



揭阳职业技术学院

电子商务创业学院

《概率论与数理统计》教案

(2025-2026 学年第 1 学期)

教师姓名：梁庭欢

所授专业： 电子商务
(专本协同)

授课班级：241

课程整体教学设计

一、课程的性质和任务

本课程是全日制电子商务（专本协同）专业学生的一门必修的重要基础理论课，它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量建设人才服务的。

通过本课程的学习，要使学生获得随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等方面的基本概念、基本理论和基本运算能力。

在课程的教学过程中，要通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、数学建模与实践能力，注意培养学生的自学能力，注意理论联系实际，不断提高学生的综合素质以及运用所学知识解决实际问题的能力。

二、教学目标与要求

1、教学目标

- (1)掌握随机事件、事件概率、独立性及条件概率等基本概念；
- (2)掌握概率的性质，概率乘法公式，掌握古典概型及其解题方法，掌握伯努利概型；
- (3)在掌握有关基本概念和方法的基础上能解答一些常见的、一般性的概率问题。
- (4)正确理解和熟悉关于随机变量、随机变量概率分布，概率密度等基本概念；
- (5)掌握一维随机变量常见的离散型和连续型分布，会计算随机变量某个值或在某个区间取值的概率；
- (6)理解并基本掌握随机变量的函数的分布。
- (7)正确理解和熟悉关于随机变量的数学期望方差、矩及多维随机变量的协方差、相关系数等基本概念；
- (8)掌握数学期望及方差的性质，会求随机变量及随机变量的函数的数学期望和方差，会计算二维随机变量的协方差及相关系数；
- (9)了解大数定理和中心极限定理。
- (10)熟悉简单随机样本，统计量，样本均值，样本方差等基本概念；
- (11)掌握正态总体的分布，会查 χ^2 -分布，T-分布，F-分布数值表
- (12)掌握点估计的两种方法：矩法和极大似然法；

(13)掌握估计优良三个标准：无偏性、有效性和相合性；

(14)掌握区间估计的基本方法。

(15)正确理解和熟悉假设检验的基本思想，掌握正态总体均值和方差的假设检验；

(16)了解非正态总体参数的假设检验；

(17)了解分布函数的拟合检验

(18)了解方差分析与回归分析

2、课程思政育人目标

(1)知识维度：筑牢科学认知，涵养理性思维

结合随机事件、概率等基本概念的学习，引导学生认识客观世界的不确定性与规律性，树立“用数据说话、以理性判断”的科学认知观，摒弃主观臆断和经验主义，培养尊重客观规律的思维习惯。

在古典概型、伯努利概型等解题过程中，渗透“严谨细致、精益求精”的治学态度，让学生理解每一个步骤的逻辑依据，体会数学推理的严密性，进而养成求真务实、不敷衍了事的学习作风，杜绝学术浮躁现象。

学习大数定理和中心极限定理时，帮助学生领悟“从偶然到必然、从局部到整体”的辩证思维，理解个体随机性与总体规律性的统一关系，引导学生以发展、全面的眼光看待生活和工作中的问题，增强辩证分析能力。

(2)能力维度：提升实践素养，培育责任担当

围绕“解答常见概率问题”“计算随机变量取值概率”等目标，强化学生运用数学知识解决实际问题的能力，结合金融风险评估、医学统计分析、质量控制等真实案例，让学生感受概率统计在社会各领域的应用价值，激发“学以致用、服务社会”的意识，培养将理论知识转化为实践成果的能力。

在学习随机变量函数的分布、多维随机变量协方差与相关系数等内容时，锻炼学生的逻辑推理和抽象思维能力，同时通过小组合作解题、案例分析等活动，培养学生的团队协作能力和沟通表达能力，引导学生学会倾听他人观点、合理分工协作，树立“互利共赢、协同发展”的团队意识。

掌握点估计、区间估计、假设检验等统计方法的过程中，培养学生的批判性思维和决策能力，让学生学会对数据来源的可靠性、分析方法的合理性进行审视，

在面对实际问题时能够基于科学分析做出合理判断，避免盲目跟风或主观决策，同时树立“数据伦理”意识，尊重数据隐私，杜绝数据造假，坚守学术诚信底线。

(3)情感价值观维度：厚植家国情怀，塑造健全人格

结合方差分析、回归分析在工农业生产、社会经济调研等领域的应用案例，展示我国在科技研发、经济建设、民生保障等方面取得的成就，如通过统计数据呈现脱贫攻坚成果、科技创新投入产出效益等，引导学生感受国家发展的磅礴力量，增强民族自豪感和自信心，厚植“爱党爱国爱人民”的家国情怀。

在理解数学期望、方差等概念时，渗透“理性看待收益与风险、机遇与挑战”的价值观，引导学生认识到生活中不存在“绝对的完美”，成功需要付出努力且可能面临风险，培养学生的挫折承受能力和理性心态，既不盲目追求高收益而忽视风险，也不因害怕失败而畏惧尝试，树立“脚踏实地、积极进取”的人生态度。

了解分布函数拟合检验、非正态总体参数假设检验等内容时，让学生认识到科学研究的探索性和复杂性，引导学生尊重科学研究中的“不确定性”，培养“勇于探索、敢于创新、不畏失败”的科学精神，同时理解“量变引起质变”的哲学道理，鼓励学生在学习和研究中持之以恒、积累沉淀，逐步实现个人成长与价值提升，塑造坚韧不拔、追求卓越的健全人格。

三、教学方法与手段

该课程以老师讲授与启发为主，辅以学生讨论、练习与自学。

- (1) 精讲多练，注重学生基础知识的掌握;
- (2) 激发学生兴趣，加强自主学习;
- (3) 注意学习方法，指导培养自学能力。

四、理论与实践课程内容与学时分配

课程内容和学时分配表

章节 (序号)	内 容	学时数		
		理论	实践、实验	总学时
第一章	概率论的基本概念	4	2	6

第二章	随机变量及其分布	4	2	6
第三章	多维随机变量及其分布	4	2	6
第四章	随机变量的数字特征	4	2	6
第五章	大数定律及中心极限定理	4	0	4
第六章	样本及抽样分布	4	2	6
第七章	参数估计	4	2	6
第八章	假设检验	4	2	6
第九章	方差分析及回归分析	4	1	5
机动课	习题课	2	1	3
合计		38	16	54

授课时间	第 1 周	课 次	第 1 次	
章 节 名 称	第一章 概率论的基本概念			
	§1 随机试验 §2 样本空间、随机事件 §3 频率和概率 §4 等可能概型(古典概型) §5 条件概率			
授 课 方 式	理论课(√)、实践课()、习题课()、其它()		教学时数	3
教 学 的 目 的 要 求	1、教学目标 (1)了解随机试验、随机事件和样本空间的概念，掌握事件之间的关系及运算。 (2)理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，掌握加法公式、减法公式的运用。 (3)掌握古典概型和几何概型的定义，掌握古典概型和几何概型问题的求解。 (4)理解条件概率的概念，理解全概率公式和贝叶斯公式的定义，掌握用全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算。 2、课程思政育人目标 (1)思维上，借随机试验、概率公式等培养全面认知与严谨逻辑，提升抽象分析能力； (2)素养上，结合案例强化实践与团队协作力，树立理性决策的责任意识； (3)价值观上，以数学家精神厚植科学态度，借案例培育风险意识与社会责任感。			
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学			
教 学 重 点	重点：随机事件的概念，事件之间的关系及运算；概率的性质；古典概型的求解；条件概率的定义，乘法公式，全概率公式和贝叶斯公式。			

难点	难点：样本空间、事件的关系及运算；公理化定义的理解；事件中样本点的计算；掌握用全概率公式和贝叶斯公式进行计算。
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">§1 随机试验 §2 样本空间、随机事件</p> <p>一、基本概念：</p> <p>1、在一定条件下必然发生，称这类现象称为确定性现象。</p> <p>2、在这些现象中，结果都不止一个，并且事先无法预知会出现哪个结果，这类现象被称为随机现象。</p> <p>3、随机现象在一次试验中呈现不确定的结果，而在大量重复试验中结果呈现某种规律性，例如相对比较稳定的性别比例，这种规律性称为统计规律性。</p> <p>4、为了研究随机现象的统计规律性，就要对客观事物进行观察，观察的过程叫试验。</p> <p>5、随机试验的一切可能结果组成的集合称为样本空间，记为$\Omega = \{\omega\}$，其中ω表示试验的每一个可能结果，又称为样本点，即样本空间为全体样本点的集合。</p> <p>6、在一次试验中可能出现，也可能不出现的一类结果称为随机事件。</p> <p>二、定理与性质</p> <p>1、随机试验的三个特点：</p> <p>(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；</p> <p>(2) 每次试验的结果不止一个，但是试验之前可以明确试验的所有可能结果；</p> <p>(3) 每次试验将要发生什么样的结果是事先无法预知的。</p> <p>2、事件的定义解析</p> <p>(1) 任一随机事件 A 是样本空间Ω的一个子集。</p> <p>(2) 当试验的结果ω属于该子集时，就说事件 A 发生了。相反地，如果试验结果ω不属于该子集，就说事件 A 没有发生。例如，如果掷骰子掷出了 1，则事件 A 发生，如果掷出 2，则事件 A 不发生。</p> <p>(3) 仅含一个样本点的随机事件称为基本事件。</p> <p>(4) 样本空间Ω也是自己的一个子集，所以它也称为一个事件。由于Ω包含所有可能试验结果，所以Ω在每一次试验中一定发生，又称为必然事件。</p> <p>(5) 空集ϕ也是样本空间Ω的一个子集，所以它也称为一个事件。由于ϕ中不包含任何元素，所以ϕ在每一次试验中一定不发生，又称为不可能事件。</p> <p>3、随机事件间的关系</p>	

(1) 如果 $A \subset B$ (或 $B \supset A$)，则称事件 A 被包含在 B 中 (或称 B 包含 A)，见图 1.1。从概率论的角度来说：事件 A 发生必导致事件 B 发生。

(2) 如果 $A \subset B, B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$ 。从概率论的角度来说：事件 A 发生必导致事件 B 发生，且 B 发生必导致 A 发生，即 A 与 B 是同一个事件。

(3) 如果 A 与 B 没有相同的样本点，则称事件 A 与 B 互不相容 (或称为互斥)，见图 1.2。从概率论的角度来说：事件 A 与事件 B 不可能同时发生。

4、随机事件间的运算

(1) 事件 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ ，见图 1.3，表示由事件 A 与 B 中所有样本点组成的新事件。从概率论的角度来说：事件 A 与 B 中至少有一个发生。

(2) 事件 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$ (或 AB)，见图 1.4，表示由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件。从概率论的角度来说：事件 A 与 B 同时发生。

(3) 事件 A 与 B 的差，记为 $A - B$ ，见图 1.5，表示由在事件 A 中且不在事件 B 中的样本点组成的新事件。从概率论的角度来说：事件 A 发生而 B 不发生。

(4) 事件 A 的对立事件 (或称为逆事件、余事件)，记为 \bar{A} ，见图 1.6，表示由 Ω 中且不在事件 A 中的所有样本点组成的新事件，即 $\bar{A} = \Omega - A$ 。从概率论的角度来说：事件 A 不发生。

5、事件的运算性质定律：

(1) 交换律： $A \cup B = B \cup A$ ， $A \cap B = B \cap A$ ；

(2) 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ，

$$(AB)C = A(BC)；$$

(3) 分配律： $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$ ，

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)；$$

(4) 对偶律 (德·摩根公式)： $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ，并事件的对立等于对立事件的交，

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}，交事件的对立等于对立事件的并。$$

三、主要例题：

例 1 随机试验的例子：

- (1) 抛掷一枚均匀的硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；
- (2) 抛掷一枚均匀的骰子，出现的点数；
- (3) 某快餐店一天内接到的订单量；
- (4) 航班起飞延误的时间；
- (5) 一支正常交易的 A 股股票每天的涨跌幅。

例 2 下面给出例 1 中随机试验的样本空间：

- (1) 抛掷一枚均匀硬币的样本空间为 $\Omega_1 = \{H, T\}$ ，其中 H 表示正面朝上， T 表示反面朝上；
- (2) 抛掷一枚均匀骰子的样本空间为 $\Omega_2 = \{i, i = 1, 2, \dots, 6\}$ ；
- (3) 某快餐店一天内接到的订单量的样本空间为 $\Omega_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ；
- (4) 航班起飞延误时间的样本空间为 $\Omega_4 = \{t : t \geq 0\}$ ；
- (5) 一支正常交易的 A 股股票每天涨跌幅的样本空间为 $\Omega_5 = \{x : -10\% \leq x\% \leq 10\%\}$ 。

例 3 抛掷一枚均匀的骰子的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

随机事件 $A = \text{“出现 6 点”} = \{6\}$ ；

随机事件 $B = \text{“出现偶数点”} = \{2, 4, 6\}$ ；

随机事件 $C = \text{“出现的点数不超过 6”} = \{1, 2, \dots, 6\} = \Omega$ ，即一定会发生的必然事件；

随机事件 $D = \text{“出现的点数超过 6”} = \phi$ ，即一定不会发生的不可能事件。

例 4 用事件 A, B, C 的运算关系式表示下列事件，则：

- (1) A 出现， B, C 都不出现（记为 E_1 ）；
- (2) 所有三个事件都出现（记为 E_2 ）；
- (3) 三个事件都不出现（记为 E_3 ）；
- (4) 三个事件中至少有一个出现（记为 E_4 ）；
- (5) 三个事件中至少有两个出现（记为 E_5 ）；

(6) 至多一个事件出现 (记为 E_6) ;

(7) 至多二个事件出现 (记为 E_7)

§3 频率和概率

一、基本概念:

1、概率的公理化定义

设任一随机试验 E , Ω 为相应的样本空间, 若对任意事件 A , 有实数 $P(A)$ 与之对应, 且满足下面条件, 则数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率:

(1) 非负性公理 对于任意事件 A , 总有 $P(A) \geq 0$;

(2) 规范性公理 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性公理 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两互不相容事件组, 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

二、定理与性质:

性质 1 $P(\phi) = 0$ 。

性质 2 (有限可加性) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为两两互不相容的事件, 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ 。

性质 3 对任意事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

性质 4 若事件 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$ 。

推论 若事件 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$ 。

性质 5 (减法公式) 设 A, B 为任意事件, 则 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 。

性质 6 (加法公式) 设 A, B 为任意事件, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

三、主要例题:

例 1 (生日问题) n 个人中至少有两个人的生日相同的概率是多少?

例 2 已知事件 $A, B, A \cup B$ 的概率依次为 0.2, 0.4, 0.5, 求概率 $P(\bar{A}\bar{B})$ 。

例 3 设事件 A, B, C 为三个随机事件, 已知 $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.4$, $P(AB) = 0$, $P(BC) = P(AC) = 0.1$, 则 A, B, C 至少发生一个的概率是多少? A, B, C 都不发生的概率是多少?

§4 等可能概型(古典概型)

一、基本概念：

1、古典概型

(1) 随机试验的样本空间只有有限个样本点，不妨记作 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ；

(2) 每个样本点发生的可能性相等，即 $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$

若随机事件 A 中含有 n_A 个样本点，则事件 A 的概率为 $P(A) = \frac{A \text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega \text{ 中所有样本点的个数}} = \frac{n_A}{n}$

2、几何概型

(1) 随机试验的样本空间 Ω 是某个区域(可以是一维区间、二维平面区域或三维空间区域)，

(2) 每个样本点发生的可能性相等，

则事件 A 的概率公式为：
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

其中 $m(\bullet)$ 在一维情形下表示长度，在二维情形下表示面积，在三维情形下表示体积。

二、主要例题：

例 1 抛掷两颗均匀的骰子，观察出现的点数，设事件 A 表示“两个骰子的点数一样”，求 $P(A)$ 。

例 2 (抽样模型) 已知 N 件产品中有 M 件是不合格品，其余 $N - M$ 是合格品。今从中随机地抽取 n 件。试求：

(1) **不放回抽样** n 件中恰有 k 件不合格品的概率；

(2) **有放回抽样** n 件中恰有 k 件不合格品的概率。

例 3 (抽奖问题) 今有某公司年会的抽奖活动，设共有 n 张券，其中只有一张有奖，每人只能抽一张，设事件 A 表示为“第 k 个人抽到有奖的券”，试在有放回、无放回两种抽样方式下，求 $P(A)$ 。

例 4 在 $[0,1]$ 区间内任取一个数，求

(1) 这个数落在区间 $(0, 0.25)$ 内的概率；

(2) 这个数落在区间中点的概率；

(3) 这个数落在区间 $(0,1)$ 内的概率。

例 5 (碰面问题) 甲、乙两人约定在中午的 12 时到 13 时之间在学校咖啡屋碰面，并约定先到者等候另一人 10 分钟，过时即可离去。求两人能碰面的概率。

例 6 (蒲丰投针问题) 蒲丰投针试验是第一个用几何形式表达概率问题的例子。假设平面上画满间距为 a 的平行直线，向该平面随机投掷一枚长度为 $l (l < a)$ 的针，求针与任一平行线相交的概率。

§5 条件概率

一、基本概念:

1、设 E 是随机试验, Ω 是样本空间, A, B 是事件且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 称为**条件概率**, 记为 $P(B|A)$.

2、设 E 是随机试验, Ω 是相应的样本空间, A_1, A_2, \dots, A_n 为事件组, 若 A_1, A_2, \dots, A_n 满足条件:

$$\textcircled{1} A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$\textcircled{2} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

则称事件组 A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间的一个**完备事件组**. 完备事件组完成了对样本空间的一个分割.

二、定理与性质:

1, 条件概率也满足概率的公理化定义三条基本性质, 即非负性、规范性和可列可加性, 如下:

(1) **非负性公理** 对于任意事件 A , 总有 $P(A|B) \geq 0$;

(2) **规范性公理** $P(\Omega|B) = 1$;

(3) **可列可加性公理** 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两互不相容事件组, 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$.

2, (**概率的乘法定理**) 设 A, B 为试验 E 的事件, 且 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$. 同理, 若 $P(B) > 0$, 有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

3, 设 A, B, C 为任意的三个事件, 且 $P(AB) > 0$ 则

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

4, 更一般的, 有下面公式: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为事件组, 且 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

5, (**全概率公式**) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组, 且 $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, B 为任一事件, 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

(贝叶斯公式) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组, $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, B 为任一事件, 则

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}.$$

三、主要例题:

例 1 假设抛掷一颗均匀的骰子, 已知掷出的点数是偶数, 求点数超过 3 的概率?

例 2 假设一批产品中一二三等品各有 60 个, 30 个和 10 个, 从中任取一件, 发现不是三等品, 则取到的是一等品的概率是多少?

例 3 设 A, B 为事件, 且已知 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(A - B) = 0.5$, 求 $P(B | \bar{A})$ 。

例 4 一批零件共 100 个, 次品率为 10%, 从中不放回取三次 (每次取一个), 求第三次才取得正品的概率。

例 5 某手机制造企业有二个生产基地, 一个在 S 市, 一个在 T 市, 但都生产同型号手机. S 市生产的手机占总数的 60%, 而 T 市的则占 40%. 二个基地生产的手机都送到二地之间的一个中心仓库, 且产品混合放在一起. 从质量检查可知 S 市生产的手机有 5% 不合格; T 市生产的手机则有 10% 不合格. 求:

- (1) 从中心仓库随机抽出一个手机, 求它是不合格品的概率;
- (2) 从中心仓库随机抽出一个手机发现它是不合格的, 求它是来自 S 市生产的概率是多少?

例 6 有三只箱子, 第一个箱子中有四个黑球和一个白球, 第二个箱子中有三个黑球和三个白球, 第三个箱子中有三个黑球和五个白球. 现随机取一箱, 再从这个箱子中取一球, 已知取到的是白球, 这个白球是属于第二个箱子的概率是多少?

例 7 某种疾病的患病率为 0.1%, 某项血液医学检查的误诊率为 1%, 即非患者中有 1% 的人验血结果为阳性, 患者中有 1% 的人验血结果为阴性. 现知某人验血结果是阳性, 求他确实患有该种疾病的概率。

例 8 (敏感性调查) 考试作弊, 赌博, 偷税漏税, 酒后驾车等一些涉及个人隐私或利害关系, 不受被调查对象欢迎或感到尴尬的敏感问题。即使做无记名的直接调查, 很难消除被调查者的顾虑, 极有可能拒绝应答或故意做出错误的回答, 很难保证数据的真实性, 使得调查的结果存在很大的误差。如何设计合理的调查方案, 来提高应答率并降低不真实回答率。

调查方案设计的基本思想是, 让被调查者从

问题 1: 你在考试中作过弊吗?

问题 2: 你生日的月份是奇数吗?

中, 随机地选答其中一个, 同时让调查者也不知道被调查者回答的是哪一个问题, 从而保护被调查者的隐私, 消除被调查者的顾虑, 能够对自己所选的问题真实回答。

调查者准备一套 13 张同一花色的扑克, 在选答上述问题前, 要求被调查的学生随机抽取一张, 看后还原, 并使调查者不能知道抽取的情况. 约定如下: 如果学生抽取的是不超过 10 的数则回答问题 1; 反之, 则回答问题 2. 假定调查结果是收回 400 张有效答卷, 其中有 80 个学生回答“是”,

320 个学生回答“否”，求被调查的学生考试作弊的概率。																																						
复习思考题、作业题： 设事件 $A = \{\text{甲种产品畅销, 乙种产品滞销}\}$ ，则 A 的对立事件为 ()。 (A) 甲种产品滞销,乙种产品畅销; (B) 甲种产品滞销; (C) 甲、乙两种产品均畅销; (D) 甲种产品滞销或者乙种产品畅销.																																						
下次课预习要点 §6 独立性 第一章习题课																																						
教 学 后 记	由于同学们首次接触随机事件，为方便理解，建议把它与高中数学所学的集合论知识联系起来，同时借助韦恩图，对照学习。 表 1.1																																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>记号</th> <th>概率论</th> <th>集合论</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ω</td> <td>样本空间,必然事件</td> <td>全集</td> </tr> <tr> <td>\emptyset</td> <td>不可能事件</td> <td>空集</td> </tr> <tr> <td>ω</td> <td>基本事件</td> <td>元素</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>事件</td> <td>子集</td> </tr> <tr> <td>\bar{A}</td> <td>A的对立事件</td> <td>A的余集</td> </tr> <tr> <td>$A \subset B$</td> <td>事件A发生导致B发生</td> <td>A是B的子集</td> </tr> <tr> <td>$A = B$</td> <td>事件A与事件B相等</td> <td>A与B的相等</td> </tr> <tr> <td>$A \cup B$</td> <td>事件A与事件B至少有一个发生</td> <td>A与B的和集</td> </tr> <tr> <td>AB</td> <td>事件A与事件B同时发生</td> <td>A与B的交集</td> </tr> <tr> <td>$A - B$</td> <td>事件A发生而事件B不发生</td> <td>A与B的差集</td> </tr> <tr> <td>$AB = \emptyset$</td> <td>事件A和事件B互不相容</td> <td>A与B没有相同的元素</td> </tr> </tbody> </table>			记号	概率论	集合论	Ω	样本空间,必然事件	全集	\emptyset	不可能事件	空集	ω	基本事件	元素	A	事件	子集	\bar{A}	A 的对立事件	A 的余集	$A \subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 的相等	$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集	AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集	$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集	$AB = \emptyset$	事件 A 和事件 B 互不相容
记号	概率论	集合论																																				
Ω	样本空间,必然事件	全集																																				
\emptyset	不可能事件	空集																																				
ω	基本事件	元素																																				
A	事件	子集																																				
\bar{A}	A 的对立事件	A 的余集																																				
$A \subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集																																				
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 的相等																																				
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集																																				
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集																																				
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集																																				
$AB = \emptyset$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素																																				
授课时间	第 2 周	课 次	第 2 次																																			
章 节 名 称	第一章 概率论的基本概念 §6 独立性 第一章习题课																																					
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 ()、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 ()	教学时数	3																																			
教 学 的 目 的 要 求	1、教学目标 (1)理解随机事件相互独立的概念 (2)掌握用事件相互独立性进行概率计算的方法 (3)牢固掌握第一章内容 2、课程思政育人目标																																					

	借独立事件理解培养辩证思维，用其计算树严谨；巩固知识树系统认知，树求真务实态度。
教学方法	讲解法、练习法
教学重点难点	重点：独立性的定义。 难点：独立性定义的理解。
<p>教学步骤及内容：</p> <p>§6 独立性</p> <p>一、基本概念：</p> <p>1、设 A, B 为试验 E 的两个事件，如果满足等式：$P(AB) = P(A)P(B)$，称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立。</p> <p>2、设 A, B, C 是试验 E 的三个事件，如果满足等式：$P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，$P(BC) = P(B)P(C)$。称事件 A, B, C 两两独立。</p> <p>3、设 A, B, C 是试验 E 的三个事件，如果满足等式：$P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，$P(BC) = P(B)P(C)$，$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$。称事件 A, B, C 相互独立。</p> <p>4、一般地，设 A_1, A_2, \dots, A_n 是试验 E 的 n ($n \geq 2$) 个事件，如果对于其中任意两个事件的积事件的概率等于各事件概率的积，则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两独立；如果对于其中任意两个事件、任意三个事件、…、任意 n 个事件的积事件的概率等于各事件概率的积，则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立。</p> <p>二、定理与性质：</p> <p>若事件 A 与事件 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：</p> $A \text{ 与 } \bar{B}、\bar{A} \text{ 与 } B、\bar{A} \text{ 与 } \bar{B}。$ <p>三、主要例题：</p> <p>例 1 把一枚硬币独立的掷两次. 事件 A_i 表示“掷第 i 次时出现正面”，$i = 1, 2$；事件 A_3 表示“正、反面各出现一次”。试证，A_1, A_2, A_3 两两独立，但不相互独立。</p> <p>例 2 设某车间有三条独立工作的生产流水线，在一天内每条流水线要求工人维护的概率依次为 0.9、0.8 和 0.7。求一天中三台车床至少有一条流水线需要工人维护的概率。</p> <p>例 3 设有 n 个元件独立工作，分别按照串联、并联的方式组成两个系统 A 和 B（如图），已知每个元件正常工作的概率都为 p，分别求系统 A 和 B 的可靠性（即为系统正常工作的概率）。</p> <p>例 4 设 $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$, 事件 A, B 相互独立。试求 $P(A - B)$，$P(A A \cup B)$。</p> <p>P25 习题 1、2、3、4、5、6、7、8、9、14、16、28、34</p>	

