讨论 作图题解的有无多寡, 定与不定, 决定于已知条件的大小、位置及其相互关系，这种研究称为讨论.

作图题不加分析和讨论，很可能遗漏一些解，就像解轨迹问题时只照顾到纯粹性而疏忽了完备性一样。

初等几何作图法

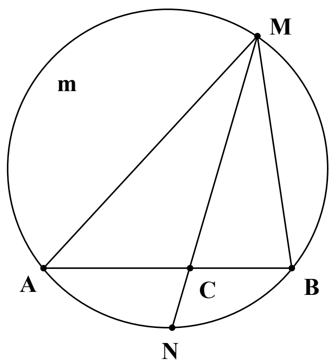
初等几何作图法有很多种，其中包括轨迹交截法、三角形奠基法、应用合同变换解作图问题，位似变换的应用代数分析法等。以下重点介绍轨迹交截法, 三角形奠基法和应用合同变换解作图问题。

轨迹交截法

轨迹是解作图题的重要工具。一个作图题的解决，往往归结到某一点的确定. 而一点的确定，须用两个条件$C1$和$C2$。如果能求出合于条件$C1$的轨迹$F1$以及合于条件$C2$的轨迹$F2$，那么$F1$和$F2$的交点同时满足条件$C1$ 和$C2$。这种由轨迹相交以解作图题的方法称为轨迹交截法, 简称交轨法。事实上, 其他作图方法大都也要用交轨法。决定某一点的轨迹可能有若干个，我们选择熟知简易的。

我们举两个例子应用轨迹交截法：

（1）. 在已知弧AmB 上求一点M 使弦的比为$MA:MB=$ 定比（$p:q\neq 1$）.



方法（一）分析：设点M 已求到，满足

$$MA:MB=p:q,$$

则M 除在弧AmB上外，还应在一个阿氏圆上. 内分、外分AB于C、D使

$$AC:CB=AD:BD=p:q,$$

于是M 还应在以CD 做直径的圆上.

作法： 如分析过程定出C、D 两点, 以CD为直径作圆，它与弧AmB相交于所求点M .

证：由阿氏圆的性质，$MA:MB=AC:CB=p:q$.

讨论：本题恒有一解, 因C 在已知圆内而D 在其外，这两圆必相交于两点，但其中一点必在阿氏圆直径CD的另一侧, 故不在弧AmB上.

当 $p:q=1$ 时, 阿氏圆不存在，但解依然存在，即弧 AmB 的中点.

方法（二）分析：设点 M 一求到，满足 $MA:MB=p:q$，若作 $\angle AMB$ 的平分线，则必通过弧 AmB 的共轭弧的中点 N。设 MN 交 AB 于 C，由三角形内角平分线的性质，有

$$p:q=MA:MB=AC:CB.$$

所以，只要求出点 N 及点 C 与弧 AmB 得交点 M， M 即为所求。

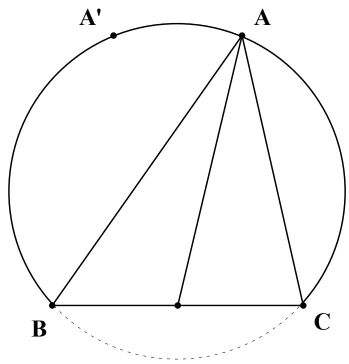
作法：作弧 AmB 的共轭弧的中点，在线段 AB 内作一点 C，使 $AC:CB=p:q$，载连直线 NC 交弧 AmB 得点 M，则 M 为所求作。

证明：由所作，MN 必是角 $\angle AMB$ 的平分线，它交 AB 于 C，由内分角线性质，有

$$MA:MB=AC:CB=p:q。$$

讨论：因为点 N、C 只能唯一作出，故本题恒有一解，若采用本法，题中可不必限制 $p:q\neq 1$。

（2）．已知 ΔABC 的底边 a, 顶角 A 以及余二边的平方和 $b^2+c^2=k^2$, 求作这三角形.



分析：设 ΔABC 已作成，底边 $BC=$ 定长 a，顶角 $A=$ 定角 α，且 $AB^2+AC^2=k^2$. 当任意作出 $BC=a$ 以后，顶点 A 的一个轨迹是以 BC 为弦而内接角等于 α 的圆弧. 若以 M 表 BC 中点，则

$$k^2=AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2+2AM^2,$$

所以 A 点的另一轨迹是一个圆周（即以 M 为中心，以 $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}$ 为半径的圆）. 因而 A 点可以确定.

作法：作线段 $BC=a$，在 BC 上作内接角等于 α 的圆弧；以 BC 中点 M 为中心以 $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}$ 为半径作圆，交方才的圆弧于 A，则 ΔABC 即所求者.

证：由作法，$BC=a$，$\angle A=\alpha$，且

$$AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$

$$= 2 \bullet \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \bullet \frac{1}{4}\left(2k^2 - a^2\right)$$

$$= k^2$$

所以 ΔABC 合于所设条件.