复习思考题、作业题:

1 (87, 2分) 设在一次试验中 A 发生的概率为 p , 现进行 n 次独立试验, 则 A 至少发生一次的概率为_____ ; 而事件 A 至多发生一次的概率为_____。

2 (87, 2) 三个箱子, 第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球, 第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球。现随机地取一个箱子, 再从这个箱子中取出 1 个球, 这个球为白球的概率等于_____。已知取出的球是白球, 此球属于第二个箱子的概率为_____。

3 (88, 2分) 设三次独立试验中, 事件 A 出现的概率相等, 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率为_____。

4 (88, 2分) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为_____。

5 (89, 2分) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) =$ _____。

6 (89, 2分) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为_____。

7 (90, 2分) 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6, 若 \bar{B} 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____。

8 (91, 3分) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比。则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____。

9 (92, 3分) 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为_____。

10 (93, 3分) 一批产品有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_____。

11 (94, 3分) 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) =$ _____。

12 (96, 3分) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品是 A 厂生产的概率是_____。

13 (97, 3分) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球。今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第 2 个人取得黄球的概率是_____。

14 (98, 3分) 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有

(A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$

(B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$

(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

15 (99, 3分) 设两两相互独立的三事件 A, B 和 C 满足条件: $ABC = \Phi, P(A) = P(B) = P(C) = p$

<p>$(C) < \frac{1}{2}$, 且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$_____。</p> <p>16 (00, 3分) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$_____。</p> <p>17 (06, 4分) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A B) = 1$, 则必有</p> <p>(A) $P(A \cup B) > P(A)$. (B) $P(A \cup B) > P(B)$.</p> <p>(C) $P(A \cup B) = P(A)$. (D) $P(A \cup B) = P(B)$.</p>			
<p>下次课预习要点</p> <p>第二章 随机变量及其分布</p> <p>§1 随机变量</p> <p>§2 离散型随机变量及其分布律</p> <p>§3 随机变量的分布函数</p>			
教 学 后 记	<p>由于电子商务(专本协同)专业大多数同学是以考研为升学目标的, 所以讲授该课程的习题课时, 我采用了结合历年考研真题来给他们边温习回顾边讲解如何应用书本知识求解新问题, 安排较多习题课进行练习巩固。</p>		
授课时间	第 3 周	课 次	第 3 次
章 节 名 称	<p>第二章 随机变量及其分布</p> <p>§1 随机变量</p> <p>§2 离散型随机变量及其分布律</p> <p>§3 随机变量的分布函数</p>		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学时数	3
教 学 的 要 求	<p>1、教学目标</p> <p>(1)理解随机变量及其概率分布的概念。理解分布函数 $(F(x) = P\{X \leq x\})$ 的概念及性质。会计算与随机变量有关的事件的概率。</p> <p>(2)理解离散型随机变量及其概率分布的概念, 掌握 0-1 分布、二项分布、超几何分布、泊松 (Poisson) 分布及其应用。</p> <p>(3)会求简单随机变量函数的概率分布。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>借随机变量及分布培养抽象思维, 用分布解题树严谨; 结合应用树实践观, 厚植科学与责任意识。</p>		
教 学 方 法	<p>讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</p>		

教 学 重 点 难 点	重点：随机变量及其概率分布的概念、分布函数的概念及性质与计算；离散型随机变量及其概率分布的概念，0-1分布、二项分布、超几何分布、泊松分布及其应用；简单随机变量函数的概率分布。 难点：分布函数的求法；0-1分布、二项分布、超几何分布、泊松分布及其应用；简单随机变量函数的概率分布的求法。
-------------------	--

教学步骤及内容：

§1 随机变量 §3 随机变量的分布函数

一. 随机变量

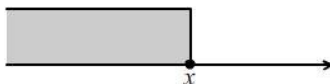
1. 随机变量：设 E 是随机试验，样本空间为 S ，如果对随机试验的每一个结果 ω ，都有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应，那么把这个定义在 S 上的单值实值函数 $X = X(\omega)$ 称为随机变量。随机变量一般用大写字母 X, Y, Z, \dots 表示。

2. 随机变量的两种常见类型：离散型随机变量和连续型随机变量。

二. 分布函数

1. 分布函数：设 X 是一个随机变量， x 是任意实数，称函数 $F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < \infty$ 为随机变量 X 的分布函数，显然， $F(x)$ 是一个定义在实数域 R 上，取值于 $[0, 1]$ 的函数。

2. 几何意义：在数轴上，将 X 看成随机点的坐标，则分布函数 $F(x)$ 表示随机点 X 落在阴影部分（即 $X \leq x$ ）内的概率，如下图。



3. 对任意的实数 $a, b, c (a < b)$ ，都有：

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a),$$

$$P\{X > c\} = 1 - P\{X \leq c\} = 1 - F(c).$$

4. 分布函数的性质：

(1) 单调性：分布函数是单调不减的，即若 $x_1 < x_2$ ，则 $F(x_1) \leq F(x_2)$ ；

(2) 有界性： $0 \leq F(x) \leq 1$ ，且 $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ， $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ；

(3) 右连续性： $F(x+0) = F(x)$ 。

说明：分布函数一定具有这三个基本性质；反过来，任意一个满足这三个基本性质的函数，一定可以作为某个随机变量的分布函数。因此，这三个基本性质成为判别一个函数是否能成为分布函数的充要条件。

三. 例题讲解

例 1. 通过某公交站牌的汽车每 10 分钟一辆, 随机变量 X 为乘客的候车时间, 其分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{10}, & 0 \leq x < 10, \\ 1, & x \geq 10. \end{cases}$$

求: (1) $P\{X \leq 3\}$; (2) $P\{1 < X \leq 9\}$; (3) $P\{X > 5\}$.

例 2. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} a + \frac{b}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ c, & x \leq 0 \end{cases}$$

求常数 a, b, c 的值?

例 3. 在半径为 R , 球心为 O 的球内任取一点 P , 令 X 为 OP 的长度, 求 X 的分布函数.

§2 离散型随机变量及其分布律

一. 离散型随机变量及其概率分布

1. 离散型随机变量: 若随机变量 X 所有可能的取值为有限个或者可列个, 则称这样的随机变量为离散型随机变量.

2. 随机变量的概率分布: 设 X 为离散型随机变量, X 所有可能的取值为 $x_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 称

$$P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, 3, \dots$$

为随机变量 X 的概率分布, 也称为分布律或分布列.

概率分布也可以用表格的形式表示:

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots

或者记为:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix}$$

3. 离散型随机变量概率分布的性质:

(1) 非负性: $p_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots$;

(2) 正则性: $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$.

4. 离散型随机变量的分布函数: 若离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\}, i = 1, 2, 3, \dots$$

即分布函数是分布律在一定范围内的累积.

二. 常用的离散型随机变量

1. (0-1) 分布

(1) (0-1) 分布: 若随机变量 X 只有两个可能的取值 0 和 1, 其分布律为 $P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$, 则称 X 服从以 p 为参数的 (0-1) 分布或两点分布.

(2) (0-1) 分布的分布律也可以记为

X	0	1
P	$1-p$	p

或 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

2. 二项分布

(1) 二项分布: 若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数, 则有

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

则称随机变量 X 服从二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$, 其中 n 和 $p (0 < p < 1)$ 是二项分布的参数, 上式就是二项分布的分布律.

(2) 二项分布的特例: 在二项分布中, 若令 $n=1$, 则 $X \sim B(1, p)$, 其分布律为 $P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$, 即 X 服从 (0-1) 分布. 因此 (0-1) 分布是二项分布的特例, 简记 $B(1, p)$.

3. 泊松分布

(1) 泊松分布: 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$, 其中 λ 为大于 0 的参数, 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.

(2) 泊松定理: 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 在一次试验中出现的概率为 p_n (与试验总数 n 有关), 如果当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $np_n \rightarrow \lambda (\lambda > 0 \text{ 常数})$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$.

(3) 说明: 泊松定理表明, 泊松分布为二项分布的极限分布, 即在试验次数 n 很大, 而 np_n 不

太大时，二项分布可以用参数为 $\lambda = np_n$ 的泊松分布来近似。

4. 几何分布

(1) 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots, q = 1 - p$, 其中 $p(0 < p < 1)$ 为参数, 则称 X 服从几何分布, 记为 $X \sim G(p)$.

(2) 说明: 几何分布描述的是试验首次成功的次数 X 所服从的分布, 也可以解释为: 在 n 重伯努利试验中, 试验到第 k 次才取得第一次成功, 前 $k-1$ 次皆失败.

5. 超几何分布

(1) 超几何分布: 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, 2, \dots, r$. 其中 $r = \min\{M, n\}$, 且 $M \leq N, n \leq N, n, N, M$ 均为正整数, 则称随机变量 X 服从超几何分布, 记为 $X \sim H(n, N, M)$.

(2) 有限总体 N 中的不放回抽样服从超几何分布, 例如有 N 件产品, 其中 M 件不合格, 从产品中不放回的抽取 n 件, 则抽取的产品中不合格品的件数 X 服从超几何分布.

(3) 超几何分布与二项分布之间的区别: 超几何分布是不放回抽取, 二项分布是放回抽取, 因此, 二项分布中每个事件之间是相互独立的, 而超几何分布不独立. 两个分布之间也有联系, 当总体的容量 N 非常大时, 超几何分布近似于二项分布.

三. 例题讲解

例 1. 已知盒中有 10 件产品, 其中 8 件正品, 2 件次品. 需要从中取出 2 件正品, 每次取 1 件, 直到取出两件正品为止, 做不放回抽样. 设 X 为取件的次数, 则: (1) 求 X 的分布律; (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$; (3) 求概率 $P\{2 \leq X \leq 3\}$.

例 2. 金工车间有 10 台同类型的机床, 每台机床配备的电动机功率为 10 千瓦, 已知每台机床工作时, 平均每小时实际开动 12 分钟, 且开动与否是相互独立的. 现在当地电力供应紧张, 供电部门只提供 50 千瓦的电力给这 10 台机床, 问这 10 台机床能够正常工作的概率有多大?

例 3. 有 2500 个相同年龄阶段、相同社会层次的人参加某保险公司的意外伤害保险, 根据以往统计资料, 在 1 年里每个人出现意外伤害的概率是 0.0001, 每个参加保险的人 1 年付给保险公司 120 元保费, 而在出现意外时家属从保险公司领取 2 万元. 请计算

(1) 保险公司亏本的概率;

(2) 保险公司一年获利不少于 10 万元的概率.

例 4. 一家商店在每个月的月底要制定出下个月的商品进货计划, 为了不使商品的流动资金积压, 进货量不宜过多, 但为了获得足够的利润, 进货量又不易过少. 由该商店过去的销售记录知道, 某种商品每月的销售可以用参数为 $\lambda = 10$ 的泊松分布来描述, 为了以 95% 以上的把握保证不脱销, 问商店在月底至少应进某种商品多少件?

例 5. 某公司订购了一种型号的加工机床, 机床的故障率为 1%, 各台机床之间是否出现故障是相互独立的, 求在 100 台此类机床中, 故障的台数不超过三台的概率.

例 6. 某流水线生产一批产品, 其不合格率为 p , 有放回地对产品进行检验, 直到检验出不合格品为止. 设随机变量 X 为首次检验出不合格品所需要的检验次数, 求 X 的概率分布.			
复习思考题、作业题: P55 习题 1-5.			
下次课预习要点 §4 连续型随机变量及其概率密度 §5 随机变量的函数的分布 第二章习题课			
教 学 后 记	<p>在讲述离散型随机变量的分布律与分布函数二者的关系时, 可以这样安排:</p> <p>1、 已知分布函数, 求分布律 经验总结: 分两步骤 第一步: 找出分布函数各定义域的分界点, 它们就是随机变量所取的各个值; 第二步: 把后一个分布函数减去前一个分布函数, 即为分布律表格中所对应的概率值。</p> <p>2、 已知分布律, 求分布函数 经验总结: 分两步骤 第一步: 画一条数轴, 分布律中随机变量的各个值把这条数轴划分为各个小区间(区间写成左闭右开形式), 这些小区间就是分布函数的各个定义域; 第二步: 分布函数总第一个值总是 0, 最后一个值总是 1, 第二个值即为分布律表格中第一个概率值, 第三个值即为分布律表格中第一、二个概率值之和, 第四个值即为分布律表格中第一、二、三个概率值之和……以此类推。</p>		
授课时间	第 4 周	课 次	第 4 次
章 节 名 称	第二章 随机变量及其分布 §4 连续型随机变量及其概率密度 §5 随机变量的函数的分布 第二章习题课		
授 课 方 式	理论课(√)、实践课()、习题课(√)、其它()	教学时数	3
教 学 的 要 求	<p>1、教学目标</p> <p>(1) 理解连续性随机变量及其概率密度的概念, 掌握概率密度与分布函数之间的关系, 掌握正态分布、均匀分布、指数分布及其应用。</p> <p>(2) 会求简单随机变量函数的概率分布。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>理解连续型随机变量等知识时, 培养严谨逻辑思维与科学精神; 运用概率知识解决问题, 树立学以致用观念, 厚植求真务实的专业素养。</p>		

教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教 学 重 难 点	<p>重点：连续性随机变量及其概率密度的概念，概率密度与分布函数之间的关系，正态分布、均匀分布、指数分布及其应用；简单随机变量函数的概率分布。</p> <p>难点：概率密度与分布函数之间的关系，正态分布、均匀分布、指数分布及其应用；简单随机变量函数的概率分布的求法。</p>
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">§4 连续型随机变量及其概率密度</p> <p>一. 连续型随机变量及其概率密度</p> <p>1. 连续型随机变量：设 X 是随机变量，如果存在函数 $f(x)$，对任意的常数 $a, b (a < b)$，有</p> $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx,$ <p>则称 X 为连续型随机变量，同时称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，或简称为概率密度。</p> <p>2. 概率密度函数的性质：</p> <p>(1) 非负性： $f(x) \geq 0$；</p> <p>(2) 正则性： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.</p> <p>3. 概率密度的几何意义：随机变量落入区间 $[a, b]$ 内的概率等于曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上形成的曲边梯形的面积，而正则性表明，曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间的部分面积为 1.</p> <p>4. 连续型随机变量的分布函数： $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(y)dy$，则在 $f(x)$ 的连续点处，$F'(x) = f(x)$.</p> <p>5. 两点说明：</p> <p>(1) 连续型随机变量在某一个点 c 处的概率为 0，即 $P\{X = c\} = \int_c^c f(x)dx = 0$.</p> <p>(2) 连续型随机变量落在某个区间内的概率，不受区间端点处取值的影响，即</p> $\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{a \leq X < b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X < b\} \\ &= \int_a^b f(y)dy = F(b) - F(a). \end{aligned}$ <p>二. 常用的连续型随机变量</p> <p>1. 均匀分布</p> <p>(1) 均匀分布：设 X 为连续型随机变量，若概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 其中 $a, b (a < b)$</p> <p>为任意实数，则称随机变量 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布，记为 $X \sim U(a, b)$.</p> <p>(2) 均匀分布的分布函数： $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$</p>	

(3) 应用: 若 X 在 (a, b) 上服从均匀分布, 对 (a, b) 内的任一个子区间 (c, d) , 有

$$P\{c < X < d\} = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

2. 指数分布

(1) 指数分布: 设 X 为连续型随机变量, 若概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 其中参数 $\lambda > 0$,

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记为 $X \sim E(\lambda)$.

(2) 指数分布的分布函数: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(3) 定理: (指数分布的无记忆性) 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, 则对于任意的正数 s 和 t 有

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}.$$

3. 正态分布

(1) 正态分布: 设 X 为连续型随机变量, 若概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$, 其

中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为参数, 则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布, 也叫高斯分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

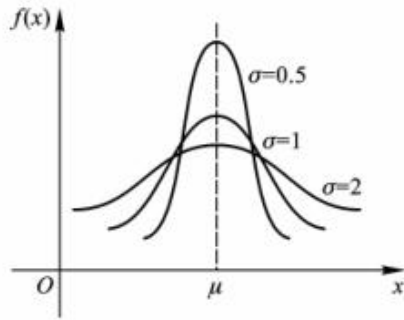
(2) 正态分布的分布函数: $F(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, -\infty < x < \infty.$

(3) 几点说明:

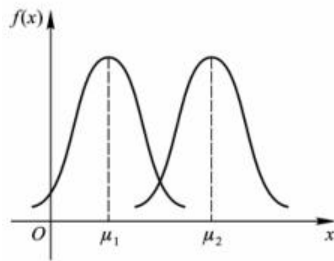
(i) 概率密度 $f(x)$ 的图形关于 $x = \mu$ 对称, 是轴对称图形, 在 $x = \mu$ 处取到最大值, 并且对于同样长度的区间, 若区间离 μ 越远, 则 X 落在这个区间内的概率越小.

(ii) $f(x)$ 的图形以 x 轴为渐近线, 随着 x 的取值往两侧无限延伸, 图形与 x 轴无限接近, 但又不会相交.

(iii) 当参数 μ 固定时, σ 的值越大, $f(x)$ 的图形就越平缓; σ 的值越小, $f(x)$ 的图形就越尖狭, 由此可见参数 σ 的变化能改变图形的形状, 称 σ 为形状参数.



(iv) 当参数 σ 固定时, 随着 μ 值的变化, $f(x)$ 图形的形状不改变, 位置发生左右平移, 由此可见参数 μ 的变化能改变图形的位置, 称 μ 为位置参数.



(4) 标准正态分布 $X \sim N(0,1)$

(i) 概率密度 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$

(ii) 分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < \infty.$

(iii) 根据概率密度 $\varphi(x)$ 的对称性, 有 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$

(5) 定理: (标准化定理) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$

(6) 标准化定理的应用: 设 $x, a, b (a < b)$ 为任意实数, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

$$P\{a < X \leq b\} = P\left\{\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

6. “ 3σ ”法则: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0.997,$$

即正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量以 99.7% 的概率落在以 μ 为中心、 3σ 为半径的区间内, 落在区间以外的概率非常小, 可以忽略不计, 这就是“ 3σ ”法则.

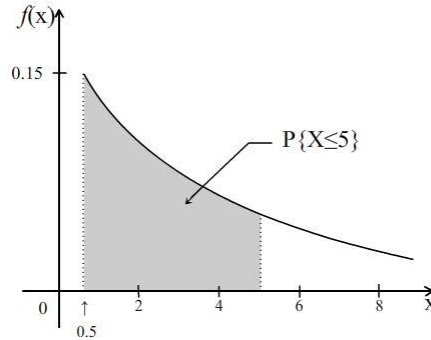
三. 例题讲解

例 1. 车流中的“时间间隔”是指一辆车通过一个固定地点与下一辆车开始通过该点之间的时间

长度. 设 X 表示在大流量期间, 高速公路上相邻两辆车的时间间隔, X 的概率密度描述了高速公路上的交通流量规律, 其表达式为:

$$f(x) = \begin{cases} 0.15e^{-0.15(x-0.5)}, & x \geq 0.5, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

概率密度 $f(x)$ 的图形如下图, 求时间间隔不大于 5 秒的概率.



例 2. 设随机变量 X 表示桥梁的动力荷载的大小 (单位: N), 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求: (1) 分布函数 $F(x)$; (2) 概率 $P\{1 \leq X \leq 1.5\}$ 及 $P\{X > 1\}$.

例 3. 某食品厂生产一种产品, 规定其重量的误差不能超过 3 克, 即随机误差 X 服从 $(-3, 3)$ 上的均匀分布. 现任取出一件产品进行称重, 求误差在 $-1 \sim 2$ 之间的概率.

例 4. 设随机变量 X 在 $(1, 4)$ 上服从均匀分布, 对 X 进行三次独立的观察, 求至少有两次观察值大于 2 的概率.

例 5. 设随机变量 X 表示某餐馆从开门营业起到第一个顾客到达的等待时间 (单位: min), 则 X 服从指数分布, 其概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 0.4e^{-0.4x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求等待至多 5 分钟的概率以及等待 3 至 4 分钟的概率.

例 6. 汽车驾驶员在减速时, 对信号灯做出反应所需的时间对于帮助避免追尾碰撞至关重要. 有研究表明, 驾驶员在行车过程中对信号灯发出制动信号的反应时间服从正态分布, 其中 $\mu = 1.25$ 秒, $\sigma = 0.46$ 秒. 求驾驶员的制动反应时间在 1 秒至 1.75 秒之间的概率? 如果 2 秒是一个非常长的反应时间, 那么实际的制动反应时间超过这个值的概率是多少?

例 7. 设某公司制造绳索的抗断强度服从正态分布, 其中 $\mu = 300$ 千克, $\sigma = 24$ 千克. 求常数 a , 使抗断强度以不小于 95% 的概率大于 a .

§5 随机变量的函数的分布

一. 离散型随机变量函数的分布

若 X 是离散型随机变量, $g(x)$ 是实数 x 的函数, 则当 X 取有限个或可列个值时, $Y = g(X)$ 也取有限个或可列个值. 根据离散型随机变量求解分布律的方法, 首先确定 Y 的取值, 再分别求出相应取值的概率, 这样就得到了 Y 的分布律.

二. 连续型随机变量函数的分布

1. 分布函数法

设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$, 即 $F_X(x) = P\{X \leq x\}$, $y = g(x)$ 是实数 x 的函数, 求随机变量 $Y = g(X)$ 的分布.

(1) 求出随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$.

(2) 当 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量时, $F_Y(y)$ 关于 y 求导, 就得到了 Y 的概率密度 $f_Y(y) = F_Y'(y)$; 当 $Y = g(X)$ 不是连续型随机变量时, 要根据函数 $g(x)$ 的特点作个案处理.

2. 公式法

定理: 设 X 是连续型随机变量, 其概率密度为 $f_X(x)$, 又函数 $g(x)$ 严格单调, 其反函数 $h(y)$ 有连续导数, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

三. 例题讲解

例 1. 设随机变量 X 表示某品牌手表的日走时误差 (单位: s), 其分布律为:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.4	0.3	0.1

求 $Y = (X - 1)^2$ 的分布律.

例 2. 某仪器设备内的温度 T 是随机变量, 且 $T \sim N(100, 4)$, 已知 $M = \frac{1}{2}(T - 10)$, 试求 M 的分布.

例 3. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(-1, 3)$, 记

$$Y = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & X < 0, \\ \frac{1}{2}, & X \geq 0. \end{cases}$$

求 Y 的分布律.

例 4. 设随机变量 X 表示某服务行业一位顾客的服务时间, X 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 $Y = e^X$ 的概率密度.

例 5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y = |X|$ 的概率密度.

第二章习题课

1 (88, 2分) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布上. 已知

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \Phi(2.5) = 0.9938$, 则 X 落在区间 (9.95, 10.05) 内的概率为_____。

2 (88, 6分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$

的概率密度函数 $f_Y(y)$ 。

3 (89, 2分) 设随机变量 ξ 在区间 (1, 6) 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是_____。

4 (90, 2分) 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$, 则 X 的概率分布函数 $F(x) =$ _____。

5 (93, 3分) 设随机变量 X 服从 (0, 2) 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 (0, 4) 内的概率分布密度 $f_Y(y) =$ _____。

6 (95, 6分) 设随机变量 X 的概率密度为

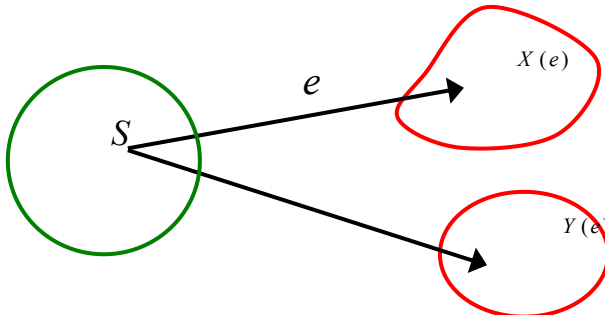
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

7 (02, 3分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____。

8 (04, 4分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $\frac{u_\alpha}{2}$. (B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (C) $\frac{u_{1-\alpha}}{2}$. (D) $u_{1-\alpha}$. []

	§3 条件分布		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ()、习题课 ()、其它 ()	教学时数	3
教 学 的 要 求	1、教学目标 (1)理解二维随机变量的概念，理解二维随机变量的联合分布的概念、性质；连续型联合概率密度和边缘密度，会利用二维概率分布求有关事件的概率； (2)掌握二维均匀分布，了解二维正态分布的概率密度，理解其中参数的概率意义。 2、课程思政育人目标 运用分布求概率、理解参数意义，树立严谨治学态度，提升解决实际问题的责任意识。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点：二维离散型随机变量的联合分布律及边缘分布律，二维连续型随机变量的联合概率密度及边缘概率密度；条件分布律，条件概率密度的概念。 难点：利用二维概率分布求有关事件的概率，二维正态分布；条件概率密度的计算。		
教学步骤及内容： §1 二维随机变量 一、二维随机变量的概念 在射击时，炮弹弹着点与横坐标和纵坐标有关，弹着点受两个变量的影响。横坐标和纵坐标是定义在一个样本空间的两个随机变量。 与一维随机变量类似，一般地我们可定义二维随机变量如下： 定义： 设 E 是一个随机试验，样本空间是 $S = \{e\}$ ，设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在其样本空间 S 上的随机变量，由它们构成的向量 (X, Y) ，称为定义在样本空间 S 上的 二维随机向量 或 二维随机变量 。			
			
图1			
在研究随机向量的概率特征时，除每个随机变量的概率特征外，还要研究它们的联合概率特征：后者可以完全决定前者，但是前者一般不能完全决定后者。因此，只研究单个随机变量的分布是不			

够的，还必须研究随机向量作为一个整体的联合分布。

与一维情形类似，为了研究二维随机变量的联合分布，我们引入“分布函数”来研究二维随机变量。

定义： 设 (X, Y) 是二维随机变量，对于任意的实数 x, y ，二元函数：

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \stackrel{\text{记成}}{=} P(X \leq x, Y \leq y)$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的**分布函数**，或称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**。

如果将二维随机变量 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么，分布函数 $F(x, y)$ 在平面上任意点 (x, y) 处的函数值就是随机点 (X, Y) 落在点 (x, y) 左下方的整个无穷区域内的概率，如图 2 所示。

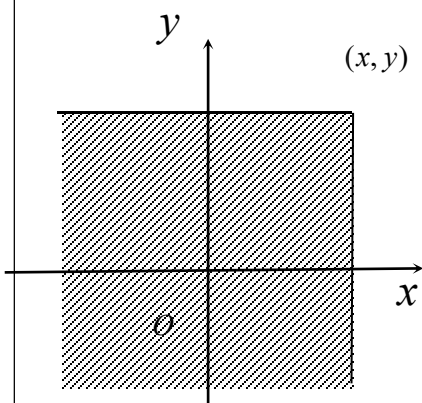


图2

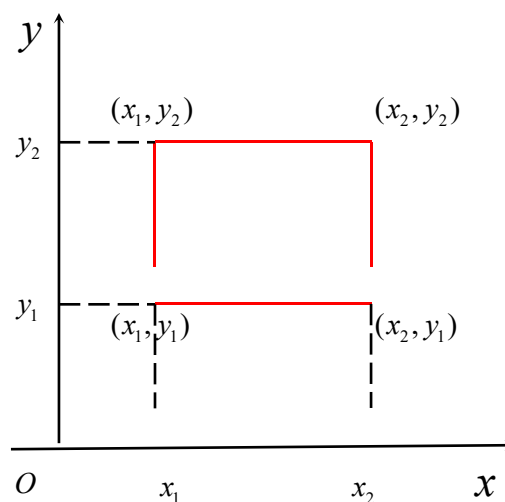


图3

借助图 3 容易算出随机点 (X, Y) 落在矩形区域 $[x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2]$ 的概率为

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2)$$

联合分布函数 $F(x, y)$ 具有下列基本性质：

1. $F(x, y)$ 是变量 x, y 的不减函数
2. $0 \leq F(x, y) \leq 1$ ，且对任意固定的 $y, F(-\infty, y) = 0$, 对任意固定的 $x, F(x, -\infty) = 0$ ，

$$F(-\infty, -\infty) = 0 \quad F(+\infty, +\infty) = 1 \quad ,$$

3. $F(x, y) = F(x+0, y)$ ， $F(x, y) = F(x, y+0)$

$F(x, y)$ 关于 x 和 y 均右连续.

4. 对任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$$

二、二维离散型随机变量

与一维随机变量的情形类似, 我们这里讨论的也是离散型和连续型这两种类型的二维随机变量.

定义: 若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值是有限对或可列无限多对, 则称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**.

显然, 若 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 则其分量 X 和 Y 都是一维离散型随机变量.

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 它所有可能的取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 记

$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$, 则由概率的定义有

1. $p_{ij} \geq 0$ (非负性)
2. $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ (规范性)

我们称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ 为二维离散变量 (X, Y)

的**分布律**, 或随机变量 X 和 Y 的**联合分布律**.

我们可以用表格表示 X 和 Y 的联合分布律:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
y_1	p_{11}	p_{21}	\dots	p_{i1}	\dots
y_2	p_{12}	p_{22}	\dots	p_{i2}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\dots	p_{ij}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots

例 1 设随机变量 X 在 $1, 2, 3, 4$ 四个整数中等可能地取一个值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能的取一个值. 试求 (X, Y) 的分布律.

解: 由乘法公式容易求得 (X, Y) 的分布律.

易知 $\{X = i, Y = j\}$ 的取值情况是: $i = 1, 2, 3, 4, j$ 取不大于 i 的正整数. 且

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\}P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4, j \leq i$$

于是 (X, Y) 的分布律为:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16

将 (X, Y) 看成一个随机点的坐标, 由图 2 知道离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij} \quad (1)$$

例 2 一个袋中有三个球, 依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个, 设每次取球时各球被取到的可能性相等, 以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求 X, Y 的分布律.

解: (X, Y) 的可能取值为 $(1, 2), (2, 1), (2, 2)$,

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 2, Y = 2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$p_{11} = 0, \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{3}$, 故 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

三、二维连续型随机变量

与一维情形类似, 我们有如下定义:

定义 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 若存在非负可积函数 $f(x, y)$ 使得对于任意实数 x 和 y , 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

则称 (X, Y) 为连续型的二维随机变量, $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的**概率密度**, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

按定义, 概率密度 $f(x, y)$ 具有以下性质:

(1) (非负性) $f(x, y) \geq 0$

(2) (规范性) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1$

(3) 设 G 是 xOy 平面上的区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

(4) 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续, 则有 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$

在几何上 $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面, 由性质 2 知, 界于它和 xOy 平面的空间区域的体积为 1. 由性质 3 知, $P\{(X, Y) \in D\}$ 值等于以 D 为底、以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

例 3 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$.

解: (1) $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$

$$= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-(2x+y)} dx dy, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即有

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

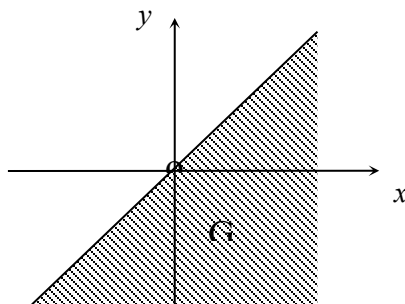


图4

(2) 将 (X, Y) 看作是平面上随机点的坐标, 即有

$$\{Y \leq X\} = \{(X, Y) \in G\}$$

其中 G 为 xOy 平面上直线 $y = x$ 及其下方的部分, 如图 4,

于是 $P\{Y \leq X\} = P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx dy = \frac{1}{3}$$

例 4 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$;

(3) 求 $P\{X < 1.5\}$; (4) $P\{X + Y \leq 4\}$.

解: 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 所以 $\int_0^2 \int_2^4 k(6-x-y) dy dx = 1$,

即 $8k = 1, k = \frac{1}{8}$;

$$(2) P\{X < 1, Y < 3\} = \int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{3}{8};$$

$$(3) P\{X < 1.5\} = \int_0^{1.5} \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{27}{32};$$

$$(4) P\{X + Y \leq 4\} = P\{X \leq 4 - Y\} = \int_2^4 \int_0^{4-y} \frac{1}{8}(6-x-y) dx dy = \frac{2}{3}.$$

注: 1. $\iint_S f(x, y) dx dy = 1$ 往往是一个重要的隐含条件.

2. 计算类似于 $P\{X + Y \leq 4\}$ 这种问题, 关键在于先确定事件 $\{X + Y \leq 4\}$ 所对应的区域 G 的图形,

然后只需利用性质 3 将问题转化为 G 上的重积分.

四、多维随机变量

关于二维随机变量的讨论可以推广到 $n(n > 2)$ 维随机变量的情况. 一般地, 设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \dots, X_n = X_n(e)$ 是定义在其样本空间 S 上 n 维随机变量, 由它们构成一个 n 维向量, (X_1, X_2, \dots, X_n) 叫做 **n 维随机向量或 n 维随机变量**.

对于任意 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n , n 元函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$ 称为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的**分布函数**或随机变量

X_1, X_2, \dots, X_n 的**联合分布函数**. 它具有类似于二维随机变量的分布函数的性质.

§2 边缘分布

一、边缘分布函数

二维随机变量 (X, Y) 作为一个整体，它具有联合分布函数 $F(x, y)$ ，而 X 和 Y 都是一维随机变量，它们也有自身的概率分布函数，将它们分别记为 $F_X(x)$ ， $F_Y(y)$ ，依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布函数**。边缘分布函数可以由 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$ 所确定，事实上，

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y \leq y\} \cdot P\{X < +\infty\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$

即 $F_Y(y) = F(+\infty, y)$ ，同理 $F_X(x) = F(x, +\infty)$ 。

下面分别讨论二维离散型随机变量和二维连续型随机变量的边缘分布：

二、二维离散型随机变量

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其联合分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$

则 (X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X = x_i\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y < +\infty\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

即 $P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ $i = 1, 2, \dots$ ，其中： $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$

同理 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布列为

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\text{记} \begin{cases} p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots \\ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

分别称 $p_{i \cdot} (i = 1, 2, \dots)$ 和 $p_{\cdot j} (j = 1, 2, \dots)$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律。

离散型随机变量的边缘分布可从联合分布表的表格形式直接得到。（**强调这一点！**）

三、二维连续型随机变量

定义： 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，其联合概率密度函数为 $f(x, y)$

$$\text{由 } F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

$$\text{所以 } X \text{ 的概率密度为 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

同理 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

分别称 $f_X(x), f_Y(y)$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘概率密度** .

例 1 一整数 N 等可能的在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 十个值中取一个值. 设 $D = D(N)$ 是能整除

N 的正整数的个数, $F = F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数 (注意 1 不是素数) .

试写出 D 和 F 的联合分布律. 并求边缘分布律.

解: 先将实验的样本空间及 D, F 的取值情况列出如下:

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

D 所有可能取的值为 $1, 2, 3, 4$; F 所有可能取的值为 $0, 1, 2$. 容易得到

(D, F) 取 $(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 0, 1, 2$ 的概率, 这样可以得到 D 和 F 的联合分布律及边缘分布律

如下表所示:

F \ D	1	2	3	4	P {F=j }
0	1/10	0	0	0	1/10
1	0	4/10	2/10	1/10	7/10
2	0	0	0	2/10	2/10
P {D= i }	1/10	4/10	2/10	3/10	1

即有边缘分布律:

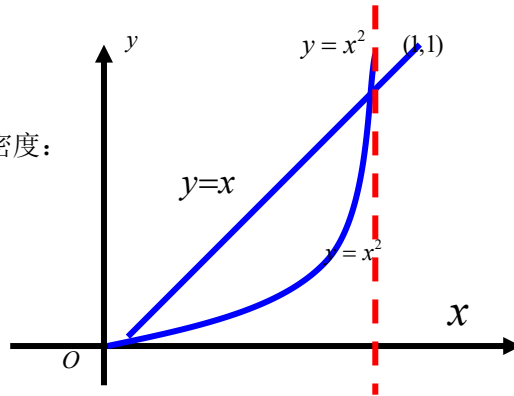
D	1	2	3	4
P_k	1/10	4/10	2/10	3/10

F	0	1	2

P_k 1/10 7/10 2/10

例 2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 3 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right],$$

其中 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1, (x, y) \in R^2$

我们称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布.

记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

$$\text{解: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{由于 } \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

于是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} dy$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right), \text{ 则有}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dy,$$

$$\text{即 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, -\infty < x < +\infty$$

$$\text{同理 } f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, -\infty < y < +\infty$$

由上可见，二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且边缘分布与参数 ρ 无关，也就是说，如 $\rho_1 \neq \rho_2$ ，则 $N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_1)$ 与 $N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_2)$ 是不同的，也对应不同的二维正态分布，但它们都有相同的边缘分布。

这也说明，边缘分布不能唯一确定联合分布。

提问：边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布一定是二维正态分布吗？

解答：不一定，我们来看一个反例。令 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y)$$

$$\text{显然 } (X, Y) \text{ 不服从正态分布，但是 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布不一定是二维正态分布。

$$\text{设 } (X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 (1) $f_X(x)$; (2) $P\{X+Y \leq 1\}$.

解：(1) 当 $x > 0$ 时，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}.$$

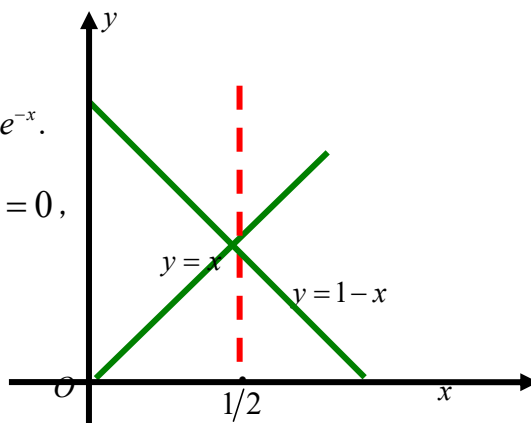
$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时， } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0,$$

$$\text{故 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) P\{X+Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy = -\int_0^1 [e^{-(1-x)} - e^{-x}] dx$$

$$= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}.$$



§3 条件分布

由条件概率很自然的引出条件概率分布的概念.

一、二维离散型随机变量的条件分布

设 (X, Y) 二维离散型随机变量, 其分布律为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$

(X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots$$

由条件概率公式, 可得

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i = 1, 2, \dots,$$

易知条件概率具有分布律的性质:

$$1. P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1$$

定义: 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**, 简称条件分布.

同样, 对于固定 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的**条件分布律**.

例 1 在一汽车工厂中, 一辆汽车有两道工序是由机器人完成的, 其一是紧固 3 只螺栓, 其二是焊接 2 处焊点. 以 X 表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目, 以 Y 表示机器人焊接的不良焊点的数目. 据积累的资料知 (X, Y) 具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	P {Y=j }
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
P {X = i }	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.

解: 边缘分布已列入上表. 在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律为:

$$P\{Y=0|X=1\} = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.030}{0.045}$$

$$P\{Y=1|X=1\} = \frac{P\{Y=1, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.010}{0.045}$$

$$P\{Y=2|X=1\} = \frac{P\{Y=2, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.005}{0.045}$$

或写成

Y = k	0	1	2
P{Y = k X = 1}	6/9	2/9	1/9

同样可以得到在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律为

X = k	0	1	2	3
P{X = k Y = 0}	84/90	3/90	2/90	1/90

例 2 一射手在进行射击, 击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 射击直到击中目标两次为

止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数, 试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律. (此例选择讲解)

解: 按题意 $Y=n$ 就表示在第 n 次射击时击中目标, 且在第 1 次, 第 2 次, …… , 第 $n-1$ 次射击中恰有一次击中目标. 已知各次射击是相互独立的, 于是不管 $m(m < n)$ 是多少, 概率

$$P\{X=m, Y=n\} \text{ 都应等于 } p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = p^2 q^{n-2} \quad (\text{这里 } q=1-p)$$

即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\} = p^2 q^{n-2}, n=2, 3, \dots; m=1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{又 } P\{X=m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2} = \frac{p^2 q^{m-1}}{1-q} = pq^{m-1}, m=1, 2, \dots,$$

$$P\{Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

于是由(1)(2)式得到所求的条件分布概率为

$$\text{当 } n = 2, 3, \dots \text{ 时, } P\{X = m | Y = n\} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}}, m = 1, 2, \dots, n-1$$

当 $m = 1, 2, \dots$ 时,

$$P\{Y = n | X = m\} = \frac{p^2 q^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}, n = m+1, m+2, \dots$$

例如 $P\{X = m | Y = 3\} = \frac{1}{2}, m = 1, 2;$

$$P\{Y = n | X = 3\} = pq^{n-4}, n = 4, 5, \dots$$

注: 本例中求和的上下限由 $1 \leq m < n$ 确定, 其定限思路类似于重积分定限.

二、二维连续型随机变量的条件分布

当 (X, Y) 是连续型随机变量时, 由于对任意实数 x 和 y , 有

$$P\{X = x\} = 0 \quad P\{Y = y\} = 0$$

因此, 不能直接用条件概率公式, 此时我们用极限的方法引入“条件分布函数”的概念:

设 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度函数为 $f_Y(y)$. 给定 y ,

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 对任意 x , 考虑条件概率

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}$$

设 $P\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$, 则有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}$$

$$= \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}} = \frac{\int_{-\infty}^x \left[\int_y^{y+\varepsilon} f(x, y) dy \right] dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy}$$

在某些条件下, 当 ε 很小时, 上式右端分子, 分母分别近似于 $\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y) dx$ 和 $\varepsilon f_Y(y)$,

于是当 ε 很小时, 有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} \approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)}.$$

(3)

定义: 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若

对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为在条件 $Y = y$ 下 X 的**条件概率密度**, 记为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (4)$$

称 $\int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)}$ 为在条件 $Y = y$ 下, X 的**条件分布函数**, 记为

$P\{X \leq x | Y = y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$, 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)} \quad (5)$$

类似地, 我们可以定义 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 和 $F_{Y|X}(y|x)$.

由(3)知道, 当 ε 很小时, 有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} \approx \int_{-\infty}^x f_{Y|X}(y|x) dx = F_{Y|X}(y|x)$$

上式说明了条件密度和条件分布函数的含义.

设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 $P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\}$.

分析: 能否这样考虑, 由于 $P\{X = \frac{1}{4}\} = 0$, $P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\} = \frac{P\{X = \frac{1}{4}, Y \leq \frac{1}{8}\}}{P\{X = \frac{1}{4}\}}$ 不存在?

这样分析是不对的! 因为 $P\{X = \frac{1}{4}\} = 0$ 并不表示 $\{X = \frac{1}{4}\}$ 为不可能事件, $\frac{P\{X = \frac{1}{4}, Y \leq \frac{1}{8}\}}{P\{X = \frac{1}{4}\}}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型,

不一定没有极限.

正确的解法为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 3x dy, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{因此 } f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \begin{cases} 3x/3x^2 = x, & 0 \leq y < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{于是 } P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{8}} f_{y|x}(y|\frac{1}{4}) dy = \int_0^{\frac{1}{8}} 4 dy = \frac{1}{2}.$$

例 4 设 G 为平面上的有界区域, 其面积为 A . 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在区域 G 上服从均匀分布. 现设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 求条件概率密度 $f_{x|y}(x|y)$.

解: 由假设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且有边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是当 $-1 < y < 1$ 时有

$$f_{x|y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $y=0$ 和 $y=\frac{1}{2}$ 时, $f_{x|y}(x|y)$ 的图形分别如图 6, 7 所示.

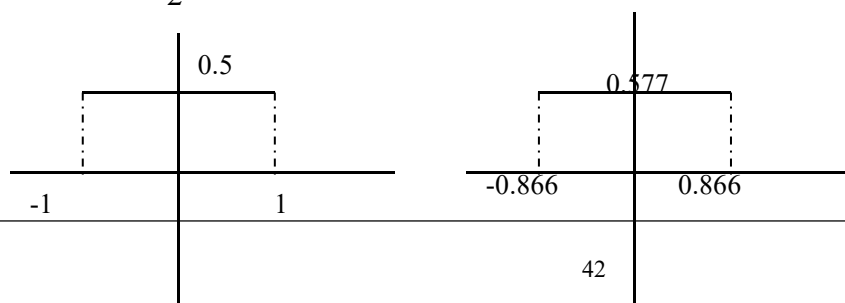


图 6

图 7

例 5 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机的取值, 当观察到 $X = x(0 < x < 1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机的取值, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 按题意 X 具有概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

对于任意给定的值 $x(0 < x < 1)$, 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, x < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

所以 X, Y 的联合概率密度为 $f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, 0 < x < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

于是得到关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), 0 < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

复习思考题、作业题:

P86 习题 1-9.

下次课预习要点:

第三章 多维随机变量及其分布

§4 相互独立的随机变量

§5 两个随机变量的函数的分布

第三章习题课

教
学
后
记

可以这样帮助学生梳理本节课中的概念与关系:

二维随机变量 (X, Y)

(1) 不管 (X, Y) 为离散型还是连续型, 均有分布函数这一概念, 又分为:

$$\begin{cases} \text{联合分布函数 } F(x, y) \\ \text{边缘分布函数 } F_X(x), F_Y(y) \end{cases} \quad \text{成立: } X, Y \text{ 独立} \Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

(2) 当 (X, Y) 为离散型时, 还有分布律这一概念, 又分为:

	$\begin{cases} \text{联合分布律} \\ \text{边缘分布律} \end{cases}$ <p>给出联合分布律，可以推导边缘分布律，并成立：</p> $X, Y \text{独立} \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}, \quad \forall i, j$ <p>(3) 当(X, Y)为连续型时，还有密度函数这一概念，又分为：</p> $\begin{cases} \text{联合密度函数} f(x, y) \\ \text{边缘密度函数} f_X(x), f_Y(y) \end{cases}$ <p>成立：$X, Y \text{独立} \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$</p>		
授课时间	第 6 周	课 次	第 6 次
章 节 名 称	第三章 多维随机变量及其分布 §4 相互独立的随机变量 §5 两个随机变量的函数的分布 第三章习题课		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学时数	3
教 学 的 要 求	1、教学目标 (1)理解随机变量的独立性概念，掌握离散型和连续型随机变量独立的条件。 (2)会求两个随机变量的简单函数（和、顺序统计量）的分布。 2、课程思政育人目标 理解随机变量独立性及判定条件，培养辩证看待“关联与独立”的思维，树立严谨治学态度。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 难 点	重点：随机变量独立性的判别；二维随机变量的和、最大值、最小值的分布。 难点：二维随机变量和的分布、卡方分布的性质。		
教学步骤及内容： §4 相互独立的随机变量 一、两个随机变量的独立性 对事件 A, B ，若 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ，则称事件 A 与事件 B 是相互独立的。类似可引出两个随机变量相互独立的概念。 定义 设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数和边缘分布函数。若对任意实数 x 和 y ，有 $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}, \quad (1)$			

$$\text{即 } F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (2)$$

则称随机变量 X 与 Y 是**相互独立**的.

随机变量的独立性是概率论中的一个重要概念, 在大多数情形下, 概率论和数理统计是以独立随机变量作为其主要研究对象的. 对于离散型和连续型随机变量, 我们分别有下列的结论.

结论 1 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, $f(x, y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为 (X, Y) 的联合概率密度函数和边缘概率密度, 则 X 与 Y 相互独立的充要条件(2)等价于等式

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (3)$$

在平面上几乎处处成立.

注: 这里的“几乎处处”可理解为平面上使(3)不成立的点 (x, y) 的全体只能形成面积为零的区域.

结论 2 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 其联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则 Y 与 X 相互独立的充要条件是对于任意的

$$(x_i, y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \text{有}$$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \quad (4)$$

即有 $p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \dots$ 成立.

注: 在实际使用中 (3) 式或 (4) 式比使用 (2) 式方便.

下面我们来看几个例子:

§ 1 例 2 中的随机变量 X 和 Y , 由于

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故有 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 因而 X, Y 是相互独立的.

又如 X, Y 具有联合分布律

Y \ X	1	2	P {Y=j }
1	1/6	2/6	1/2
2	1/6	2/6	1/2
P {X= i }	1/3	2/3	1

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{6} = P\{X=0\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{1}{6} = P\{X=0\}P\{Y=2\}$$

则有

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2}{6} = P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{2}{6} = P\{X=1\}P\{Y=2\}$$

因而 X, Y 是相互独立的.

§2 例1 中随机变量 F 和 D , 由于 $P\{D=1, F=0\} = \frac{1}{10} \neq P\{D=1\}P\{F=0\}$

因而 F 和 D 不是相互独立的.

例 1 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 X, Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0$.

证明: (X, Y) 的联合密度和边缘密度分别为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$\text{则 } f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

因此 $\rho = 0$ 时, 对所有的 x, y 有 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 成立, 即 X, Y 相互独立.

反之, 若 X, Y 相互独立, 则有

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \text{ 对 } (x, y) \in R^2 \text{ 成立.}$$

$$\text{令 } x = \mu_1, y = \mu_2, \text{ 则可得到: } \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \Rightarrow \rho^2 = 0,$$

即 $\rho = 0$ 证毕.

$$\text{例 2 设 } (X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} Cy(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x. \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 求 C 的值;

(2) 求关于 X 关于 Y 的边缘概率密度;

(3) 判断 X, Y 的独立性.

解: (1) 由于 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^x Cy(1-x) dy dx \\ &= \int_0^1 C(1-x) \frac{x^2}{2} dx = \frac{C}{24} = 1, \text{ 则 } C = 24. \end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x. \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 24y(1-x) dy = 12x^2(1-x),$$

当 $x < 0$, 或 $x > 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0$.

于是 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2.$$

当 $y < 0$, 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = 0$.

$$\text{因而有 } f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(3) 由于 $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 (X, Y) 不独立.

例 3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在 8~12 时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 7~9 时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟 (1/12 小时) 的概率.

解: 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间, 由假设 X 和 Y 的概率密度分别为:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 8 < x < 12, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

由于 X, Y 相互独立, 故 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y) = \begin{cases} 1/8, & 8 < x < 12, 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

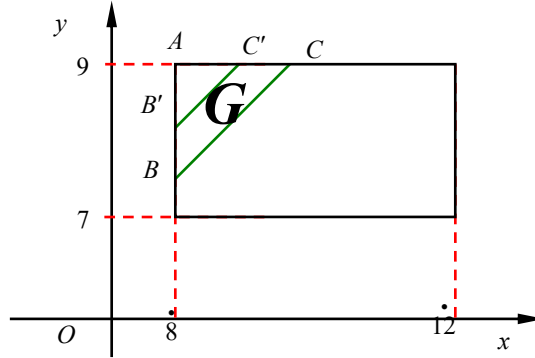
$$P\{|X - Y| \leq 1/12\} = \iint_G p(x, y) dx dy = \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积})$$

而 G 的面积 = ΔABC 的面积 - $\Delta AB'C'$ 的面积

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{12} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \right)^2 = \frac{1}{6}$$

于是

$$P\{|X - Y| \leq 1/12\} = \frac{1}{48}.$$



因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为 $\frac{1}{48}$.