讨论：当上面的圆弧和圆没公共点时，无解；相切时一解；相

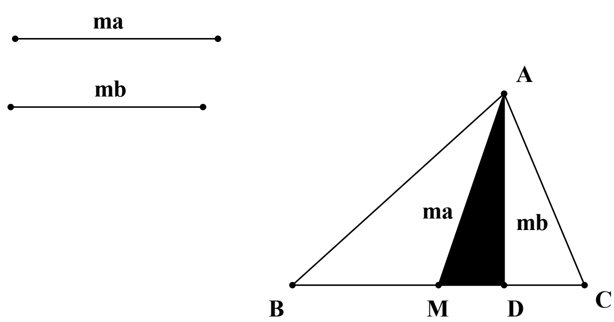
交于两点 A 、A' 时，由于 ΔABC 和 $\Delta A'CB$ 合同，仍然只有一解.

a 和 k 要满足 $\sqrt{2}k > a$ ，否则无解.

三角形奠基法

一些作图题中，往往可以先作成图形的一个三角形，从而奠定了全部图形的基础. 即是说，图形的其余部分可由此陆续作出. 这种三角形称为基础三角形. 这种作图法称为三角形奠基法. 同样举两例来应用三角形奠基法。

（1） 已知三角形底边 a ，高 h_a ，中线 m_a 的长，求作 ΔABC 。



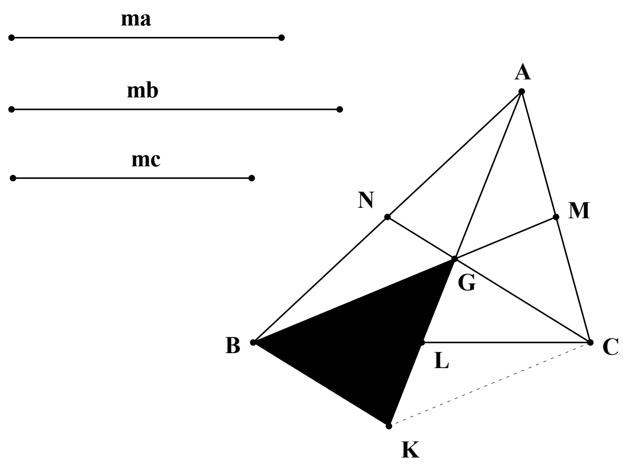
分析：设 ΔABC 已作成，底边 $BC = a$；高 $AD = h_a$；中线 $AM = m_a$. 在直角 ΔAMD 中，有两边为已知长，故可作出，顶点 A 位置决定了. 要决定 B 、C 两顶点的位置，只要注意

$BM = MC = \dfrac{a}{2}$ 。

作法：任作一直角 ADM ，在一边上截 $AD = h_a$ 得 A 点. 以 A 做中心， m_a 做半径画弧交另一边于 M . 在这边上截取 $BM = MC = \dfrac{a}{2}$，则△ ABC 即所求者.

证：由作法， ΔABC 合于所设条件。、讨论：当 $m_a \geq h_a$ 时一解，当 $m_a < h_a$ 时无解。

（2） 已知 ΔABC 的三中线 m_a 、 m_b 、 m_c 的长度，求作这三角形 .



分析：设 ΔABC 已作成. 以 G 表中线 AL 、BM 、CN
的交点，图形上没有可以奠基的三角形. 但若延长 GL 到 L 使 $LK = GL$，则四边形 $GBKC$ 是平行四边形，而 ΔBGK 的三边是已知长，即各中线长的 $2/3$. ΔBGK 可取为奠基三角形.

作法：作 ΔBGK 使 $GK=\frac{2}{3}m_a$ ，$GB=\frac{2}{3}m_b$, $BK=\frac{2}{3}m_c$. 作 GK 的中点 L，连 BL ，并延长 BL 到 C 使 $LC = BL$. 延长 LG 至 A 使 $GA = 2LG$，则 ΔABC 即所求者.

证：由作法，L 是 BC 的中点，因而 AL 是 ΔABC 的中线. 由于 $GA = 2LG$. G 是 ΔABC 的重心，并且

$$AL = 3LG = \frac{3}{2}GK = m_a .$$

以 M 、N 表 CA 、AB 的中点，由于 G 是重心，则

$$BM = \frac{3}{2}BG = m_b ,$$

$$CN = \frac{3}{2}CG = \frac{3}{2}BK = m_c 。$$

所以 ΔABC 合于条件.

讨论：本题有无解，决定于 ΔBGK 是否存在。此三角形存在的条件是

$m_a + m_b > m_c$, $m_b + m_c > m_a$ ，$m_c + m_a > m_b$ 。

所以, 所给三中线能构成三角形时, 本题有一解, 否则无解。

<table>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 18 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 18 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">总复习</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（ ）、实践课（ ）、习题题（√）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="5">教学步骤及内容：

指导学生复习及答疑</td></tr>
</table>

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教 学 后 记	