二、多维随机变量的独立性

将二维随机变量的概念推广到 n 维随机变量的情形:

n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 为任意实数.

若 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 已知, 则

(X_1, X_2, \dots, X_n) 的 k ($1 \leq k < n$) 维边缘分布函数随之而定, 如 (X_1, X_2, \dots, X_n)

关于 X_1 、关于 (X_1, X_2) 的边缘分布函数就分别为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, \dots, +\infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \dots, +\infty)$$

若对任意的实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$

则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的.

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$$

进一步, 若对任意的实数有 $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot F_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

其中 F_1, F_2, F 依次为 (X_1, X_2, \dots, X_m) , (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 、

$(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的分布函数，则称随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 是相互独立的。

现在，我们不加证明地给出一个有用定理，它在数理统计中是很有用的。

定理 若 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 相互独立，则

(1) X_i 与 Y_j 相互独立， $i=1, 2, \dots, m$. $j=1, 2, \dots, n$.

(2) 若 h, g 是连续函数，则 $h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 和 $g(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 相互独立。

§5 两个随机变量的函数的分布

引入：

上一章已经讨论过一个随机变量函数的分布，本节我们讨论二维随机变量的分布。需要注意的是， n 维随机变量函数形成的随机变量仍然是一维随机变量，这里我们主要讨论二维随机变量函数的分布问题，解决这类问题的关键是掌握其基本思想方法。

新授：

一、和的分布

求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数。对于任意的实数 Z ，根据定义，

有 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$

$$\begin{aligned} &= \iint_{D_Z: x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

对固定的 z 和 y ，先作变换 $x = u - y$

由连续型随机变量概率密度函数的定义可得

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(u - y, y) du \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y) dy \right] du \end{aligned}$$

由概率密度的定义，即得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy \quad (1)$$

由 X, Y 的对称性， $f_Z(z)$ 又可以写成

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx \quad (2)$$

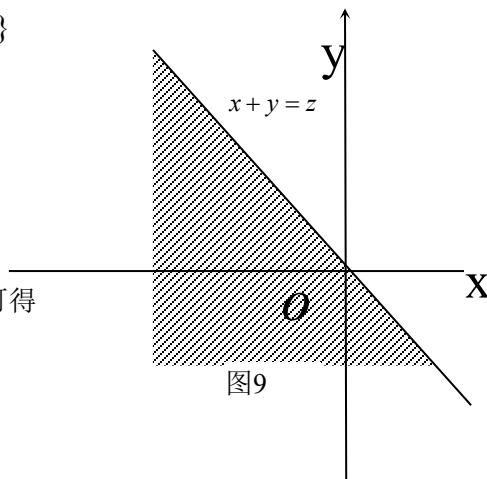


图9

特别, 当 X 与 Y 相互独立时, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$

则 (1), (2) 式分别化为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy \quad (3)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx \quad (4)$$

这两个公式称为**卷积公式**, 记为 $f_X * f_Y$, 即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$$

例 1 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 它们都服从 $N(0, 1)$ 分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, -\infty < x < +\infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, -\infty < y < +\infty$$

求 $Z = X + Y$ 的分布密度.

解: 用卷积公式(4)式,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx$$

令 $t = x - \frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \quad \text{即 } Z \text{ 服从}$$

$N(0, 2)$ 分布.

一般, 设相互独立, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则

$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 这个结论可以推广到 n 个独立的正态随机变量之和的情况, 即

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i = 1, 2, \dots, n)$, 且它们相互独立, 则有

$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N\left(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2\right)$, 更一般地, 有结论:

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例 2 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联, 设 R_1, R_2 相互独立, 他们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

解: 由(4), R 的概率密度为

$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot f(z-x) dx$$

易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 10 \\ 0 < z-x < 10 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 0 < x < 10 \\ z-10 < x < z \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不为零. 由图 10, 可得

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) \cdot f(z-x) dx, & 0 \leq z < 10 \\ \int_{z-10}^{10} f(x) \cdot f(z-x) dx, & 10 \leq z \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将 $f(x)$ 的表达式代入上式得

$$f_R(z) = \begin{cases} \frac{1}{15000} (600z - 60z^2 + z^3), & 0 \leq z < 10 \\ \frac{1}{15000} (20-z)^3, & 10 \leq z \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 3 若 X 与 Y 独立, 具有共同的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 求 } Z = X + Y \text{ 的概率密度.}$$

解: 由卷积公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$

为确定积分限, 先找出使被积函数不为 0 的区域

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 & \quad \text{即} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z-1 \leq x \leq z & \quad \text{即} \quad 0 \leq z-x \leq 1 \end{aligned}$$

如图 11 所示, 于是

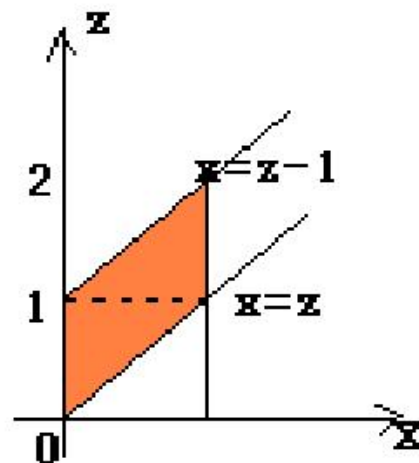


图 11

$$z(z) = \begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2 - z, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例4 设 X_1, X_2 为相互独立且分别服从 $\Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ 分布,

X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \alpha_1 > 0, \beta > 0$$

$$f_{X_2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_2-1} e^{-y/\beta}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \alpha_2 > 0, \beta > 0$$

试证明 $X_1 + X_2$ 服从 $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ 分布. (此例只讲思路和结论)

证明: 由(4)知, 当 $z \leq 0$ 时, $Z = X_1 + X_2$ 的概率密度为 $f_Z(x) = 0$. 而

当 $z > 0$ 时,

$Z = X_1 + X_2$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{\beta^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta} \frac{1}{\beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta} dx \\ &= \frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx \quad (\text{令 } x = zt) \\ &= \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt \\ &\stackrel{\Delta}{=} Az^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

通过计算得到 $A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$$\text{于是 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} z^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-z/\beta}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ ，说明 Γ -分布对于其第一个参数具有可加性，因 $\chi^2(n)$ 即 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 分布，故 χ^2 -分布也具有可加性。

上述结论可以推广到 n 个相互独立的 Γ -分布变量之和的情况。

二、 $M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$ ，现在来求 $M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$ 的分布函数。

由于 $\{M = (X, Y) \leq z\}$ 等价于 $\{X \leq z\}$ 且 $\{Y \leq z\}$ ，因此，对于任意的实数 z

$$\text{有 } P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$$

又由于 X, Y 相互独立，得到 $M = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\}$$

$$\text{即有 } F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) \quad (5)$$

类似地，可以得到 $N = \min(X, Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \end{aligned}$$

$$\text{即 } F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \quad (6)$$

更一般地，设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别是 $F_{X_i}(x_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，则 $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(z)$$

$N = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(z)]$$

特别, 若 X_1, \dots, X_n 相互独立且有相同的分布 $F(x)$, 则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

第三章习题课

P86 习题 10-20.

复习思考题、作业题:

1 (87, 6分) 设随机变量 X, Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

2 (91, 6分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数。

3 (92, 6分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布, 试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度 (计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示, 其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} (dt).$$

4 (94, 3分) 设相互独立的两个数随机变量 X 与 Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

$$\begin{array}{cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

则随机变量 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布律为_____。

5 (95, 3分) 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且

$$P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$$

则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$ _____。

	Y	
X		
	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 互相独立, 则

- (A) $a=0.2, b=0.3$ (B) $a=0.4, b=0.1$
 (D) $a=0.3, b=0.2$ (D) $a=0.1, b=0.4$ []

13 (05, 9分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

14 (06, 4分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15 (06, 9分) 随机变量 x 的概率密度为 $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 令 $y = x^2, F(x, y)$ 为二维随机

变量 (X, Y) 的分布函数.

(I) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

(II) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

下次课预习要点:

第四章 随机变量的数字特征

§1 数学期望

§2 方差

§3 协方差及相关系数

教 学
后 记

注意: 均匀分布的边际函数不一定是均匀分布! 可以这样想: 我的高度都是一样的, 但 x 对应的 y 的范围可能不一样大, y 的范围大 f_x 就大, 范围小 f_x 就小, 那还能叫均匀分布吗?

我们原来说“全概率函数不能直接用边缘函数表示”, 就是因为 $P(xy)$ 不一定等于 $p(x)p(y)$, x, y 可能是不独立的, $f(y|x)$ 可能不等于 $f(y)$ 。现在有了条件函数就可以了。

	该部分内容与高等数学中的二重积分联系密切，必要时适当予以复习回顾。		
授课时间	第 7 周	课 次	第 7 次
章 节 名 称	第四章 随机变量的数字特征 §1 数学期望 §2 方差 §3 协方差及相关系数		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学时数	3
教 学 的 目 的 要 求	1、教学目标 (1)理解随机变量数字特征（数学期望、方差、标准差）的概念；并会运用数字特征的基本性质计算具体分布的数字特征； (2)熟悉常用分布的数字特征； (3)会根据随机变量 X 的概率分布求其函数的数学期望； (4)会根据随机变量 X 和 Y 的联合概率分布求其函数的数学期望； (5)掌握求解协方差的方法。 2、课程思政育人目标 学习数字特征及计算，培养精准运算的严谨习惯。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点：常见分布的数学期望；连续型随机变量的方差；协方差的求解。 难点：随机变量的数学期望和方差性质，协方差的求解。		
教学步骤及内容： <h3 style="text-align: center;">§1 数学期望</h3> <p>引入：在前面两章中我们讨论了随机变量的概率分布，这是关于随机变量统计规律的一种完整描述，然而在实际问题中，确定一个随机变量的分布往往不是一件容易的事，况且许多问题并不需要考虑随机变量的全面情况，只需知道它的某些特征数值.例如，在测量某种零件的长度时，测得的长度是一个随机变量，它有自己的分布,但是人们关心的往往是这些零件的平均长度以及测量结果的精确程度；再如，检查一批棉花的质量，既要考虑棉花纤维的平均长度，又要考虑纤维长度与平均长度的偏离程度，平均长度越大，偏离程度越小，质量越好.这些与随机变量有关的数值，我们称之为随机变量的数字特征，在概率论与数理统计中起着重要的作用.本章主要介绍随机变量的数学期望、方差、矩以及两个随机变量的协方差和相关系数.</p> <p>新授：</p> <p>1.1 数学期望的概念</p>			

在实际问题中，我们常常需要知道某一随机变量的平均值，怎样合理地规定随机变量的平均值呢？先看下面的一个实例。

例 1.1 设有一批钢筋共 10 根，它们的抗拉强度指标为 110，135，140 的各有一根；120 和 130 的各有两根；125 的有三根。显然它们的平均抗拉强度指标绝对不是 10 根钢筋所取到的 6 个不同抗拉强度：110，120，125，130，135，140 的算术平均，而是以取这些值的次数与试验总次数的比值（取到这些值的频率）为权重的加权平均，即

$$\begin{aligned} \text{平均抗拉强度} &= (110 + 120 \times 2 + 125 \times 3 + 130 \times 2 + 135 + 140) \times \frac{1}{10} \\ &= 110 \times \frac{1}{10} + 120 \times \frac{2}{10} + 125 \times \frac{3}{10} + 130 \times \frac{2}{10} + 135 \times \frac{1}{10} + 140 \times \frac{1}{10} \\ &= 126 \end{aligned}$$

从上例可以看出，对于一个离散型随机变量 X ，其可能取值为 x_1, x_2, \dots, x_n ，如果将这 n 个数相加后除 n 作为“均值”是不对的。因为 X 取各个值的频率是不同的，对频率大的取值，该值出现的机会就大，也就是在计算取值的平均时其权数大。如果用概率替换频率，用取值的概率作为一种“权数”做加权计算平均值是十分合理的。

经以上分析，我们可以给出离散型随机变量数学期望的一般定义。

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 1.1 设 X 为一离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$ ($k = 1, 2, \dots$)，若级数

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数之和为随机变量 X 的数学期望，简称期望或均值。记为 $E(X)$ ，即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (1.1)$$

例 1.2. 某人从 n 把钥匙中任取一把去试房门，打不开则除去，另取一把再试直至房门打开。已知钥匙中只有一把能够把房门打开，求试开次数的数学期望。

解 设试开次数为 X ，则分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{1}{n}, k = 1, 2, \dots, n,$$

从而

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

例 1.3 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 因为 $P_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$),

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k p_k = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n p \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= n p [p + (1-p)]^{n-1} = n p \end{aligned}$$

例 1.4 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 因为 $X \sim P(\lambda)$, 有

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

因此

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

我们可以类似地给出连续型随机变量数学期望的定义, 只要把分布律中的概率 P_k 改为概率密度 $f(x)$, 将求和改为求积分即可. 因此, 我们有下面的定义.

2. 连续型随机变量的数学期望

定义 1.2 设 X 为一连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 的值为连续型随机变量 X 的数学期望或均值, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (1.2)$$

例 1.5 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(X)$.

解 依题意, 得,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}.$$

例 1.6 设随机变量 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布, 求 $E(X)$.

解 依题意, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

因此

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

例 1.7 设随机变量 X 服从 λ 为参数的指数分布, 求 $E(X)$.

解 依题意, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

因此

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

例 1.8 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 由于 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

因此

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ (\text{令 } t = \frac{x-\mu}{\sigma}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu \end{aligned}$$

例 1.9 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(X)$.

解 由第三章例 3.2 的结果关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

即 $X \sim E(3)$, 因此

$$E(X) = \frac{1}{3}.$$

1.2 随机变量函数的数学期望

定理 1.1 设随机变量 Y 是随机变量 X 的函数, $Y = g(X)$ (其中 g 为一元连续函数).

(1) X 是离散型随机变量, 概率分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

则当无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛时, 则随机变量 Y 的数学期望为

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k; \quad (1.3)$$

(2) X 是连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 则当广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛时, 则随机变量 Y 的数学期望为

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx. \quad (1.4)$$

这一定理的重要意义在于, 求随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望时, 只需利用 X 的分布律或概率密度就可以了, 无需求 Y 的分布, 这给我们计算随机变量函数的数学期望提供了极大的方便.

定理的证明超出了本书的范围, 下面我们仅就连续型随机变量, 且 $Y = g(X)$ 单调的情形给出证明.

证明 第二章给出了随机变量 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $f_X(x)$ 为随机变量 X 概率密度, 函数 $y = g(x)$ 是处处可导的严格单调函数, 它的反函数为 $x = h(y)$, 则有

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] |h'(y)| dy$$

当 $h'(y) > 0$ 时

$$E(Y) = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] h'(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

当 $h'(y) < 0$ 时

$$\begin{aligned} E(Y) &= -\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)] h'(y) dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} g(x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

例 1.10 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	0.1	0.3	0.4	0.2

求随机变量 $Y = 3X^2 - 2$ 的数学期望.

解 依题意, 可得,

$$\begin{aligned} E(Y) &= [3 \times (-1)^2 - 2] \times 0.1 + (3 \times 0^2 - 2) \times 0.3 \\ &\quad + (3 \times 1^2 - 2) \times 0.4 + (3 \times 2^2 - 2) \times 0.2 \\ &= 1.9 \end{aligned}$$

例 1.11 随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y = X^2$ 的数学期望.

解 依题意, 可得

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1
\end{aligned}$$

例 1.12 国际市场每年对我国某种商品的需求量是随机变量 X (单位:吨),它服从 $[2000, 4000]$ 上的均匀分布, 已知每售出 1 吨商品, 可挣得外汇 3 万元;若售不出去而积压, 则每吨商品需花费库存费等共 1 万元, 问需要组织多少货源, 才能使国家受益期望最大?

解 设组织货源 t 吨, $t \in [2000, 4000]$, 受益为随机变量 Y (单位: 万元), 按照题意 Y 是需求 X 的函数

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3X - (t - X), & \text{当 } X < t, \\ 3t, & \text{当 } X \geq t, \end{cases}$$

X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & 2000 \leq x \leq 4000 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

由 (1.4), 得

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \\
&= \frac{1}{2000} \left\{ \int_{2000}^t [3x - (t - x)]dx + \int_t^{4000} 3tdx \right\} \\
&= \frac{1}{2000} [-2t^2 + 14000t - 8000000]
\end{aligned}$$

当 $t = 3500$ 时 $E(Y)$ 达到最大值, 也就是说组织货源 3500 吨时国家的期望受益最大.

例 1.13 柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ ($-\infty < x < +\infty$) 的数学期望由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty,$$

所以不存在.

上述的定理可以推广到两个或两个以上随机变量的函数上去, 我们有下面的定理.

定理 1.2 设随机变量 Z 是随机变量 (X, Y) 的函数, $Z = g(X, Y)$, 其中 g 为二元连续函数, 则

(1) 如果 (X, Y) 为二维离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

且 $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}; \quad (1.5)$$

(2) 如果 (X, Y) 为二维连续型随机变量时, 概率密度为 $f(x, y)$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 绝对收敛, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (1.6)$$

例 1.14 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

	Y		
		0	1
X			
0		0.1	0.3
1		0.4	0.2

求 $E(XY)$ 和 $E(Z)$, 其中 $Z = \max(X, Y)$.

解 依题意, 可得

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.3 + 1 \times 0 \times 0.4 + 1 \times 1 \times 0.2 = 0.2;$$

$$E(Z) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.9 = 0.9.$$

例 1.15 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 (1) $E(XY)$; (2) $E(X^2)$.

解 (1) 由公式 (1.6) 得,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^x y(12y^2)dy = \frac{1}{2},$$

(2) 将 X^2 看成是函数 $Z = g(X, Y)$ 的特殊情况, 从而利用公式 (1.6) 进行求解, 即

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y)dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^x 12y^2 dy = \frac{2}{3}.$$

需要说明的是: 本题在求解 $E(X^2)$ 时, 也可以先求出 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度, 再利用公

$$\text{式 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx, \text{ 求解 } E(X^2) \text{ (请读}$$

者自行完成).

例 1.16 一商店经销某种商品, 每周进货量 X 与顾客对商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从 $[10, 20]$ 上的均匀分布, 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元, 若需求量超过进货量, 商店可从其它商店调剂供应, 这时每单位商品获利润 500 元, 计算经销此商品每周所获得平均利润.

解 设 Z 表示商店每周所获利润, 依题意

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X, \\ 1000X + 500(Y - X), & Y > X, \end{cases}$$

由于 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{10}^{20} \int_{10}^{20} g(x, y)f(x, y)dx dy \\ &= \int_{10}^{20} dy \int_y^{20} 1000y \cdot \frac{1}{100} dx + \int_{10}^{20} dy \int_{10}^y 500(x + y) \cdot \frac{1}{100} dx \\ &= 10 \int_{10}^{20} y(20 - y)dy + 5 \int_{10}^{20} \left(\frac{3}{2}y^2 - 10y - 50\right)dy \\ &= \frac{20000}{3} + 5 \cdot 1500 = 14166.67 \quad (\text{元}). \end{aligned}$$

1.3 数学期望的性质

设 C 为常数, 随机变量 X, Y 的数学期望都存在. 关于数学期望有如下性质成立:

性质 1. 则 $E(X) = C$;

性质 2. $E(CX) = CE(X)$;

性质 3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

性质 4. 如果随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

这里只就连续型随机变量的情形对性质 3 和性质 4 给出证明, 对于离散型随机变量情况, 请读者自行完成.

证明: 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则有

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)f(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy \right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

如果 X 和 Y 相互独立, 则 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, 有

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

例 1.17 设两个随机变量 X 和 Y , 设 $E(X^2)$ 和 $E(Y^2)$ 都存在, 证明:

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2) \quad (1.7)$$

这一不等式称为柯西—施瓦兹 (*Cauchy-Schwarz*) 不等式

证明 对于任意实数 t , 令

$$g(t) = E[(X + tY)^2]$$

由数学期望的性质, 有

$$\begin{aligned} E[(X + tY)^2] &= E(X^2 + 2tXY + t^2Y^2) \\ &= E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2) \end{aligned}$$

因此
$$g(t) = E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2)$$

由于 $g(t) \geq 0$, 上述关于 t 的二次函数的判别式小于或等于 0. 即

$$\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

因此
$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

例 1.18 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且各自的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(XY)$.

解 由性质 3 得

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X)E(Y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \\ &= \int_0^{+\infty} 3xe^{-3x} dx \times \int_0^{+\infty} 4ye^{-4y} dy \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

例 1.19 将 n 个球随机放入 M 个盒子中去, 设每个球放入各盒子是等可能的, 求有球盒子数 X 的期望.

解 令随机变量
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个盒子有球,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个盒子无球,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

显然有
$$X = \sum_{i=1}^M X_i.$$

对于第 i 个盒子而言, 每只球不放入其中的概率为 $\left(1 - \frac{1}{M}\right)$, n 个球都不放入的概率为 $\left(1 - \frac{1}{M}\right)^n$, 因此

$$P\{X_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n$$

由于 $E(X_i) = 1 \times P\{X_i = 1\} + 0 \times P\{X_i = 0\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n$

由数学期望的性质, 可以得到

$$E(X) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = M \left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n\right)$$

§2 方差

引入:

数学期望体现了随机变量所有可能取值的平均值, 是随机变量最重要的数字特征之一. 但在许多问题中只知道这一点是不够的, 还需要知道与其数学期望之间的偏离程度. 在概率论中, 这个偏离程度通常用 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 来表示, 我们有下面关于方差的定义.

新授:

定义: 设 X 为一随机变量, 如果随机变量 $[X - E(X)]^2$ 的数学期望存在, 则称之为 X 的方差, 记为 $D(X)$, 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \quad (2.1)$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差或均方差, 记作 $\sigma(X)$.

由定义可知, 随机变量 X 的方差反应了 X 与其数学期望 $E(X)$ 的偏离程度, 如果 X 取值集中在 $E(X)$ 附近, 则方差 $D(X)$ 较小; 如果 X 取值比较分散, 方差 $D(X)$ 较大. 不难看出, 方差 $D(X)$ 实质上是随机变量 X 函数 $[X - E(X)]^2$ 的数学期望.

如果 X 是离散型随机变量, 其概率分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

则有

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k.$$

如果 X 连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$, 则有

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

根据数学期望的性质, 可得

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2X \cdot E(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

即

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.2)$$

这是计算随机变量方差常用的公式

例 1 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	0.1	0.3	0.4	0.2

求 $D(X)$.

解 因为 $E(X) = (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 = 0.7$,

$$E(X^2) = (-1)^2 \times 0.1 + 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.2 = 1.3,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.3 - 0.7^2 = 0.81.$$

例 2 设 $X \sim B(n, p)$, 求 $D(X)$.

解 $E(X) = np$, 令 $q = 1 - p$,

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-k)!} p^2 p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + E(X) \\
&= n(n-1)p^2 + np,
\end{aligned}$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = npq$.

例 3 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 $D(X)$.

解 $E(X) = \lambda$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

所以 $D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$.

例 4 设随机变量 X 服从几何分布 $X \sim G(p)$, 即

$$P\{X = k\} = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 求 $E(X), D(X)$.

解
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, 0 < q < 1,$$

对此级数逐项求导, 得

$$\frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2},$$

从而

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

又

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} \\ &= pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

对 $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ 两边求导, 得

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{2}{(1-q)^3}$$

于是

$$E(X^2) = pq \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p},$$

因此

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

即

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

例 5 设 $X \sim U(a, b)$, 求 DX .

解 $E(X) = \frac{a+b}{2},$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

于是 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

例 6 设 $X \sim E(\lambda)$, 求 $D(X)$.

解 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

因此 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

例 7 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$.

解 由于 $E(X) = \mu$,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\left(\text{令 } \frac{x-\mu}{\sigma} = t \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2$$

这样对于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 两个参数 μ, σ^2 分别是 X 的数学期望和方差. 因而正态分布完全可由它的数学期望和方差确定.

2.2 方差的性质

设 C 为常数, 随机变量 X, Y 的方差都存在. 关于方差有如下性质:

性质 1. $D(X) = 0$;

事实上, $D(X) = E\{[C - E(C)]^2\} = 0$.

性质 2. $D(CX) = C^2 D(X)$;

事实上, $D(CX) = E\{[CX - E(CX)]^2\}$

$$= C^2 E\{[X - E(X)]^2\} = C^2 D(X).$$

性质 3. $D(X + C) = D(X)$;

事实上, $D(X + C) = E\{[(X + C) - E(X + C)]^2\}$

$$= E\{[X + C - E(X) - C]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$= D(X).$$

性质 4. 如果随机变量 X , Y 相互独立, 则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

事实上,

$$D(X + Y) = E[X - E(X) + (Y - E(Y))]^2$$

$$= E[X - E(X)]^2 + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[Y - E(Y)]^2$$

$$= D(X) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + D(Y)$$

注意到 X 和 Y 相互独立, 因此 $X - E(X)$ 和 $Y - E(Y)$ 也相互独立, 由数学期望的性质, 有

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)] = 0$$

于是 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

性质 5 随机变量 X 的方差 $D(X) = 0$ 的充分必要条件是: X 以概率 1 取值常数 C , 即

$$P\{X = C\} = 1.$$

下面的结论在数理统计中是很有用的。

例 8 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立并且服从同一分布, 若

$$E(X_1) = \mu, D(X_1) = \sigma^2,$$

记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 证明: $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

证明：由数学期望的性质
$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu,$$

又由独立性和方差的性质知

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n\sigma^2,$$

于是
$$E(\bar{X}) = \mu, \quad D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

若用 X_1, X_2, \dots, X_n 表示对物体重量的 n 次重复测量的误差，而 σ^2 为误差大小的度量，公式

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
 表明 n 次重复测量的平均误差是单次测量误差的 $1/n$ ，也就是说，重复测量的平均精度要比单次测量的精度高。

§ 3 协方差与相关系数

引入：上两节中，介绍了用于描述单个随机变量取值的平均值和偏离程度的两个数字特征---数学期望和方差.对于二维随机变量,不仅要考虑单个随机变量自身的统计规律性,还要考虑两个随机变量相互联系的统计规律性.因此，我们还需要反映两个随机变量之间关系的数字特征，协方差和相关系数就是这样的数字特征.

新授：

在上节我们方差性质的证明中，我们看到，如果两个随机变量 X 与 Y 相互独立时，则有

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = 0$$

这表明，当 $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \neq 0$ 时， X 与 Y 不独立，因而存在一定的关系，我们可以把这个作为描述 X 和 Y 之间相互关系的一个数字特征，有下面的定义.

定义：设随机变量 X 与 Y 数学期望 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 都存在，如果随机变量 $[X - E(X)][Y - E(Y)]$ 的数学期望存在，则称之为随机变量 X 和 Y 的协方差，记作 $Cov(X, Y)$ ：

$$Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}. \quad (3.1)$$

利用数学期望的性质，容易得到协方差的另一计算公式

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.2)$$

容易验证协方差有如下性质：

性质 1 $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$;

性质 2 $Cov(X, X) = D(X)$;

性质 3 $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$, 其中 a, b 为常数;

性质 4 $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$.

事实上

$$\begin{aligned}Cov(X + Y, Z) &= E[(X + Y)Z] - E(X + Y)E(Z) \\&= E(XZ) + E(YZ) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z) \\&= [E(XZ) - E(X)E(Z)] + [E(YZ) - E(Y)E(Z)] \\&= Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)\end{aligned}$$

由此容易得到计算方差的一般公式

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y) \quad (3.3)$$

或一般地

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2\sum_{i < j} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \quad (3.4)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为常数.

例 1 蒙特摩特 (*Montmort*) 配对问题

n 个人将自己的帽子放在一起, 充分混合后每人随机地取出一顶, 求选中自己帽子人数的均值和方差.

解 令 X 表示选中自己帽子的人数, 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{如第 } i \text{ 人选中自己的帽子,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

易知

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}, P\{X_i = 0\} = \frac{n-1}{n},$$

所以

$$E(X_i) = \frac{1}{n}, D(X_i) = \frac{n-1}{n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

因此

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = 1.$$

注意到

$$X_i X_j = \begin{cases} 1, & \text{如第 } i \text{ 人与第 } j \text{ 人都选中自己的帽子,} \\ 0, & \text{反之.} \end{cases}$$

$i \neq j$, 于是

$$\begin{aligned} E(X_i X_j) &= P\{X_i = 1, X_j = 1\} \\ &= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{1}{n(n-1)}, \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

从而

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{n-1}{n} + 2C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

引入协方差的目的在于度量随机变量之间关系的强弱,但由于协方差有量纲,其数值受 X 和 Y 本身量纲的影响,为了克服这一缺点,我们对随机变量进行标准化。

称 $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为随机变量 X 的标准化随机变量,不难验证 $E(X^*) = 0$, $D(X^*) = 1$ 。例

如, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 由于 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$, 有 $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。

下面我们对 X 和 Y 的标准化随机变量求协方差, 有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X^*, Y^*) &= E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E(X^*Y^*) \\ &= E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) \\ &= \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \\ &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \end{aligned}$$

上式表明, 可以利用标准差对协方差进行修正, 从而我们可以得到一个能更好地度量随机变量之间关系强弱的数字特征---相关系数。

定义 2 设随机变量 X 和 Y 的方差都存在且不为零, X 和 Y 的协方差 $\text{Cov}(X, Y)$ 也存在, 则称

$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 为随机变量 X 和 Y 的相关系数, 记作 ρ_{XY} , 即

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \quad (3.5)$$

如果 $\rho_{XY} = 0$, 则称 X 和 Y 不相关; 如果 $\rho_{XY} > 0$, 则称 X 和 Y 正相关, 特别地, 如果 $\rho_{XY} = 1$, 则称 X 和 Y 完全正相关; 如果 $\rho_{XY} < 0$, 则称 X 和 Y 负相关, 特别地, 如果 $\rho_{XY} = -1$, 则称 X 和 Y 完全负相关。

容易验证 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} 有如下性质:

性质 1 $|\rho_{XY}| \leq 1$;

事实上, 由柯西—许瓦兹不等式, 有

$$\begin{aligned} [\text{Cov}(X, Y)]^2 &= \{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}\}^2 \\ &\leq E\{[X - E(X)]^2\}E\{[Y - E(Y)]^2\} \\ &= D(X)D(Y) \end{aligned}$$

有 $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DX}\sqrt{DY}$

即

$$|\rho_{XY}| = \left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} \right| \leq 1$$

性质 2 $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是：存在常数 a, b 使得 $P\{Y = aX + b\} = 1$.

(3.6)

事实上，设 $D(X) = \sigma_X^2 > 0, D(Y) = \sigma_Y^2 > 0$ ，对于任意实数 b ，有

$$\begin{aligned} D(Y - bX) &= E\{[Y - bX - E(Y - bX)]^2\} \\ &= E\{[Y - E(Y)] - b[X - E(X)]\}^2 \\ &= E\{[Y - E(Y)]^2\} - 2bE\{[Y - E(Y)][X - E(X)]\} \\ &\quad + b^2E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= b^2\sigma_X^2 - 2b\text{Cov}(X, Y) + \sigma_Y^2. \end{aligned}$$

在上式中，取 $b = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X^2}$ ，则有

$$\begin{aligned} D(Y - bX) &= \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2} - 2 \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2} + \sigma_Y^2 \\ &= \sigma_Y^2 - \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2} \\ &= \sigma_Y^2 \left\{ 1 - \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \right\} \\ &= \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2). \end{aligned}$$

因此 $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是 $D(Y - bX) = 0$.

由方差的性质 5 知 $D(Y - bX) = 0$ 的充分必要条件是 $Y - bX$ 概率为 1 取常数 $a = E(Y - bX)$ ，

即

$$P\{Y - bX = a\} = 1,$$

也就是

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

由此可见，相关系数定量地刻画了 X 和 Y 的相关程度： $|\rho_{XY}|$ 越大， X 和 Y 的相关程度越大， $\rho_{XY} = 0$ 时相关程度最低。需要说明的是： X 和 Y 相关的含义是指 X 和 Y 存在某种程度的线性关系，因此，若 X 和 Y 不相关，只能说明 X 与 Y 之间不存在线性关系，但并不排除 X 和 Y 之间存在其它关系。

对于随机变量 X 与 Y ，容易验证下列事实是等价的：

- (1) $Cov(X, Y) = 0$;
- (2) X 和 Y 不相关;
- (3) $E(XY) = E(X)E(Y)$;
- (4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

例 3.2 设 Θ 是 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布的随机变量，又

$$X = \sin \Theta, Y = \cos \Theta$$

求 X 与 Y 之间的相关系数。

解 由于

$$E(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0,$$

$$E(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

因此

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

于是

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0$$

上例中 X 与 Y 是不相关的, 但显然有 $X^2 + Y^2 = 1$. 也就是说 X 与 Y 虽然没有线性关系, 但有另外一种函数关系, 从而 X 与 Y 是不独立的. 综上所述, 当 $\rho_{XY} = 0$ 时, X 与 Y 可能独立, 也可能不独立.

例 3.3 将一颗均匀的骰子重复投掷 n 次, 随机变量 X 表示出现点数小于 3 的次数, Y 表示出现点数不小于 3 的次数.

- (1) 证明: X 与 Y 不相互独立;
- (2) 证明: $X + Y$ 和 $X - Y$ 不相关;
- (3) 求 $3X + Y$ 和 $X - 3Y$ 的相关系数.

证明: 由于

$$X \sim B(n, \frac{1}{3}), \quad E(X) = \frac{n}{3}, \quad D(X) = \frac{2n}{9},$$

$$Y = n - X \sim B(n, \frac{2}{3}), \quad E(Y) = \frac{2n}{3}, \quad D(Y) = \frac{2n}{9};$$

$$(1) \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, n - X) = -D(X) = -\frac{2n}{9} \neq 0,$$

因此 X 和 Y 不相互独立;

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= D(X) - D(Y) = 0 \end{aligned}$$

因此, $X + Y$ 和 $X - Y$ 不相关;

$$(3) \quad D(3X + Y) = 9D(X) + 6\text{Cov}(X, Y) + D(Y) = \frac{8n}{9},$$

$$D(X - 3Y) = D(X) - 6\text{Cov}(X, Y) + 9D(Y) = \frac{32n}{9},$$

$$\text{Cov}(3X+Y, X-3Y) = 3D(X) - 8\text{Cov}(X, Y) - 3D(Y) = \frac{16n}{9},$$

于是, $3X+Y$ 和 $X-3Y$ 的相关系数为

$$\rho = \frac{\text{cov}(3X+Y, X-3Y)}{\sqrt{D(3X+Y)} \cdot \sqrt{D(X-3Y)}} = 1.$$

例 3.4 设 $X_1, X_2, \dots, X_{n+m} (n > m)$ 独立同分布, 且有有限方差. 求 $Y = \sum_{k=1}^n X_k$ 与 $Z = \sum_{k=1}^m X_{m+k}$ 的相关系数.

解 设 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2$, 则

$$\text{Cov}(Y, Z) = E\{[Y - E(Y)][Z - E(Z)]\}$$

$$= E\left\{\left[\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right]\left[\sum_{k=1}^m (X_{m+k} - \mu)\right]\right\}$$

注意到, 当 $i \neq j$ 时, 有

$$E\{[(X_i - \mu)][(X_j - \mu)]\} = E[(X_i - \mu)] \cdot E[(X_j - \mu)] = 0$$

因此

$$\text{Cov}(Y, Z) = E\left[\sum_{k=1}^{n-m} (X_{m+k} - \mu)^2\right] = (n-m)\sigma^2$$

又

$$D(Y) = D(Z) = n\sigma^2$$

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{n-m}{n}.$$

例 3.4 设二维随机变量 (X, Y) 在单位圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上服从均匀分布, (1) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} ; (2) X 和 Y 是否相互独立?

解 (1) 因为 (X, Y) 在单位圆 D 上服从均匀分布, 所以

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

因此,

$$E(XY) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy \frac{1}{\pi} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\pi} r^3 \sin \theta \cos \theta dr = 0,$$

$$E(X) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x \frac{1}{\pi} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\pi} r^2 \cos \theta dr = 0,$$

$$E(Y) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y \frac{1}{\pi} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\pi} r^2 \sin \theta dr = 0,$$

于是

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$$

从而

$$\rho_{XY} = 0,$$

即 X 和 Y 不相关;

(2) 因为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

显然

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y),$$

因此, X 和 Y 不相互独立.

例 3.6 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = p_1 > 0, P(B) = p_2 > 0$, 定义随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{发生,} \\ 0, & A \text{不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{发生,} \\ 0, & B \text{不发生.} \end{cases}$$

证明: X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关.

证明 依题意, 有

$$X \sim B(1, p_1), Y \sim (1, p_2)$$

有 $E(X) = p_1, E(Y) = p_2,$

如果 X 与 Y 不相关, 则有

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times P\{X=1, Y=1\} \\ &= E(X)E(Y) = P\{X=1\}P\{Y=1\}, \end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned} P\{X=1, Y=0\} &= P\{X=1\} - P\{X=1, Y=1\} \\ &= P\{X=1\}[1 - P\{Y=1\}] \\ &= P\{X=1\}P\{Y=0\}. \end{aligned}$$

同理可证 $P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\},$

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

从而 X 与 Y 相互独立.

反过来, 若 X 与 Y 相互独立必有 X 与 Y 不相关. 得证

从上面的讨论我们知道, 随机变量的独立性和不相关性都是随机变量之间的联系“薄弱”的一种反应. “不相关”是一个比“独立”更弱的一个概念. 不过对于最常用的正态分布来说, 不相关性和独立性是一致的.

例 3.7 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 证明: X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关.

证明: (X, Y) 的概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\ &\quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \end{aligned}$$

两个边缘概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

由此

$$E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2, D(X) = \sigma_1^2, D(Y) = \sigma_2^2.$$

由于

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)(y - \mu_2) f(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)(y - \mu_2) \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)(y - \mu_2) \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2\right\} dx dy \\ \text{令 } t &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right), \quad u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad \text{则有} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1\sigma_2(\sqrt{1-\rho^2}tu + \rho u^2) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} dt du \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\quad + \rho\sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

又

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u de^{-\frac{u^2}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \end{aligned}$$

因此 $Cov(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$,

从而
$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

由第三章例 4.6 知, 二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则随机变量 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是参数 $\rho = 0$. 且由于 $\rho = \rho_{XY}$, 所以 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 X 与 Y 不相关.

从上面的例子我们还看到, 二维正态随机变量 (X, Y) 的概率密度中的参数 ρ 就是 X 与 Y 的相关系数, 因此, 二维正态随机变量 (X, Y) 的分布完全由 X 和 Y 的数学期望、方差以及 X 与 Y 的相关系数所确定.

复习思考题、作业题:
P115 习题 1-10.

下次课预习要点:
§4 矩、协方差矩阵
第四章习题课

教 学 记	1、让学生熟记课本 P394 常用分布表中 6 种分布的期望与方差, 用相关习题让学生亲身体会直接利用表格结论计算的便利性。 2、告诉学生, 方差的计算本质就是数学期望, 所以只需要熟记方差的定义式以及常用计算公式, 再结合期望的计算方法, 即可。 3、学习方差的性质时, 注意与期望的性质相比较。		
授课时间	第 8 周	课 次	第 8 次
章 节 名 称	第四章 随机变量的数字特征 §4 矩、协方差矩阵		

第四章习题课			
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ()、习题课 ()、其它 ()	教学时数	3
教 学 目 的 要 求	1、教学目标 (1)理解矩的概念。 (2)会求协方差矩阵。 (3)牢固掌握第四章内容。 2、课程思政育人目标 学习矩与协方差矩阵，培养抽象思维与严谨运算习惯，领悟数学逻辑的严密性；巩固第四章内容，树立系统梳理知识的意识，厚植扎实治学、精益求精的专业素养。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点：理解矩的概念，区分原点矩与中心矩。 难点：协方差矩阵的计算		
教学步骤及内容： <div style="text-align: center;">§4 矩、协方差矩阵</div> 一.定义设：X 和 Y 是随机变量 若 $E(X^k)$, $k=1,2,\dots$ 存在，称为 X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩 (Moment)。 如：期望 $E(X)$ 为 X 的一阶原点矩。 若 $E[X-E(X)]^k, k=2,3,\dots$ 存在，称它为 X 的 k 阶中心矩。 方差 $D(X)$ 为二阶中心矩。 设：X 和 Y 是随机变量 若 $E(X^k Y^l), k,l=1,2,\dots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩。 若 $E\{[X-E(X)]^k [Y-E(Y)]^l\}, k,l=1,2,\dots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。 协方差 $Cov(X,Y)$ 是 X 与 Y 的二阶混合中心矩。 二、协方差矩阵 变量说明： 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为一组随机变量，这些随机变量构成随机向量 $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ ，每个随机变量有 m 个样本，则有样本矩阵 其中 $\bar{\beta}_j (j=1,2,\dots,m)$ 对应着每个随机向量 X 的样本向量， $\bar{\alpha}_i (i=1,2,\dots,n)$ 对应着第 i 个随机单变			

量的所有样本值构成的向量。

单随机变量间的协方差：

随机变量 X_i, X_j 之间的协方差可以表示为

根据已知的样本值可以得到协方差的估计值如下：

可以进一步地简化为：

协方差矩阵：

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m} M M^T - \frac{1}{m^2} \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^m M_{1a} \\ \sum_{a=1}^m M_{2a} \\ \vdots \\ \sum_{a=1}^m M_{na} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^m M_{1a} & \sum_{a=1}^m M_{2a} & \cdots & \sum_{a=1}^m M_{na} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{m} [\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m] [\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m]^T - \frac{1}{m^2} [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \dots + \bar{\beta}_m] [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \dots + \bar{\beta}_m]^T \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\bar{\beta}_i - \bar{\beta}_0] [\bar{\beta}_i - \bar{\beta}_0]^T \tag{5}
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{\beta}_0 = \frac{1}{m} [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \dots + \bar{\beta}_m]$ ，从而得到了协方差矩阵表达式。

如果所有样本的均值为一个零向量，则式（5）可以表达成：

补充说明：

- 1、协方差矩阵中的每一个元素是表示的随机向量 X 的不同分量之间的协方差，而不是不同样本之间的协方差，如元素 C_{ij} 就是反映的随机变量 X_i, X_j 的协方差。
- 2、协方差是反映的变量之间的二阶统计特性，如果随机向量的不同分量之间的相关性很小，则所得的协方差矩阵几乎是一个对角矩阵。对于一些特殊的应用场合，为了使随机向量的长度较小，可以采用主成分分析的方法，使变换之后的变量的协方差矩阵完全是一个对角矩阵，之后就可以舍弃一些能量较小的分量了（对角线上的元素反映的是方差，也就是交流能量）。
- 3、必须注意的是，这里所得到的式（5）和式（6）给出的只是随机向量协方差矩阵真实值的一个估计（即由所测的样本的值来表示的，随着样本取值的不同会发生变化），故而所得的协方差矩阵是依赖于采样样本的，并且样本的数目越多，样本在总体中的覆盖面越广，则所得的协方差矩阵越可靠。
- 4、如同协方差和相关系数的关系一样，我们有时为了能够更直观地知道随机向量的不同分量之间的相关性究竟有多大，还会引入相关系数矩阵。
- 5、协方差作为描述 X 和 Y 相关程度的量，在同一物理量纲之下有一定的作用，但同样的两个量采用不同的量纲使它们的协方差在数值上表现出很大的差异。由此引入相关系数。

三、相关矩阵（相关系数矩阵）

相关系数：

著名统计学家卡尔·皮尔逊设计了统计指标——相关系数。相关系数是用以反映变量之间相关关系密切程度的统计指标。相关系数是按积差方法计算，同样以两变量与各自平均值的离差为基础，通过两个离差相乘来反映两变量之间相关程度；着重研究线性的单相关系数。

依据相关现象之间的不同特征，其统计指标的名称有所不同。如将反映两变量间线性相关关系的统计指标称为相关系数（相关系数的平方称为判定系数）；将反映两变量间曲线相关关系的统计指标称为非线性相关系数、非线性判定系数；将反映多元线性相关关系的统计指标称为复相关系数、复判定系数等。

相关系数用 r 表示，它的基本公式（formula）为：

相关系数的值介于 -1 与 $+1$ 之间，即 $-1 \leq r \leq +1$ 。其性质如下：

- 当 $r > 0$ 时，表示两变量正相关， $r < 0$ 时，两变量为负相关。
- 当 $|r|=1$ 时，表示两变量为完全线性相关，即为函数关系。
- 当 $r=0$ 时，表示两变量间无线性相关关系。
- 当 $0 < |r| < 1$ 时，表示两变量存在一定程度的线性相关。且 $|r|$ 越接近 1，两变量间线性关系越密切； $|r|$ 越接近于 0，表示两变量的线性相关越弱。
- 一般可按三级划分： $|r| < 0.3$ 为低度线性相关； $0.3 \leq |r| < 0.7$ 为显著性相关； $|r| \geq 0.7$ 为高度线性相关。

相关矩阵也叫相关系数矩阵，是由矩阵各列间的相关系数构成的。也就是说，相关矩阵第 i 行第 j 列的元素是原矩阵第 i 列和第 j 列的相关系数。

四、协方差矩阵和相关矩阵的关系

由二者的定义公式可知，经标准化的样本数据的协方差矩阵就是原始样本数据的相关矩阵。这里所说的标准化指正态化，即将原始数据处理成均值为 0，方差为 1 的标准数据。

即：

$$X' = (X - EX) / DX$$

第四章习题课

1（87，2分） 已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2x - 1}$$

则 $EX =$ _____， $DX =$ _____。

2（89，6分） 设随机变量 X 与 Y 独立，且 $X \sim N(1, 2)$ ， $Y \sim N(0, 1)$ ，试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数。

3（90，2分） 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且随机变量 $Z = 3X - 2$ ，则 $EZ =$ _____。

4（90，6分） 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < X < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 DZ 。

5 (91, 3分) 设随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____。

6 (92, 3分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $E(X + e^{-2x}) =$ _____。

7 (93, 6分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$$

- (1) 求 EX 和 DX ;
- (2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?
- (3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

8 (94, 6分) 已知随机变量 $X \sim N(1, 3^2)$, $Y \sim N(0, 4^2)$, 且 X 与 Y 的相关系数

$$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, \text{ 设 } Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}.$$

- (1) 求 EZ 和 DZ ;
- (2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;
- (3) 问 X 与 Z 是否相互独立? 为什么?

9 (95, 3分) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 0.4, 则 $E(X^2) =$ _____。

10 (96, 3分) 设 ξ 和 η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0, \frac{1}{2})$ 的随机变量, 则 $E(|\xi - \eta|) =$ _____。

11 (96, 6分) 设 ξ 和 η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量, 已知 ξ 的分布律为 $P(\xi = i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$ 又设 $X = \max(\xi, \eta), Y = \min(\xi, \eta)$.

- (1) 写出二维随机变量 (X, Y) 的分布律;
- (2) 求 EX 。

12 (97, 3分) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2, 则随机变量 $3X - 2Y$ 的方差是

- (A) 8 (B) 16 (C) 28 (D) 44 []

13 (97, 7分) 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗, 假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{2}{5}$ 。设 X 为途中遇到红灯的次数, 求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望。

14 (98, 6分) 设两个随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布, 求 $|X - Y|$ 的方差。

15 (00, 3分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量

$\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$ []

16 (00, 8分) 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修。设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 $E(X)$ 和 $D(X)$ 。

17 (01, 3分) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 []

18 (02, 7分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察4次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望。

19 (03, 10分) 已知甲、乙两箱中装有两种产品, 其中甲箱中装有3件合格品和3件次品, 乙箱中仅装有3件合格品。从甲箱中任取3件产品放入乙箱后, 求:

- (1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望。
- (2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

20 (04, 4分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\quad}$ 。

21 (04, 4分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$ 。令

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则}$$

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$. (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$. []

22 (04, 9分) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{发生}, \\ 0, & A \text{不发生}; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{发生}, \\ 0, & B \text{不发生}. \end{cases}$$

求：(I) 二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

复习思考题、作业题：

整理消化第四章习题课内容。

下次课预习要点：

第五章 大数定律及中心极限定理

§1 大数定律

§2 中心极限定理。

教 学 后 记	本节课讲的矩的概念指的是总体矩，到第七章参数估计时，还要讲样本矩，注意区别。另外，为更好理解方差与协方差，协方差矩阵等的关系，可以让学生参考李小星同志的博客 https://blog.csdn.net/LI_XIAO_XING/article/details/120989809 “概率论：数字特征与极限定理——协方差与相关系数”一文。		
授课时间	第 9 周	课 次	第 9 次
章 节 名 称	第五章 大数定律及中心极限定理 §1 大数定律 §2 中心极限定理		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学 时数	3
教 学 的 目 的 要 求	<p>1、教学目标</p> <p>(1)了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律（独立同分布随机变量的大数定律）。</p> <p>(2)了解棣莫弗—拉普拉斯定理（二项分布以正态分布为极限分布）和列维—林德伯格定理（独立同分布的中心极限定理）。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>学习三大大数定律，领悟“偶然中见必然”的规律，培养辩证思维与科学认知；了解中心极限定理，树立用极限思想分析问题的意识，厚植探索真理的严谨精神。</p>		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点：大数定律。 难点：中心极限定理		

教学步骤及内容:

- 1、几乎处处收敛、依概率收敛、依分布收敛。
- 2、切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦 (Khinchine) 大数定律。
- 3、棣莫弗—拉普拉斯 (DeMoivre—Laplace) 定理、列维—林德伯格 (Levy—Lindberg) 定理。

思考题:

- 1、几乎处处收敛、依概率收敛、依分布收敛之间的关系是怎样的?
- 2、切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦 (Khinchine) 大数定律成立的条件是什么, 它们之间的差别是什么?
- 3、哪个大数定律可以用来说明频率的稳定性? 试说明之。
- 4、棣莫弗—拉普拉斯定理和列维—林德伯格定理之间的关系是怎样的?
- 5、如何用列维—林德伯格定理来近似求独立同分布随机变量的和分布?

第五章 考研真题

数学三:

1 (88, 6分) 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔中被盗索赔户占 20%。以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数。

(1) 写出 X 的概率分布;

(2) 利用棣美佛-拉普拉斯定理, 求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值。

[附表] $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

2 (89, 3分) 设 X 为随机变量且 $EX = \mu, DX = \sigma^2$ 。则由切比雪夫不等式, 有 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq$ _____。

3 (96, 6分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本。已知 $EX^k = a_k (k = 1, 2, 3, 4)$, 证明当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数。

4 (99, 3分) 在天平上重复称量一重为 a 的物品。假设各次称量结果相互独立且服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$ 。若以 \bar{X}_n 表示 n 次称量结果的算术平均值, 则为使

$$P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} \geq 0.95$$

n 的最小值应小于自然数 _____。

5 (01, 3分) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 -0.5, 则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq$ _____。

6 (01, 8分) 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977。 ($\Phi(2) = 0.977$, 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。)

数学四:

1 (01, 3分) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X-Y|\geq 6\} \leq$ _____。

2 (01, 8分) 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977。($\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。)

3 (02, 3分) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维-林德伯格 (Levy-Lindberg) 中心极限定理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 X_1, X_2, \dots, X_n

- (A) 有相同的数学期望。 (B) 有相同的方差。
(C) 服从同一指数分布。 (D) 服从同一离散型分布。 []

4 (05, 4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则

A、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$ B、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{\lambda n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$
C、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$ D、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$

复习思考题、作业题:

数学一: 1 (01, 3分) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq$ _____。

下次课预习要点:

第六章 样本及抽样分布

§1 随机样本

§2 直方图和箱线图

教 学
后 记

大数定律的意义:

给出了“频率稳定性”的严格数学解释, 提供了通过试验来确定事件概率的方法, 是数理统计中参数估计的重要理论依据之一, 是 Monte Carlo 方法的主要数学理论基础。

大数定律的实际应用-Monte Carlo 方法:

Monte Carlo 方法或称为计算机随机模拟方法、计算机仿真方法是科学与工程中的一种重要工具。

到后面第八章假设检验, 理论依据就是大数定律。

授课时间	第 10 周	课 次	第 10 次
------	--------	-----	--------

章节名称	第六章 样本及抽样分布 §1 随机样本 §2 直方图和箱线图 §3 抽样分布		
授课方式	理论课(√)、实践课()、习题课()、其它()	教学时数	3
教学目的要求	<p>1、教学目标</p> <p>(1)理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念。</p> <p>(2)了解 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的概念及性质，了解分位数的概念并会查表计算。</p> <p>(3)了解正态总体的某些常用抽样分布。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>通过讲述 t 分布背后的故事，教导学生学习戈塞特“干一行爱一行钻研一行”和努力坚持的精神。https://mp.weixin.qq.com/s/-5MJJ3ldoVoilvkP8R1GmA</p>		
教学方法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教学重点难点	<p>重点：数理统计三大分布的概念、性质及应用</p> <p>难点：分位数的概念</p>		
<p>教学步骤及内容：</p> <p>1、总体、个体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差和样本矩。</p> <p>2、χ^2 分布、t 分布和 F 分布，分位数，正态总体的常用抽样分布。</p> <p>3、附讲“t 分布和统计界的扫地僧——戈塞特”的故事。</p> <p>思考题：</p> <p>1、总体和随机变量之间有何关系？</p> <p>2、什么是简单随机样本？</p> <p>3、数理统计中所说样本空间和随机变量 X 的样本空间是否同一概念？</p> <p>4、为何能用样本观察值推断总体的状况？它依据的原理是什么？</p> <p>5、什么叫统计量？常用的统计量有哪些？</p> <p>6、χ^2 分布是怎样定义的？它有哪些重要的性质？它的主要作用是什么？写出它的数学期望和方差。</p> <p>7、t 分布是怎样定义的？它有哪些重要的性质？它的主要作用是什么？写出它的数学期望和方差。</p> <p>8、F 分布是怎样定义的？它有哪些重要的性质？它的主要作用是什么？写出它的数学期望和方差。</p> <p>9、随机变量的上侧分位数和双侧分位数是怎样定义的？如何通过查表求标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布的分位数？</p>			

10、关于正态总体的样本均值、样本方差有何重要结论？			
复习思考题、作业题： P149 习题 1-10.			
下次课预习要点： 第六章习题课			
教 学 后 记	本次课核心是抓住 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布的定义、上侧和双侧分位数的定义，通过凑形式的方法求解相关问题。事实上，把定义与例题、习题的结合，通过板书一点点展示分解重合过程，同学们仿佛感到数学犹如魔术一般神奇，从而对数学的形式化有了更加深刻的理解与认识。从戈塞特通过对统计方法发现 t -分布的案例中，我们看到了科学家的敬业精神。一位酿酒师是英国现代统计方法发展的先驱，小样本理论研究的先驱，为研究样本分布理论奠定了重要基础，被统计学家誉为统计推断理论发展史上的里程碑。虽然看上去是一个小小的人物，但正是他默默无闻地开展研究，正是他通过不断探索科学的奥秘，怀揣着科学的态度不断深入探索，不求名利，不断学习，热爱科学，勇于创新，用科学的严谨的思维来对待任何事物，才能获得成就。		
授课时间	第 11 周	课 次	第 11 次
章 节 名 称	第六章习题课		
授 课 方 式	理论课 ()、实践课 ()、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 ()	教学时数	3
教 学 的 要 求	1、教学目标 强化巩固第六章的内容学习 2、课程思政育人目标 强化巩固第六章样本及抽样分布知识，培养系统梳理、融会贯通的学习能力，夯实专业基础；在复盘知识中深化数据思维，树立严谨求实的治学态度，提升用统计工具解决问题的责任意识。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点：数理统计基本概念的掌握。 难点：理论联系实际，学以致用。		
教学步骤及内容： 第六章 考研真题			

1 (94, 3分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 []

(A) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$

(B) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$

(C) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$

(D) $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$

2 (97, 3分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0, 3^2)$, 而

X_1, X_2, \dots, X_9 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_9 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本。则统计量 $U = \frac{X_1 + \dots + X_9}{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}$

服从_____分布, 参数为_____。

3 (98, 3分) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $n(0, 2^2)$ 的简单随机样本。

$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 则当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, 统计量 X 服从 χ^2 分布, 其自由度为_____。

4 (99, 7分) 设 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自正态总体 X 的简单随机样本,

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 (X_i - Y_2)^2, \quad Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布。

5 (01, 3分) 设总体 $X \sim N(0, 2^2)$, 而 X_1, X_2, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量

$$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

服从_____分布, 参数为_____。

6 (02, 3分) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

(A) $X+Y$ 服从正态分布。

(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布。

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布。 (D) X^2/Y^2 服从 F 分布。 []

7 (03, 4分) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机

样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于_____。

8 (04, 4分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$,

X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9 (06, 4分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, x_1, x_2, \dots, x_n 为总体的

简单随机样本, 其样本方差 S^2 , 则 $E S^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

复习思考题、作业题:

整理消化第六章习题

下次课预习要点:

第七章 参数估计

§1 点估计

§3 估计量的评选标准

§4 区间估计

§5 正态总体均值与方差的区间估计

§6 (0-1)分布参数的区间估计

§7 单侧置信区间

教 学
后 记

数理统计部分的概念多, 公式多, 但是一旦掌握了解题的套路, 是不难的, 老师讲课时应注重各知识点间的联系, 教会学生抓住解题关键词, 有针对性地选取有效工具进行解题。

另外, 相应的预备知识及常用结论, 也要及时帮学生回顾梳理强化。例如计算连续样本概率密度时, 不少同学懂得套公式, 可就卡在积分找不出原函数。因此, 我及时复习基本积分公式及积分方法。还有, 新课前先给学生推导 P145 公式(3.19)这个结论, 学生在学习单正态总体的抽样分布中的定理 2, 就感觉更好理解了。

授课时间

第 12 周

课 次

第 12 次

章 节
名 称

第七章 参数估计

§1 点估计

§3 估计量的评选标准

§4 区间估计

§5 正态总体均值与方差的区间估计

§6 (0-1)分布参数的区间估计

§7 单侧置信区间			
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ()、习题课 ()、其它 ()	教学时数	3
教 学 目 的 要 求	<p>1、教学目标</p> <p>(1)理解参数的点估计、估计量与估计值的概念；了解估计量的无偏性、有效性（最小方差性）和一致性（相合性）的概念，并会验证估计量的无偏性；会利用大数定律证明估计量的相合性。</p> <p>(2)掌握矩估计法（一阶、二阶距）和最大似然估计法。</p> <p>(3)掌握建立未知参数的（双侧和单侧）置信区间的一般方法；</p> <p>(4)了解区间估计的概念，会求单个正态总体的均值和方差的置信区间，会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>学习参数估计及评价标准，培养严谨验证、科学评判的思维，树立追求精准的治学态度；掌握矩估计、置信区间求解，强化实践能力，厚植用统计方法解决问题的责任意识。</p>		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	<p>重点：点估计、估计量与估计值的概念、估计量的无偏性、有效性和一致性的概念、估计量的相合性、矩估计法（一阶、二阶距）和最大似然估计法；置信区间、区间估计、单个正态总体的均值和方差的置信区间、两个正态总体的均值差和方差比的置信区间。</p> <p>难点：矩估计法（一阶、二阶距）和最大似然估计法；置信区间、区间估计、单个正态总体的均值和方差的置信区间、两个正态总体的均值差和方差比的置信区间。</p>		
<p>教学步骤及内容：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、点估计的概念、估计量与估计值。 2、矩估计法、最大似然估计法。 3、估计量的评选标准。 4、区间估计的概念。 5、单个正态总体的均值和方差的区间估计。 6、两个正态总体的均值差和方差比的区间估计。 7、(0-1)分布参数的区间估计。 8、单侧置信区间。 <p>思考题：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、参数估计主要处理在社会经济中遇到的什么类型的问题？ 2、矩估计法的优点和缺陷各是什么？ 3、最大似然估计法依据的原理是什么？ 4、写出一般情况下最大似然估计法的解题步骤。这个步骤对服从均匀分布的总体是否适用？如何用最大似然估计法对服从均匀分布的总体进行点估计？ 5、估计量有哪几个评选标准？其中最基本的标准是什么？ 6、为何要进行参数的区间估计？它与点估计相比有何优越性？ 			

- 7、写出确定参数的置信区间的一般步骤。
- 8、单个正态总体均值的区间估计用到哪几种抽样分布？
- 9、单个正态总体方差的区间估计用到哪种抽样分布？
- 10、两个正态总体的均值差的区间估计用到哪几种抽样分布？
- 11、两个正态总体方差比的区间估计用到哪种抽样分布？

一. 矩估计法

1. 矩估计法的基本思想是替换原理，即用样本矩去替换相应的总体矩，这里的矩可以是原点矩也可以是中心矩。我们知道，矩是由随机变量的分布唯一确定的，而样本来源于总体，由大数定律，样本矩在一定程度上反映总体矩的特征。

2. 矩估计法：用样本矩来估计总体矩的估计方法称为矩估计法。

3. 矩估计法的步骤：

设总体 X 的分布中包含 m 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本，

如果总体的 k 阶原点矩 $E(X^k)$ 存在，并设 $E(X^k) = \mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ ，相应的 k 阶样本原点矩为

$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ，以 A_k 替代 $E(X^k)$ ，即可得到关于 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ 的方程组

$$\mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k=1, 2, \dots, m$$

方程组的解 $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $k=1, 2, \dots, m$ ，称为参数 $\theta_k (k=1, 2, \dots, m)$ 的矩估计量。

4. 若代入一组样本观测值 x_1, x_2, \dots, x_n ，则 $\hat{\theta}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为参数 $\theta_k (k=1, 2, \dots, m)$ 的矩估计值。

二. 最大似然估计法

1. 最大似然估计的步骤：

若总体 X 的分布中含有 k 个未知待估参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ，则似然函数为

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k).$$

解似然方程组 $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, i=1, 2, \dots, k$ ，或者对数似然方程组 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, i=1, 2, \dots, k$ ，即可得到参数

的最大似然估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ 。

2. 定理：若 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的最大似然估计， $g(\theta)$ 为参数 θ 的函数，则 $g(\hat{\theta})$ 是 $g(\theta)$ 的最大似然估计。

三. 点估计的评价标准

1. 无偏性: 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量, 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。

2. 有效性: 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为参数 θ 的无偏估计量, 若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

3. 相合性 (一致性): 设 $\hat{\theta}$ 为未知参数 θ 的估计量, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$, 即 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于参数 θ , 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合 (一致) 估计。

4. 定理: 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$, 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合 (一致) 估计。

四. 例题讲解

例 1. 设 X 为某零配件供应商每周的发货批次, 其分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ 是未知参数, 假设收集了该供应商 8 周的发货批次如下: 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值。

例 2. 设某种钛金属制品的技术指标为 X 其概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$ 其中未知参数 $\beta > 1$,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 求 β 的矩估计量。

例 3. 已知某种金属板的厚度 X 在 (a, b) 上服从均匀分布, 其中 a, b 未知, 设抽查了 n 片金属板, 厚度分别为 X_1, X_2, \dots, X_n , 试用矩估计法估计 a, b 。

例 4. 设袋中放有很多的白球和黑球, 已知两种球的比例为 1:9, 但不知道哪种颜色的球多, 现从中有放回地抽取三次, 每次一球, 发现前两次为黑球, 第三次为白球, 试判断哪种颜色的球多。

例 5. 求出例 2 中未知参数 β 的最大似然估计量。

例 6. 设某种元件使用寿命 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 是未

知参数, 设 x_1, \dots, x_n 是样本观测值, 求 θ 的最大似然估计。

例 7. 设某工厂生产的手机屏幕分为不同的等级, 其中一级品率为 p , 如果从生产线上抽取了 20 件产品, 发现其中有 3 件为一级品, 求:

(1) p 的最大似然估计;

(2) 接着再抽 5 件产品都不是一级品的概率的最大似然估计。

例 8. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 未知, 求 μ 和 σ^2 的最大似然估计。

例 9. 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 存在, 证明: 不论 X 服从什么分布, 样本的 k 阶矩

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \text{ 是 } \mu_k \text{ 的无偏估计.}$$

例 10. 已知 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 都是总体方差 σ^2 的估计量, 问哪个估计量更好?

例 11. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2} & \theta < x < 2\theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单样本, 选择适当常数 c , 使得 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计.

例 12. 设某种产品的寿命 X 服从指数分布, 其概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 θ 为

未知参数, X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体的样本, 设有 θ 的估计量

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4),$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{5}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4),$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$

问哪一个最优?

例 13. 设 \bar{X} 是总体 X 的样本均值, 则当 \bar{X} 作为总体期望 $E(X)$ 的估计量时, \bar{X} 是 $E(X)$ 的相合估计量.

例 14. 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, X_1, \dots, X_n 是 X 的样本, 试证明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3} \bar{X}$ 是 θ 的相合估计量.

一. 区间估计的概念

1. 置信区间: 设 θ 为总体的未知参数, 若对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 存在统计量 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 使得 $P\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$, 则称随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的置信度 (或置信水平) 为 $1 - \alpha$ 的置信区间, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信下限和置信上限.

2. 枢轴量: 称满足下述三条性质的量 Q 为枢轴量.

(1) 是待估参数 μ 和估计量 \bar{X} 的函数;

(2) 不含其他未知参数;

(3) 其分布已知且与未知参数 μ 无关。

3. 求置信区间的一般步骤:

(1) 根据待估参数构造枢轴量 Q , 一般可由未知参数的良好估计量改造得到;

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 利用枢轴量 Q 的分位点确定常数 a, b , 使 $P\{a \leq Q \leq b\} = 1-\alpha$;

(3) 将不等式恒等变形为 $P\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$, 即可得到参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$.

二. 正态总体参数的区间估计

1. 单个正态总体的情形:

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的样本

(1) σ^2 已知, 均值 μ 的置信区间: μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

(2) σ^2 未知, 均值 μ 的置信区间: μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$.

(3) μ 已知, 方差 σ^2 的置信区间: σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$.

(4) μ 未知, 方差 σ^2 的置信区间: σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$.

2. 两个正态总体的情形:

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X 与 Y 独立, 样本 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 来自总体 X , 样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 来自 Y .

(1) σ_1^2, σ_2^2 已知, 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间: $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right].$$

(2) σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间: $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right].$$

(3) μ_1, μ_2 未知, 方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1), \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right].$$

以上关于正态总体参数的区间估计的讨论可以列表 1 和表 2 如下:

表 1 单个正态总体参数的区间估计表

待估参数	条件	枢轴量	置信区间
μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}]$
σ^2	μ 已知	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$
	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$

表 6.2 两个正态总体参数的区间估计表

待估参数	条件	枢轴量	置信区间
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$

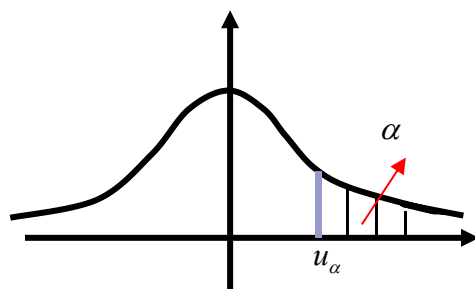
	σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ <p style="text-align: center;">其中</p> $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \right.$ $\left. \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2 已知	$\frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1, n_2)$ $\frac{\frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$	$\left[\frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1), \frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1) \right]$ $\left[\frac{\frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2), \frac{\frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) \right]$
	μ_1, μ_2 未知	$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$	$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1), \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right]$

三. 单侧置信区间

1. 单侧置信区间: 设 θ 为总体的未知参数, 对于给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 若存在统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 使得 $P\{\hat{\theta}_L \leq \theta < +\infty\} = 1 - \alpha$, 则称随机区间 $[\hat{\theta}_L, +\infty)$ 为参数 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\hat{\theta}_L$ 称为单侧置信下限; 若存在统计量 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 使得 $P\{-\infty < \theta \leq \hat{\theta}_U\} = 1 - \alpha$, 则称随机区间 $(-\infty, \hat{\theta}_U]$ 为参数 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\hat{\theta}_U$ 称为单侧置信上限。

2. 单侧置信区间的求法: 单侧置信区间的求法与双侧置信区间相同, 例如, 设 X_1, \dots, X_n 来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, μ 未知, 利用枢轴量 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 如下图,

构造 $P\{U \leq u_\alpha\} = 1 - \alpha$,



即 $P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_\alpha\right\} = 1-\alpha$, 恒等变形 $P\left\{\mu \geq \bar{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$, 则可得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单

侧置信下限为 $\hat{\mu}_L = \bar{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

四. 例题讲解

例 1. 设 X_1, \dots, X_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, μ 未知, 试求出 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

例 2. 某工厂生产一种特殊的发动机套筒, 假设套筒直径 X (mm) 服从正态分布 $N(\mu, 0.1^2)$, 现从某天的产品中随机抽取 40 件, 测得直径的样本均值为 5.426 (mm), 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

例 3. 为估计某种汉堡的脂肪含量, 随机抽取了 10 个这种汉堡, 测得脂肪含量 (%) 如下:

25.2, 21.3, 22.8, 17.0, 29.8, 21.0, 25.5, 16.0, 20.9, 19.5.

假设该种汉堡的脂肪含量 (%) 服从正态分布, 求平均脂肪含量 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

例 4. 已知某种钢丝的折断力服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 从一批钢丝中任意抽取了 10 根, 测得折断力数据 (单位: kg) 如下: 578, 572, 570, 568, 572, 570, 570, 596, 584, 572, 求 σ^2 和 σ 的置信度为 0.9 的置信区间.

例 5. 某厂利用两条自动化流水线罐装辣椒酱, 现分别从两条流水线上抽取了容量分别为 13 与 17 的两个相互独立的样本, 其中 $\bar{x} = 10.6g$, $\bar{y} = 9.5g$, $s_1^2 = 2.4g^2$, $s_2^2 = 4.7g^2$, 假设两条流水线上罐装的辣椒酱重量分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

(1) 求它们的方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(2) 若它们的方差相同, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 求均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

例 6. 已知某种建筑材料的剪力强度 X 服从正态分布, 我们对该种材料做了 46 次剪力测试, 测得样本均值 $\bar{x} = 17.17(N/mm^2)$, 样本标准差 $s = 3.28(N/mm^2)$, 求剪力强度平均值 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信下限.

复习思考题、作业题:

P176 第七章课后习题

下次课预习要点:

第七章考研真题

教 学 后 记	本节宜采用单刀直入法。首先开门见山地说明本节课的主要任务是求正态总体的置信区间，对均值与方差的区间估计，具体情形参照课本 P175 表 7-1。然后采用问题导向法，借助例题或者课后习题，讲授如何使用表 7-1，表中公式涉及的分位数，均有相应的表可以查，难度系数不大，最后强调掌握正态总体的区间估计，关键是记忆并熟背表 7-1 中涉及的公式，同时还分享了记忆技巧，不用刻意死记硬背，而是多做几个题，自然而然就熟记住了公式。		
授课时间	第 13 周	课 次	第 13 次
章 节 名 称	第七章习题课		
授 课 方 式	理论课 ()、实践课 ()、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 ()	教学 时数	3
教 学 的 要 求	<p>1、教学目标</p> <p>强化巩固第七章所教所学，查漏补缺。</p> <p>2、课程思政育人目标</p> <p>强化巩固第七章参数估计知识、查漏补缺，培养系统复盘与纠错反思的学习习惯，夯实统计思维基础；在知识梳理中深化严谨求实态度，树立精益求精的治学精神，提升用参数估计解决实际问题的责任意识。</p>		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	<p>重点：点估计与区间估计公式的应用。</p> <p>难点：理解题目，区分样本信息与总体信息。</p>		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">第七章 参数估计 习题课</p> <p>数学一：</p> <p>1 (97, 5分) 设总体 X 的概率密度为</p> $f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ <p>其中 $\theta > -1$ 是未知参数。X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量。</p> <p>2 (99, 6分) 设总体 X 的概率密度为</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$			

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本。

- (1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) 求 $D(\hat{\theta})$ 。

3 (00, 6分) 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。又设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的一组样本观测值, 求参数 θ 的最大似然估计值。

4 (02, 7分) 设总体 X 的概率分别为

	X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$	

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

5 (03, 4分) 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40cm, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____。

(注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$)

6 (03, 8分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

- (1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;
- (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性。

7 (04, 9分) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x, \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

- (I) β 的矩估计量;

(II) β 的最大似然估计量.

8 (06, 9分) 设总体 X 的概率密度为

$$F(X, \theta) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta \text{ 是未知参数 } (0 < \theta < 1),$$

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

数学三:

1 (91, 5分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $\alpha > 0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 求 λ 的最大似然估计量 $\bar{\lambda}$.

2 (92, 3分) 设 n 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布,

$$DX_1 = \sigma^2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 则}$$

- (A) S 是 σ 的无偏估计量。
- (B) S 是 σ 的最大似然估计是。
- (C) S 是 σ 的相合估计量 (即一致估计量)。
- (D) S 与 \bar{X} 相互独立。 []

3 (93, 3分) 设总体 X 的方差为 1, 根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本, 测得样本均值为 5. 则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为_____。

4 (96, 3分) 设由来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本, 得样本均值 $\bar{X} = 5$. 则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____。

5 (00, 8分) 设 0.51, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y = \ln X$ 服从正

态分布 $N(\mu, 1)$ 。

- (1) 求 X 的数学期望 EX (记 EX 为 b) ;
- (2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;
- (3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

6 (02, 3 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{若 } x \geq \theta \\ 0, & \text{若 } x < \theta \end{cases}$$

则 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 则未知参数 θ 的矩估计量为_____。

7 (04, 13 分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha, \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0, \beta > 1$. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

- (I) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的矩估计量;
- (II) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的最大似然估计量;
- (III) 当 $\beta = 2$ 时, 求未知参数 α 的最大似然估计量.

8 (05, 4 分) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽

取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 样本标准差 $s = 1(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

- A、 $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.
- B、 $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.
- C、 $(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.
- D、 $(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

9 (05, 13 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本均值为 \bar{X} . 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

求: (I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

<p>(II) Y_1与Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$.</p> <p>(III) 若$c(Y_1 + Y_n)^2$是σ^2的无偏估计量, 求常数c.</p> <p>10 (06, 13分) 设总体X的概率密度为$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, 1 \leq x < 2 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$, 其中$\theta$是未知参数</p> <p>($0 < \theta < 1$), X_1, X_2, \dots, X_n为来自总体的随机样本, 记N为样本值X_1, X_2, \dots, X_n中小于1的个数, 求:</p> <p>(I) θ的矩估计;</p> <p>(II) θ的最大似然估计.</p>			
<p>复习思考题、作业题: 消化整理第七章习题课内容。</p>			
<p>下次课预习要点: 第八章 假设检验 §1 假设检验 §2 正态总体均值的假设检验 §3 正态总体方差的假设检验 §6 分布拟合检验 §7 假设检验问题的 p 值法</p>			
教 学 后 记	<p>习题课采用历年考研真题来练习, 符合该专业学生的实际需求与难度标准, 鉴于该专业的学生学习热情比较高涨, 故练习的题量也会相对大一些, 课堂时间一时没法讲解完的, 课后会安排在微信群或学习通上上进心网络答疑。</p>		
授课时间	第 14 周	课 次	第 14 次
章 节 名 称	<p>第八章 假设检验 §1 假设检验 §2 正态总体均值的假设检验 §3 正态总体方差的假设检验 §6 分布拟合检验 §7 假设检验问题的 p 值法</p>		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学时数	3
教 学 目 的 要 求	<p>1、教学目标 (1)理解显著性检验的基本思想, 掌握假设检验的基本步骤, 了解假设检验可能产生的两类错误。 (2)了解单个正态总体及两个正态总体的均值和方差的假设检验。 2、课程思政育人目标 培养科学严谨思维, 借假设检验步骤树立求真务实态度, 明晰两类错误培育理性批判精神; 结合正态总体检验, 强化数据伦理意识, 厚植精益求精的专业责任感。</p>		

教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教 学 重 点 难 点	<p>重点：显著性检验的基本思想、假设检验的基本步骤、假设检验可能产生的两类错误；单个正态总体及两个正态总体的均值和方差的假设检验。</p> <p>难点：假设检验的基本步骤；单个正态总体及两个正态总体的均值和方差的假设检验。</p>
<p>教学步骤及内容：</p> <p>一．假设检验的基本思想</p> <p>1. 假设检验的基本思想：假设检验规则的制定有多种方式，其中一种较为通俗易懂，该方式所依据的是人们在实践中普遍采用的一个原理——实际推断原理，也称小概率原理，即“小概率事件在一次试验中几乎不会发生”。按照这一原理，首先需要依据经验或过往的统计数据对总体的分布参数作出假设 H_0，称为原假设，其对立面称为备择假设，记为 H_1。然后，在 H_0 为真的前提下，构造一个小概率事件，若在一次试验中，小概率事件居然发生了，就完全有理由拒绝 H_0 的正确性，否则就没有充分的理由拒绝 H_0，从而接受 H_0，这就是假设检验的基本思想。</p> <p>2. 拒绝域：在假设检验中，将小概率事件 $\{ U > 1.96\}$ 称为拒绝域或者否定域。</p> <p>二．假设检验的基本步骤</p> <p>1. 建立假设</p> <p>根据题意合理地建立原假设 H_0 和备择假设 H_1，如 $H_0: \theta = \theta_0$，$H_1: \theta \neq \theta_0$；</p> <p>2. 选取检验统计量</p> <p>选择适当的检验统计量 Q，要求在 H_0 为真时，统计量 Q 的分布是已知的；</p> <p>3. 确定拒绝域</p> <p>按照显著性水平 α，由统计量 Q 确定一个合理的拒绝域；</p> <p>4. 作出判断</p> <p>由样本观测值，计算出统计量的观测值 q，若 q 落在拒绝域内，则拒绝 H_0，否则接受 H_0。</p> <p>三．假设检验的两类错误</p> <p>1. 原假设 H_0 确实成立，而检验的结果是拒绝 H_0，这类错误称为第一类错误或“弃真”错误；</p> <p>2. 原假设 H_0 确实不成立，而检验的结果是接受 H_0，这类错误称为第二类错误或“取伪”错误。</p> <p>四．例题讲解</p> <p>例 1. 设某种特殊类型的集成电路所用硅晶圆片的目标厚度为 245（单位：μm），在正常情况下，产品厚度应该服从正态分布 $N(245, 3.6^2)$。我们抽取了 50 个硅晶圆片样品，并测定了每个硅晶圆片的厚度，得到了样品的平均厚度为 246.18（μm），这些数据是否表明实际的硅晶圆片平均厚度与目标值有显著差异？</p>	

例 2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1^2)$, X_1, X_2, X_3, X_4 是该总体的样本, 对于检验假设

$$H_0: \mu = 0; \quad H_1: \mu = \mu_1 (\mu_1 > 0),$$

已知拒绝域为 $\{\bar{X} > 0.98\}$, 问此检验犯第一类错误的概率是多少? 若 $\mu_1 = 1$, 则犯第二类错误的概率是多少?

一. 单个正态总体参数的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体的一个样本, 给定显著性水平为 α ($0 < \alpha < 1$),

下面介绍几种常见的检验类型:

1. σ^2 已知, 关于 μ 的检验

建立假设 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 选取检验统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 按照显著性水

平 α , 确定拒绝域 $\left\{ |U| > u_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$, 由样本观测值求出统计量的观测值 u , 然后作判断, 由于我们选取的

检验统计量为 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, 故称其为 U 检验法.

2. σ^2 未知, 关于 μ 的检验

首先建立假设 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 选取检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$, 在 H_0 为真时, 统计量

$T \sim t(n-1)$; 按照显著性水平 α , 确定拒绝域 $\left\{ |T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$. 由样本观测值求出统计量的观测值 t ,

然后作判断, 由于选取的检验统计量为 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$, 故该检验法称为 T 检验法.

3. μ 已知, 关于 σ^2 的检验

检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$;

选取检验统计量为 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$,

在 H_0 为真时, $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$,

按照显著性水平 α , 可得拒绝域 $\{\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \text{ 或 } \chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\}$.

4. μ 未知, 关于 σ^2 的检验

检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, 在 H_0 为真时,

检验统计量为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$,

按照显著性水平 α , 可得拒绝域 $\{\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \text{ 或 } \chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\}$.

上述两种检验法选取的检验统计量都是 χ^2 , 称为 χ^2 检验法.

二. 两个正态总体参数的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X 与 Y 独立, 样本 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 来自总体 X , 样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 来自总体 Y , 给定显著性水平为 α ($0 < \alpha < 1$), 下面给出三种最常见的检验类型:

1. σ_1^2, σ_2^2 已知, 关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

检验假设: $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

选取检验统计量为 $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$,

当 H_0 为真时, $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$,

显著性水平为 α 的拒绝域为 $\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$.

2. σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

检验假设: $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

选取检验统计量为 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, 其中 $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$,

当 H_0 为真时, 统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$,

可得显著性水平为 α 的拒绝域为 $\{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\}$.

3. μ_1, μ_2 未知, 关于方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的检验

检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

选取统计量为 $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$,

在 H_0 为真时, $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$, 可得显著性水平为 α 的拒绝域为

$$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或 } F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

三. 单侧检验

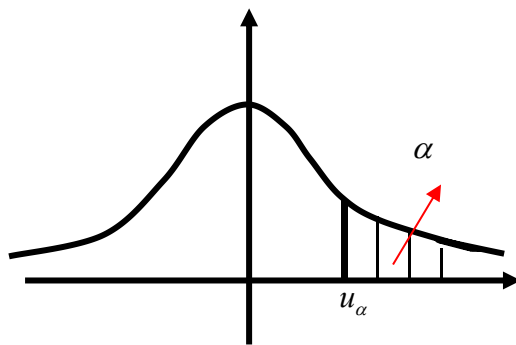
设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体的一个样本, 给定显著性水平为 α ($0 < \alpha < 1$),

若 σ^2 已知, 检验 μ 是否增大?

首先建立假设 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$, 或者 $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$,

选取检验统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, 当 H_0 为真时, $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 不应太大, 则 U 偏大时应

拒绝 H_0 , 故按照显著性水平 α , 如下图, 构造小概率事件为 $P\{U > u_\alpha\} = \alpha$, 即拒绝域 $\{U > u_\alpha\}$.



由样本观测值求出 U 的观测值 u , 然后作判断.

以上关于正态总体参数假设检验的讨论可以列表 7.1 和表 7.2 如下:

表 7.1 单个正态总体参数的假设检验表

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
σ^2 已知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $\sim N(0,1)$	$ U > u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U > u_{\alpha}$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U < -u_{\alpha}$
σ^2 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $\sim t(n-1)$	$ T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T > t_{\alpha}(n-1)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T < -t_{\alpha}(n-1)$
μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ $\sim \chi^2(n)$	$\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n)$
μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

表 7.2 两个正态总体参数的假设检验表

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
σ_1^2, σ_2^2 已知	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$ U > u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$U > u_{\alpha}$
	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$U < -u_{\alpha}$
σ_1^2, σ_2^2 未知, 但	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$ T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
	$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$T > t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	其中 $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$T < -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
μ_1, μ_2 已知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 / n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2 / n_2}$ $\sim F(n_1, n_2)$	$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 或 $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F > F_\alpha(n_1, n_2)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F < F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
μ_1, μ_2 未知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ $\sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

四. p 值检验法

1. p 值检验法: 假设检验问题的 p 值 (probability Value) 是由检验统计量的样本观测值得出的原假设可被拒绝的最小显著性水平.

按照 p 值的定义, 对于任意指定的显著性水平 α , 有

(1) 当 p 值 $\leq \alpha$ 时, 则在显著性水平 α 下拒绝 H_0 .

(2) 当 p 值 $> \alpha$ 时, 则在显著性水平 α 下接受 H_0 .

这种利用 p 值来进行检验的方法, 称为 p 值检验法.

五. 例题讲解

例 1. 某仪器厂生产的仪表圆盘, 其标准直径应为 20 (mm), 在正常情况下, 仪表圆盘直径服从正态分布 $N(20, 1)$. 为了检查该厂某天生产是否正常, 对生产过程中的仪表圆盘随机的抽查了 5 只, 测得直径分别为

19, 19.5, 19, 20, 20.5,

若显著性水平 $\alpha = 0.05$, 问该天生产是否正常?

例 2. 葡萄酒中除了水和酒精外, 占比最多的就是甘油. 甘油是酵母发酵的副产品, 它有助于提升葡萄酒的口感和质地, 因而经常需要对葡萄酒中的甘油含量进行检测. 假设某品牌葡萄酒的甘油

含量 X (mg/mL) 服从正态分布, 现随机抽查了 5 个样品, 测得它们的甘油含量分别为 2.67, 4.62, 4.14, 3.81, 3.83, 若显著性水平 $\alpha = 0.05$, 问是否有理由认为该品牌葡萄酒的平均甘油含量为 4 (mg/mL) ?

例 3. 某供货商声称, 他们提供的金属线的质量非常稳定, 其抗拉强度的方差为 9, 为了检测其抗拉强度, 在该种金属线中随机地抽出 10 根, 测得样本标准差 $s = 4.5$ (kg), 设该金属线的抗拉强度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若显著性水平为 $\alpha = 0.05$, 问是否可以相信该供货商的说法?

例 4. 在某种制造过程中需要比较两种钢板的强度, 一种是冷轧钢板, 另一种双面镀锌钢板。现从冷轧钢板中抽取了 20 个样品, 测得强度的均值为 $\bar{x} = 20.5$ (GPa), 从双面镀锌钢板中抽取了 25 个样品, 测得强度的均值为 $\bar{y} = 23.9$ (GPa), 设两种钢板的强度都服从正态分布, 其方差分别为 $\sigma_1^2 = 2.8^2$, $\sigma_2^2 = 3.5^2$, 试问两种钢板的平均强度是否有显著性差异? ($\alpha = 0.01$)

例 5. 有两种灯泡, 一种用 A 型灯丝, 另一种用 B 型灯丝。随机抽取两种灯泡各 10 只做试验, 测得它们的寿命 (单位: 小时) 为:

A 型: 1293 1380 1614 1497 1340 1643 1466 1677 1387 1711

B 型: 1061 1065 1092 1017 1021 1138 1143 1094 1028 1119

设两种灯泡的寿命均服从正态分布且方差相等, 试检验两种灯泡的平均寿命之间是否存在显著差异? ($\alpha = 0.05$)

例 6. 某一橡胶制品配方中, 原配方用氧化锌 5 克, 现配方减为 1 克。今分别对两种配方作一批试验, 分别测得橡胶制品伸长率如下:

现配方 565 577 580 575 556 542 560 532 470 461

原配方 540 533 525 520 545 531 541 529 534

设橡胶制品的伸长率服从正态分布, 问两种配方橡胶制品的伸长率的方差有无显著差异? ($\alpha = 0.05$)

例 7. 某地区的物价部门对当前市场的大米价格情况进行调查, 共调查了 30 个集市上的大米售价, 测得它们的平均价格为 2.21 元/500 g, 已知以往大米平均售价一直稳定在 2 元 / 500 g 之内。如果该城市大米售价服从正态分布 $N(\mu, 0.18)$, 假定方差不变, 能否根据上述数据认为该地区当前的大米售价明显高于往年? ($\alpha = 0.05$)

例 8. 现有甲、乙两台车床加工同一型号的螺钉。根据经验认为两台车床加工的螺钉长度都服从正态分布。现从这两台车床加工的螺钉中分别抽出 11 个和 9 个, 测得长度 (单位: mm) 分别为

甲 6.2, 5.7, 6.0, 6.3, 6.5, 6.0, 5.7, 5.8, 6.0, 5.8, 6.0

乙 5.6, 5.7, 5.9, 5.5, 5.6, 6.0, 5.8, 5.5, 5.7

试问: 乙车床的加工精度是否高于甲车床, 即乙车床螺钉长度的方差是否比甲车床的小?

(α = 0.05)			
例 9. 用 p 值检验法检验第一节例 1 的检验问题.			
复习思考题、作业题: P215 第八章习题			
下次课预习要点: 第八章习题课			
教 学 后 记	学习了单正态总体的假设检验后, 学生对假设检验的流程更加熟悉了. 对于双正态总体的假设检验, 虽然计算量稍大一点, 但对方法的掌握并没有太大困难, 照样删繁就简, 先对本节内容梗概进行介绍: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 1、检验 $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $\begin{cases} \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 已知} \\ \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 未知但相等} \end{cases}$ 2、检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 然后结合 P193 表 8-1, 讲解相关例题. 这样一来, 思路清晰, 简单明白.		
授课时间	第 15 周	课 次	第 15 次
章 节 名 称	第八章习题课		
授 课 方 式	理论课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、实践课 (<input type="checkbox"/>)、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 (<input type="checkbox"/>)	教学 时数	3
教 学 目 的 要 求	1、教学目标: 强化巩固第八章假设检验内容 2、课程思政育人目标 借复习巩固检验步骤与两类错误, 强化科学严谨思维, 培育理性复盘习惯; 重温正态总体检验, 深化数据伦理认知, 筑牢精益求精的专业担当.		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点 难 点	重点: 运用第八章理论知识解题 难点: 准确提取题目信息, 定位相关知识点		
教学步骤及内容: 基本题型 I 有关检验统计量和两类错误的题型 【例 8.1】 u 检验、 t 检验都是关于_____的假设检验. 当_____已知时, 用 u 检验; 当_____未知时, 用 t 检验. 【分析】由 u 检验、 t 检验的概念可知, u 检验、 t 检验都是关于均值的假设检验, 当方差 σ^2 为			

已知时, 用 u 检验; 当方差 σ^2 为未知时, 用 t 检验.

【例 8.2】 设总体 $X \sim N(u, \sigma^2)$, u, σ^2 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体的样本, 记 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$,

$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 则对假设检验 $H_0: u = u_0 \leftrightarrow H_1: u \neq u_0$ 使用的 t 统计量 $t =$

(用 \bar{x}, Q 表示): 其拒绝域 $w =$ _____.

【分析】 σ^2 未知, 对 u 的检验使用 t 检验, 检验统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - u_0}{S} \sqrt{n} = \frac{(\bar{x} - u_0) \sqrt{n(n-1)}}{Q} \sim t(n-1)$$

对双边检验 $H_0: u = u_0 \leftrightarrow H_1: u \neq u_0$, 其拒绝域为 $w = \{ |t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \}$.

【例 8.3】 设总体 $X \sim N(u_1, \sigma_1^2)$, 总体 $Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$, 其中 σ_1^2, σ_2^2 未知, 设 x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 是来自总体 X 的样本, y_1, y_2, \dots, y_{n_2} 是来自总体 Y 的样本, 两样本独立, 则对于假设检验 $H_0: u_1 = u_2 \leftrightarrow H_1: u_1 \neq u_2$, 使用的统计量为_____, 它服从的分布为_____.

【分析】 记 $\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$, 因两样本独立, 故 \bar{x}, \bar{y} 相互独立, 从而在 H_0 成立下,

$E(\bar{x} - \bar{y}) = 0$, $D(\bar{x} - \bar{y}) = D(\bar{x}) + D(\bar{y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$, 故构造检验统计量

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

【例 8.4】 设总体 $X \sim N(u, \sigma^2)$, u 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体的样本, 样本方差为 S^2 , 对 $H_0: \sigma^2 \geq 16 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < 16$, 其检验统计量为_____, 拒绝域为_____.

【分析】 u 未知, 对 σ^2 的检验使用 χ^2 检验, 又由题设知, 假设为单边检验, 故统计量为

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{16} \sim \chi^2(n-1)$, 从而拒绝域为 $\{ \chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \}$.

【例 8.5】 某青工以往的记录是: 平均每加工 100 个零件, 由 60 个是一等品, 今年考核他, 在他加工零件中随机抽取 100 件, 发现有 70 个是一等品, 这个成绩是否说明该青工的技术水平有了显

著性的提高（取 $\alpha = 0.05$ ）？对此问题，假设检验问题应设为 【 】

(A) $H_0: p \geq 0.6 \leftrightarrow H_1: p < 0.6$. (B) $H_0: p \leq 0.6 \leftrightarrow H_1: p > 0.6$.

(C) $H_0: p = 0.6 \leftrightarrow H_1: p \neq 0.6$. (D) $H_0: p \neq 0.6 \leftrightarrow H_1: p = 0.6$.

【分析】一般地，选取问题的对立事件为原假设. 在本题中，需考察青工的技术水平是否有了显著性的提高，故选取原假设为 $H_0: p \leq 0.6$ ，相应的，对立假设为 $H_1: p > 0.6$ ，故选(B).

【例 8.6】某厂生产一种螺钉，标准要求长度是 68mm，实际生产的产品，其长度服从 $N(u, 3.6^2)$ ，考察假设检验问题 $H_0: u = 68 \leftrightarrow H_1: u \neq 68$. 设 \bar{x} 为样本均值，按下列方式进行假设检验：当 $|\bar{x} - 68| > 1$ 时，拒绝原假设 H_0 ；当 $|\bar{x} - 68| \leq 1$ 时，接受原假设 H_0 .

- (1) 当样本容量 $n = 36$ 时，求犯第一类错误的概率 α ；
- (2) 当样本容量 $n = 64$ 时，求犯第一类错误的概率 α ；
- (3) 当 H_0 不成立时（设 $u = 70$ ），又 $n = 64$ 时，按上述检验法，求犯第二类错误的概率 β .

【解】(1) 当 $n = 36$ 时， $\bar{x} \sim N(u, \frac{3.6^2}{36}) = N(u, 0.6^2)$,

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{|\bar{x} - 68| > 1 | H_0 \text{ 成立}\} = P\{\bar{x} < 67 | H_0 \text{ 成立}\} + P\{\bar{x} > 69 | H_0 \text{ 成立}\} \\ &= \Phi\left(\frac{67 - 68}{0.6}\right) + [1 - \Phi\left(\frac{69 - 68}{0.6}\right)] = \Phi(-1.67) + [1 - \Phi(1.67)] \\ &= 2[1 - \Phi(1.67)] = 2[1 - 0.99575] = 0.095.\end{aligned}$$

(2) 当 $n = 64$ 时， $\bar{x} \sim N(u, \frac{3.6^2}{64}) = N(u, 0.45^2)$

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{|\bar{x} - 68| > 1 | H_0 \text{ 成立}\} = P\{\bar{x} < 67 | H_0 \text{ 成立}\} + P\{\bar{x} > 69 | H_0 \text{ 成立}\} \\ &= \Phi\left(\frac{67 - 68}{0.45}\right) + [1 - \Phi\left(\frac{69 - 68}{0.45}\right)] \\ &= 2[1 - \Phi(2.22)] = 2[1 - 0.9868] = 0.0264.\end{aligned}$$

(3) 当 $n = 64$ ，又 $u = 70$ 时， $\bar{x} \sim N(70, 0.45^2)$ ，这时犯第二类错误的概率

$$\begin{aligned}\beta(70) &= P\{|\bar{x} - 68| \leq 1 | u = 70\} = P\{67 \leq \bar{x} \leq 69 | u = 70\} \\ &= \Phi\left(\frac{69 - 70}{0.45}\right) - \Phi\left(\frac{67 - 70}{0.45}\right) = \Phi(-2.22) - \Phi(-6.67) \\ &= \Phi(6.67) - \Phi(2.22) = 1 - 0.9868 = 0.0132.\end{aligned}$$

【评注】 1^0 (1) (2) 的计算结果表明：当 n 增大时，可减小犯第一类错误的概率 α ；

2^0 当 $n = 64$ ， $u = 66$ 时，同样可计算得到 $\beta(66) = 0.0132$ 。

3^0 当 $n = 64$ ， $u = 68.5$ 时， $\bar{x} \sim N(68.5, 0.45^2)$ ，则

$$\begin{aligned}\beta(68.5) &= P\{67 \leq \bar{x} \leq 69 \mid u = 68.5\} \\ &= \Phi\left(\frac{69 - 68.5}{0.45}\right) - \Phi\left(\frac{67 - 68.5}{0.45}\right) = \Phi(1.11) - \Phi(-3.33) \\ &= 0.8665 - [1 - 0.9995] = 0.8660.\end{aligned}$$

这表明：当原假设 H_0 不成立时，参数真值越接近于原假设下的值时， β 的值就越大。

【例 8.7】设总体 $X \sim N(u, \sigma^2)$ ， x_1, x_2, \dots, x_n 是来自该总体的样本，对于检验 $H_0: u \leq 0 \leftrightarrow H_1: u > 0$ ，取显著性水平 α ，拒绝域为： $w = \{u > u_\alpha\}$ ，其中 $u = \sqrt{n}\bar{x}$ ，求：

(1) 当 H_0 成立时，求犯第一类错误的概率 $\alpha(u)$ ；

(2) 当 H_0 不成立时，求犯第二类错误的概率 $\beta(u)$ 。

【解】(1) 当 H_0 成立时， $u \leq 0$ ，则

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= P\{u > u_\alpha \mid u \leq 0\} = P\{\sqrt{n}\bar{x} > u_\alpha \mid u \leq 0\} \\ &= P\{\sqrt{n}(\bar{x} - u) > u_\alpha - \sqrt{nu} \mid u \leq 0\} = 1 - \Phi(u_\alpha - \sqrt{nu}) \quad (u \leq 0)\end{aligned}$$

因 $u \leq 0$ ，故 $\Phi(u_\alpha - \sqrt{nu}) \geq \Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ ，从而 $\alpha(u) \leq 1 - \Phi(u_\alpha) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$ ，即犯第一类错误的概率不大于 α 。

$$\begin{aligned}(2) \quad \beta(u) &= P\{u \leq u_\alpha \mid u > 0\} = P\{\sqrt{n}(\bar{x} - u) \leq u_\alpha - \sqrt{nu} \mid u > 0\} \\ &= \Phi(u_\alpha - \sqrt{nu}) \quad (u > 0)\end{aligned}$$

因 $u > 0$ ，故当 $u \rightarrow +\infty$ 时， $\beta(u) \rightarrow 0$ ，即 u 与假设 H_0 偏离越大，犯第二类错误的概率越小；而当 $u \rightarrow 0^+$ 时， $\beta(u) \rightarrow 1 - \alpha$ ，即当 u 为正值且接近 0 时，犯第二类错误的概率接近 $1 - \alpha$ 。

基本题型 II 单个正态总体的假设检验

【例 8.8】某天开工时，需检验自动包装机工作是否正常，根据以往的经验，其包装的质量在正

常情况下服从正态分布 $N(100, 1.5^2)$ (单位: kg), 先抽测了 9 包, 其质量为:

99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.0, 100.5

问这天包装机工作是否正常?

【分析】 关键是将这一问题转化为假设检验问题. 因检验包装机工作是否正常, 化为数学问题应为双边检验 $H_0: u = 100 \leftrightarrow H_1: u \neq 100$.

【解】 由题意, 提出假设检验问题: $H_0: u = 100 \leftrightarrow H_1: u \neq 100$,

选取检验统计量 $u = \frac{\bar{x} - u_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$

当 $\alpha = 0.05$ 时, $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$, 又 $u = \frac{99.98 - 100}{1.5} \sqrt{9} = 0.04 < u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, 即接受原假设 H_0 ,

认为包装机工作正常.

【例 8.9】 已知某种元件的寿命服从正态分布, 要求该元件的平均寿命不低于 $1000h$, 现从这批元件中随机抽取 25 只, 测得平均寿命 $\bar{X} = 980h$, 标准差 $S = 65h$, 试在水平 $\alpha = 0.05$ 下, 确定这批元件是否合格.

【解】 由题意, σ^2 未知, 在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: u = u_0 = 1000 \leftrightarrow H_1: u < u_0 = 1000$$

属于单边 (左边) t 检验.

构造检验统计量 $t = \frac{\bar{x} - u_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$, 其中 $n = 25, S = 65, \bar{X} = 980h$, 查 t 分布表可得:

$$t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(25-1) = 1.7109,$$

$$\text{又 } |t| = \frac{|\bar{x} - u_0|}{S} \sqrt{n} = \frac{|980 - 1000|}{65} \sqrt{25} = 1.538 < t_{0.05}(24) = 1.7109.$$

即接受原假设 H_0 , 认为这批元件是合格的.

【例 8.10】 某厂生产的一中电池, 其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000(\text{小时})^2$ 的正态分布, 现有一批这种电池, 从生产的情况来看, 寿命的波动性有所改变, 现随机地抽取 26 只电池, 测得寿命的样本方差 $S^2 = 9200(\text{小时})^2$, 问根据这一数据能否推断这批电池寿命的波动性较以往有显著性的变化 (取 $\alpha = 0.02$).

【解】 检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq 5000$,

选取统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

由 $\alpha = 0.02$, $n = 26$, 查 χ^2 分布表可得

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.01}^2(25) = 44.314, \quad \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.99}^2(25) = 11.524,$$

又统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 46 > \chi_{0.01}^2(25) = 44.314$, 故拒绝原假设 H_0 , 即认为这批电池寿命的波动性较以往有显著性的变化.

【例 8.11】 某种导线, 要求其电阻的标准不得超过 0.005 (欧姆), 今在生产的一批导线中取样品 9 根, 测得 $S = 0.007$ (欧姆), 设总体为正态分布, 问在水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为这批导线的标准差显著性地偏大?

【解】 本题属于总体均值未知, 正态总体方差的双边检验问题

$$H_0: \sigma = \sigma_0 = 0.005 \leftrightarrow H_1: \sigma > \sigma_0 = 0.005$$

选取统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

当 $\alpha = 0.05$, $n = 9$ 时, 查 χ^2 分布表可得: $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(8) = 15.507$, 又题设 $S = 0.007$,

则统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > \chi_{0.05}^2(8) = 15.507$.

故拒绝原假设 H_0 , 认为这批导线的标准差显著性地偏大.

【例 8.12】 机器自动包装食盐, 设每袋盐的净重服从正态分布, 规定每袋盐的标准重量为 500 克, 标准差不超过 10 克. 某天开工以后, 为了检查机器工作是否正常, 从已包装好的食盐中随机抽取 9 袋, 测得其重量 (克) 为:

497, 507, 510, 475, 484, 488, 524, 491, 515

问这天自动包装机工作是否正常 (显著性水平 $\alpha = 0.05$) ?

【解】 设每袋盐重量为随机变量 X , 则 $X \sim N(u, \sigma^2)$, 为了检查机器是否工作正常, 需检验假设: $H_{01}: u = 500$ 及 $H_{02}: \sigma^2 \leq 100$.

下面现检验假设 $H_{01}: u = 500 \leftrightarrow H_{11}: u \neq 500$

由于 σ^2 未知, 故构造统计量 $t = \frac{\bar{x} - u_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$

由于 $\alpha = 0.05$, 查 t 分布表可得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$, 又由题设计算可得

$\bar{X} = 499, S = 16.03$, 故统计量取值

$$|t| = \frac{|\bar{x} - u_0|}{S} \sqrt{n} = \frac{|499 - 500|}{16.03} \sqrt{9} = 0.187 < t_{0.025}(8) = 2.306$$

即接受原假设 H_{01} ，认为机器包装食盐的均值为 500 克，没产生系统误差。

下面在检验假设 $H_{02} : \sigma^2 \leq 100 \leftrightarrow H_{12} : \sigma^2 > 100$

选取统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，由于 $\alpha = 0.05$ ，查 χ^2 分布表可得

$\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(8) = 15.5$ ，而统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 20.56 > \chi_{0.05}^2(8) = 15.5$ ，故拒绝原假设 H_{02} ，

接受 H_{12} ，即认为其标准差超过了 10 克。

由上可知，这天机器自动包装食盐，虽没有产生系统误差，但生产不够稳定（方差偏大），从而认为这天自动包装机工作不正常。

基本题型 III 两个正态总体的假设检验

【例 8.13】 下表给出了两个文学家马克·吐温（Mark Twain）的 8 偏小品文以及斯诺·特格拉斯（Snodgrass）的 10 偏小品文中由 3 格字母组成的词比例。

马克·吐温： 0.225, 0.262, 0.217, 0.240, 0.230, 0.229, 0.235, 0.217

斯诺·特格拉斯： 0.209, 0.205, 0.196, 0.210, 0.202, 0.207, 0.224, 0.223, 0.220, 0.201

设两组数据分别来自正态分布，且两总体方差相等，两样本相互独立，问两个作家所写的小品文中包含由 3 格字母组成的词的比例是否有显著性的差异（ $\alpha = 0.05$ ）？

【分析】 首先应注意题中的“比例”即“均值”的含义，因而本题应属于未知方差，却知其相等的两正态母体，考虑它们的均值是否相等的问题。

【解】 设题中两正态母体分别记为 X, Y ，其均值分别为 u_1, u_2 ，因而检验问题如下：

$$H_0 : u_1 = u_2 \leftrightarrow H_1 : u_1 \neq u_2$$

选取统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$ ，

其中 $n = 8, m = 10$ ， $S_w^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ ，

在 $\alpha = 0.05$ 时，查 t 分布表可得 $t_{\alpha/2}(n+m-2) = t_{0.025}(16) = 2.1199$

由题设样本数据计算可得 $\bar{X} = 0.2319, \bar{Y} = 0.2097, S_1^2 = 0.00021, S_2^2 = 0.00009$ ，

$$S_w = \sqrt{S_w^2} = \sqrt{\frac{(8-1)(0.00021) + (10-1)0.00009}{8+10-2}} = 0.119.$$

$$\text{从而 } t \text{ 统计量值为 } |T| = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{|0.2319 - 0.2097|}{0.0119 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = 3.9643 > t_{0.025}(16) = 2.1199,$$

因而拒绝原假设 H_0 , 认为两个作家所写的小品文中包含由 3 格字母组成的词的比例有显著性的差异.

【例 8.14】 据专家推测: 矮个子的人比高个子的人的寿命要长一些, 下面给出了美国 31 个自然死亡的总统的寿命.

矮个子 (身高小于 5 英尺 8 英寸)

总统	Modison	Van Buren	B. Harrison	J. Adams	J. Q. Adams
身高	5' 4"	5' 6"	5' 6"	5' 7"	5' 7"
寿命	85	79	67	90	80

高个子 (身高大于 5 英尺 8 英寸)

总统	W. Harrison	Plok	Taylor	Crant	Hayes	Truman	Fillmore	Pierce	A. Johson
身高	5' 8"	5' 8"	5' 8"	5' 8.5"	5' 8.5"	5' 9"	5' 9"	5' 10"	5' 10"
寿命	68	53	65	63	70	88	74	64	66
总统	T. Roosevelt	Coolidge	Eisenhower	Cleveland	Wilson	Hoover	Monroe	Tyler	
身高	5' 10"	5' 10"	5' 10"	5' 11"	5' 11"	5' 11"	6'	6'	
寿命	60	60	78	71	67	90	73	71	
总统	Buchanan	Taft	Harding	Jaskon	Washington	Arthur	F. Roosevelt		
身高	6'	6'	6'	6' 1"	6' 2"	6' 2"	6' 2"		
寿命	77	72	57	78	67	56	63		

设两个寿命总体均为正态分布且方差相等, 试问以上数据是否符合上述推测 ($\alpha = 0.05$) ?

【解】 设矮个子总统寿命为 X , 高个子总统寿命为 Y , 需检验 $H_0: u_1 = u_2 \leftrightarrow H_1: u_1 > u_2$.

由于 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 故选用统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$, 其中 $n=5, m=26$,

$$S_w^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}. \text{ 由题设样本数据可得 } \bar{X} = 80.2, \bar{Y} = 69.15,$$

$$4S_1^2 = 294.8, 25S_2^2 = 2183.215, \text{ 故 } S_w^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} = 85.449, \text{ 从而统计量}$$

$$|T| = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = 2.448, \text{ 又当 } \alpha = 0.05 \text{ 时, 查 } t \text{ 分布表可得 } t_\alpha(n+m-2) = t_{0.05}(29) = 1.6991,$$

即 $|T| = 2.448 > t_{0.05}(29) = 1.6991$, 故拒绝原假设 H_0 , 即推测是正确的, 认为矮个子的人比高个子的人的寿命要长一些

【例 8.15】 总体 $X \sim N(u_1, \sigma^2)$, $Y \sim N(u_2, \sigma^2)$, x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 与 y_1, y_2, \dots, y_{n_2} 分别时来自总

体 X, Y 的样本, 试讨论检验问题 $H_0: u_1 - u_2 \leq \delta \leftrightarrow H_1: u_1 - u_2 > \delta$.

【解】 取统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (u_1 - u_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \text{ 其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

则检验统计量为

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ 当 } H_1 \text{ 成立时, } t \text{ 有偏大的趋势, 故取拒绝域为 } w = \{t > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}.$$

【例 8.16】 甲乙相邻地段各取了 50 块和 25 块岩心进行磁化率测定, 算出两样本标准差分别是 $S_1^2 = 0.0139$, $S_2^2 = 0.0053$, 问甲乙两段的标准差是否有显著性差异 ($\alpha = 0.05$)?

【解】 作假设 $H_0: \sigma_0 = \sigma_1$, 由题设有

$$\frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{50 \times S_1^2}{49} = \frac{50 \times 0.0139}{49} = 0.0142,$$

$$\frac{1}{52-1} \sum_{i=1}^{52} (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{52 \times S_2^2}{51} = \frac{52 \times 0.0053}{51} = 0.0054$$

从而统计量 $F = \frac{\frac{n_1 S_1^2}{(n_1 - 1)}}{\frac{n_2 S_2^2}{(n_2 - 1)}} = \frac{0.0142}{0.0054} = 2.63$, 当 $\alpha = 0.05$, 查 F 分布表可得

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(50-1, 52-1) = F_{0.025}(50-1, 52-1) = 1.7494,$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(50-1, 52-1) = F_{0.975}(50-1, 52-1) = 0.5698,$$

因为 $F = 2.63 > F_{0.025}(49, 51) = 1.7494$, 故拒绝原假设 H_0 , 即认为甲乙两段的标准差有显著性差异.

【例 8.17】 在集中教育开课前对学员进行了测试, 过来一段时间后, 又对学员进行了与前一次同样程度的考查, 目的是了解上次的学员与这次学员的考试分类是否有显著性差别 ($\alpha = 0.05$), 从上次与这次学员的考试中随机抽取 12 份考试成绩, 如下表

考试次数	考分	合计	平均分
(1)	80.5, 91.0, 81.0, 85.0, 70.0, 86.0, 69.5, 74.0, 72.5, 83.0, 69.0, 78.5	940	78.5
(2)	76.0, 90.0, 91.5, 73.0, 64.5, 77.5, 81.0, 83.5, 86.0, 78.5, 85.0, 73.5	960	80.0

【解】 此为双正态总体的假设检验, 两总体均值未知, 先检验假设

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

选取统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$ ，由题设可计算得 $S_1^2 = 53.15, S_2^2 = 60.23$ ，则统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{53.15}{60.23} = 0.8825, \text{ 取 } \alpha = 0.05, \text{ 查 } F \text{ 分布表可得}$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(11,11) = F_{0.025}(11,11) = 3.43, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(11,11) = F_{0.975}(11,11) = \frac{1}{F_{0.025}(11,11)} = 0.2915.$$

由于 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(11,11) < F = 0.8825 < F_{\frac{\alpha}{2}}(11,11) = 3.43$ ，故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0 ，即认为两次考试中学员的成绩的方差相等。

再假设 $H_0: u_1 = u_2 \leftrightarrow H_1: u_1 \neq u_2$ 。

构造统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ ，其中 $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ ， $n_1 = 12, n_2 = 12$ 。

由样本数据可得 $\bar{X} = 78.5, \bar{Y} = 80.0, S_1^2 = 53.1515, S_2^2 = 60.2273$ ，故

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 56.6894, \text{ 从而统计量 } |T| = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 0.488, \text{ 在 } \alpha = 0.05 \text{ 下,}$$

查 t 分布表可得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(22) = 2.0739$ 。

由于 $|T| = 0.488 < t_{0.025}(22) = 2.0739$ ，即认为两次考试中学员的平均成绩相等，从而认为两次考试中学员的成绩无显著性差异。

基本题型IV 非正态总体参数假设检验

【例 8.18】某产品的次品率为 0.17，现对此产品进行了新工艺试验，从中抽取 400 件检查，发现次品 56 间，能否认为这项新工艺显著性地影响产品质量 ($\alpha = 0.05$)？

【解】检验问题 $H_0: p = 0.17 \leftrightarrow H_1: p \neq 0.17$

由题设可知 $\hat{p} = \frac{m}{n} = \frac{56}{400} = 0.14$ ，

构造统计量 $u = \frac{(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0 q_0}} \sqrt{n} = \frac{0.14 - 0.17}{\sqrt{0.14 \times 0.83}} \times \sqrt{400} = -1.597$ ，当 $\alpha = 0.05$ 时，查正态分布表可得

$u_{0.025} = 1.96$ ，因为 $|u| < u_{0.025} = 1.96$ ，故接受原假设 H_0 ，认为新工艺显著性地影响产品质量。

【评注】 本题的理论依据是中心极限定理：当 n 充分大时，在 H_0 成立时， $u = \frac{(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0 q_0}} \sqrt{n}$ 近似

服从 $N(0,1)$ 分布。

【例 8.19】 已知某种电子元件的使用寿命 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ ，现抽查 100 个元件，得样本均值 $\bar{x} = 950(h)$ ，能否认为参数 $\lambda = 0.01$ ($\alpha = 0.05$)？

【解】 由题设 $X \sim E(\lambda)$ ，故 $EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$ ，当 n 充分大时，
 $u = \frac{\bar{x} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}} = (\lambda\bar{x} - 1)\sqrt{n} \sim N(0,1)$ ，现在检验问题 $H_0: \lambda = 0.001 \leftrightarrow H_1: \lambda \neq 0.001$ ，则
 $u = (\lambda\bar{x} - 1)\sqrt{n} = (0.001 \times 950 - 1) \times \sqrt{100} = 0.5$ ，当 $\alpha = 0.05$ 时，查正态分布表可得 $u_{0.025} = 1.96$ ，
因为 $|u| < u_{0.025} = 1.96$ ，故接受原假设 H_0 ，认为参数 $\lambda = 0.01$ 。

【评注】 总体 $X \sim F(x)$ ， $EX = u$, $DX = \sigma^2$ ，则当 n 充分大时， $u = \frac{\bar{x} - u}{\sigma} \sqrt{n}$ 近似服从 $N(0,1)$ 分布。

【例 8.20】 对某干洗公司去除污点的比例做下列假设检验 $H_0: p = 0.7 \leftrightarrow H_1: p = 0.9$ ，选出 100 个污点，设其中去除的污点数为 x ，拒绝域为 $w = \{x > 82\}$ 。

(1) 当 $p = 0.7$ 时，求犯第一类错误的概率 α ；

(2) 当 $p = 0.9$ 时，求犯第二类错误的概率 β 。

【解】 (1) 由题设有

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{x > 82 \mid p = 0.7\} = 1 - \Phi\left(\frac{82 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.62) = 1 - 0.9956 = 0.0044.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \beta &= P\{x \leq 82 \mid p = 0.9\} = \Phi\left(\frac{82 - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}\right) \\ &= \Phi(-2.67) = 1 - \Phi(2.67) = 1 - 0.9962 = 0.0038.\end{aligned}$$

【评注】从计算分析，这一检验法的 α ， β 皆很小，是较好的检验。

§ 历年考研真题评析

1、【98. 1. 4】设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，计算得到平均成绩为 66.5，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生平均成绩为 70 分？并给出检验过程。

【解】设该次考试的考生成绩为 X ，则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，设 \bar{X} 为从总体 X 抽取的样本容量为 n 的样本均值， S 为样本标准差，根据题意建立假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70; H_1: \mu \neq 70.$$

选取统计量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - 70}{S} \sqrt{36}$$

在 $\mu = \mu_0 = 70$ 时， $X \sim (70, \sigma^2), T \sim t(35)$ 。

选取拒绝域 $R = \{|T| \geq \lambda\}$ ，其中 λ 满足 $P\{|T| \geq \lambda\} = 0.05$ ，即 $P\{|T| < \lambda\} = 0.95$ 。

即 $\lambda = t_{0.975}(35) = 2.0301$ 。

由 $n = 36, \bar{x} = 66.5, \mu_0 = 70, s = 15$ 可以计算得统计量 T 的值

$$|T| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301.$$

因此不能拒绝 H_0 ，即在显著性水平 0.05 下可以认为全体考生的平均成绩为 70 分。

复习思考题、作业题：

整理消化第八章习题课内容。

下次课预习要点：

第九章 方差分析及回归分析

§1 单因素试验的方差分析

§2 双因素试验的方差分析

§3 一元线性回归

§4 多元线性回归

教 学
后 记

假设检验是一种非常重要的统计分析方法，其正确使用可以极大地提高数据分析的正确性。因此，教师有责任在教学中引导学生正确学习并使用假设检验，以帮助他们更好地掌握统计学知识，并从中受益。要使学生充分学习和掌握假设检验，教师还可以采用评估的方式来检测学生是否有效地掌握了假设检验的知识。教师可以设计多种不同形式的考核，比如让学生完成一些小型统计学习项目，看看他们在提出假设以及实施假设检验时都采用了哪些方法。这些练习，也可以帮助学生熟悉假设检验的数据分析步骤，从而更好地应用假设检验去解决实际问题。对于学生而言，学习假设检验除了被老师教授外，他们也可以利用丰富多彩的资料，比如书籍、网络教程等，来自行学习假设检验。学生可以先参考相关书籍，明确自己的目标，然后再利用网络视

	频、教程等学习材料，进一步深入理解运用假设检验的方法。具体实行依学生兴趣与能力而看，可以采取课余时间开展拓展训练。		
授课时间	第 16 周	课 次	第 16 次
章 节 名 称	第九章 方差分析及回归分析 §1 单因素试验的方差分析 §2 双因素试验的方差分析 §3 一元线性回归 §4 多元线性回归		
授 课 方 式	理论课(√)、实践课()、习题课()、其它()	教学时数	3
教 学 目 的 要 求	1、教学目标 (1)了解方差分析的基本思想，试验因素和水平的意义。 (2)掌握平方和的分解，会作出方差分析表。 (3)了解回归分析的基本思想。 (4)掌握一元线性回归，了解可化为线性回归的一元非线性回归和多元线性回归。 (5)了解线性相关性检验和利用回归方程进行预测和控制。 2、课程思政育人目标 借方差分析思想与平方和分解，培育严谨分析思维，强化试验探究中的责任意识；凭回归分析与相关性检验，树立理性建模思维，厚植数据应用的科学担当。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 难 点	重点：平方和的分解，检验方法和参数估计、重复数相等与不相等场合的方法、检验方法的掌握，回归系数的估计方法，回归方程的显著性检验。 难点：检验方法和参数估计，重复数相等与不相等场合的方法. 实际问题的检验，回归方程的显著性检验。		
教学步骤及内容： §1 单因素试验的方差分析 8.1.1 问题的提出 在实际工作中经常会遇到多个总体均值的比较问题，处理这类问题通常采用方差分析方法。 例 8.1.1 8.1.2 单因子方差分析的统计模型 在例 8.1.1 中，我们只考察一个因子，称为单因子试验. 记因子为 A，设其有 r 个水平，记为 A_1, \dots, A_r ，在每一水平下考察的指标可看做一个总体，故有 r 个总体，假定 (1) 每一总体均为正态总体，记为 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ， $i=1, 2, \dots, r$ ； (2) 各总体方差相同，即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2 = \sigma^2$ (3) 每一总体中抽取的样本相互独立，即诸数据 y_{ij} 都相互独立 在这三个基本假定下，要检验的假设是			

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \text{ 不全相等} \quad (8.1.1)$$

如果 H_0 成立, 因子 A 的 r 个水平均值相同, 称因子 A 的 r 个水平间没有显著差异, 简称因子 A 不显著; 反之, 若 H_0 不成立, 因子 A 的 r 个水平均值不全相同, 称因子 A 的 r 个水平间有显著差异, 简称因子 A 显著.

在每一水平下各作 m 次独立重复试验, 若记第 i 个水平下第 j 次重复的实验结果为 y_{ij} , 得到 $r \times m$ 个实验结果: $y_{ij}, i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, m$.

在水平 A_i 下的实验结果 y_{ij} 与该水平下的均值 μ_i 的差距 $\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu_i$ 称为随机误差. 于是有

$$y_{ij} = \varepsilon_{ij} + \mu_i, \quad (8.1.2)$$

该式称为实验结果 y_{ij} 的数据结构式.

把三个假定用于数据结构式就得到单因子方差分析的统计模型:

$$\begin{cases} y_{ij} = \varepsilon_{ij} + \mu_i, i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, m; \\ \text{诸 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立, 且都服从 } N(0, \sigma^2) \end{cases} \quad (8.1.3)$$

称诸 μ_i 的平均 $\mu = \frac{1}{r}(\mu_1 + \dots + \mu_r) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mu_i$ 为总均值, 第 i 水平下均值 μ_i 与总均值的差 $a_i = \mu_i - \mu$

称为因子 A 的第 i 水平的主效应, 简称为 A_i 的主效应. 则有 $\sum_{i=1}^r a_i = 0, \mu_i = \mu + a_i$.

统计模型 (8.1.3) 可改写为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}, i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^r a_i = 0; \\ \text{诸 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立, 且都服从 } N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

假设 (8.1.1) 可改写为

$$H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0 \quad \leftrightarrow \quad H_1: a_1, a_2, \dots, a_r \text{ 不全为 } 0.$$

8.1.3 平方和分解

一 实验数据

在单因子方差分析中可将实验数据列成如下表格形式

因子水平	试验数据	和	平均
------	------	---	----

A_1	y_{11}	y_{12}	\cdots	y_{1m}	T_1	$\bar{y}_{1\cdot}$
A_2	y_{21}	y_{22}	\cdots	y_{2m}	T_2	$\bar{y}_{2\cdot}$
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots
A_r	y_{r1}	y_{r2}	\cdots	y_{rm}	T_r	$\bar{y}_{r\cdot}$
合计					T	\bar{y}

二 组内偏差与组间偏差

$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) + (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})$, 记 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \varepsilon_{i\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij}$, $y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$ 称为组内偏差, $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}$

称为组间偏差.

三 偏差平方和及其自由度

在统计学中, 把 k 个数据 y_1, \dots, y_k 分别对其均值 $\bar{y} = (y_1 + \dots + y_k) / k$ 的偏差平方和

$Q = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2$ 称为 k 个数据的偏差平方和, 简称平方和.

由于 $\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}) = 0$, 说明在 Q 中独立的偏差只有 $k-1$ 个, 称为该平方和的自由度, 记为 f ,

$f_Q = k-1$.

四 总平方和分解公式

各 y_{ij} 间总的差异大小可用总偏差平方和 S_T 表示为

$$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y})^2 f_T = n-1. \quad (8.1.3)$$

仅由随机误差引起的数据间差异可用组内偏差平方和, 也称误差偏差平方和, 记为 S_e ,

$$S_e = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 f_e = r(m-1) = n-r. \quad (8.1.4)$$

由效应不同引起的数据差异可用组间偏差平方和表示, 也称为因子 A 的偏差平方和, 记为

$$S_A, S_A = m \sum_{i=1}^r (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 f_A = r-1. \quad (8.1.5)$$

定理 8.1.1 在上述符号下, 总平方和 S_T 可分解为因子平方和 S_A 与误差平方和 S_e 之和, 其自由

度也有相应分解公式: $S_T = S_A + S_e, f_T = f_A + f_e. \quad (8.1.6)$

称为总平方和分解式.

8.1.4 检验方法

为了度量一组数据的离散程度，称 $MS = Q / f_Q$ 为均方和。

由均方和的概念，得到 $MS_A = S_A / f_A$ ， $MS_e = S_e / f_e$ ，用 $F = MS_A / MS_e$ 作为检验的统计量，为给出检验拒绝域，需要如下定理：

定理 8.1.2 在单因子方差分析模型及前述符号下，有

$$(1) \frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r), \text{ 从而 } E(S_e) = (n-r)\sigma^2$$

$$(2) E(S_A) = (r-1)\sigma^2 + m \sum_{i=1}^r a_i^2, \text{ 若 } H_0 \text{ 成立, 则有 } S_A / \sigma^2 \sim \chi^2(r-1)$$

(3) S_A 与 S_e 相互独立。

由定理 8.1.2 知 $F = MS_A / MS_e \sim F(f_A, f_e)$ ，从而可得检验的拒绝域为 $W = \{F \geq F_{1-\alpha}(f_A, f_e)\}$ 。

将上述结果列成表格，称为方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比
因子	S_A	$f_A = r - 1$	$MS_A = S_A / f_A$	$F = MS_A / MS_e$
误差	S_e	$f_e = n - r$	$MS_e = S_e / f_e$	
总和	S_T	$f_T = n - 1$		

若 $F > F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$ ，则可以认为因子 A 显著，即诸正态均值间有显著差异；

若 $F < F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$ ，则说明因子 A 不显著，即保留原假设 H_0 。

常用偏差平方和的计算公式：

$$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$$

$$S_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^r T_i^2 - \frac{T^2}{n}$$

$$S_e = S_T - S_A$$

例 8.1.2

8.1.5 参数估计

在检验结果为显著时，可进一步求出总均值 μ ，各主效应 a_i 和误差方差 σ^2 的估计。

一 点估计

总均值 μ 的估计为 $\hat{\mu} = \bar{y}$ ；

各水平均值 μ_i 的估计 $\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i\cdot}, i = 1, 2, \dots, r$ ；

主效应 a_i 的估计 $\hat{a}_i = \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}, i = 1, 2, \dots, r$

误差方差 σ^2 的估计 $\hat{\sigma}^2 = MS_e = S_e / f_e$

二 置信区间

由定理 8.1.2 知 $\bar{y}_{i\cdot} \sim N(\mu_i, \sigma^2/m), \frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_e)$, 且两者独立, 故 $\frac{\sqrt{m}(\bar{y}_{i\cdot} - \mu_i)}{\sqrt{S_e/f_e}} \sim t(f_e)$, 由此给出

A_i 的水平均值 μ_i 的 $1-\alpha$ 的置信区间是 $\bar{y}_{i\cdot} \pm \hat{\sigma} \cdot t_{1-\alpha/2}(f_e) / \sqrt{m}$.

例 8.1.3

单因子试验的数据分析可以知道如下三个结果

因子 A 是否显著

试验误差方差 σ^2 的估计

诸水平均值 μ_i 的点估计与区间估计（此项在因子 A 不显著时无需进行）

8.1.6 重复数不等情形

1. 数据

设因子 A 有 r 个水平 A_1, \dots, A_r ，并且第 r 个水平 A_i 下重复进行 m_i 次试验，可得如下数据：

因子水平	重复数	试验数据				和	平均
A_1	m_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m_1}	T_1	$\bar{y}_{1\cdot}$
A_2	m_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2m_2}	T_2	$\bar{y}_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots				\vdots	\vdots
A_r	m_r	y_{r1}	y_{r2}	...	y_{rm_r}	T_r	$\bar{y}_{r\cdot}$
合计	n					T	\bar{y}

2. 基本假定、平方和分解、方差分析和判断准则都和前面一样，只是因子 A 的平方和 S_A 的计

算公式略有不同：记 $n = \sum_{i=1}^r m_i$ ，则

$$S_A = \sum_{i=1}^r \frac{T_i^2}{m_i} - \frac{T^2}{n}$$

3. 数据结构式及参数估计式基本同前，需要注意下面两点：

(1) 总均值 $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r m_i \mu_i$ ；

(2) 主效应约束条件为 $\sum_{i=1}^r m_i a_i = 0$

类似于 8.1.8 有

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}, i=1,2,\dots,r, j=1,2,\dots,m; \\ \sum_{i=1}^r m_i a_i = 0; \\ \text{诸 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立, 且都服从 } N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

4 各平方和的计算

$$\text{记 } T_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}, \bar{y}_i = \frac{T_i}{m_i}, T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}, \bar{y} = \frac{T}{n}$$

$$\text{则 } S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} f_T = n-1,$$

$$S_A = \sum_{i=1}^r \frac{T_i^2}{m_i} - \frac{T^2}{n} f_A = r-1,$$

$$S_e = S_T - S_A f_e = n-r.$$

例 8.1.4 略

§2 双因素试验的方差分析

8.2.1 效应差的置信区间

如果方差分析的结果因子 A 显著，则认为因子 A 的 r 个水平的效应不全相同，但就指定的一对水平 A_i 和 A_j ，可通过求 $\mu_i - \mu_j$ 的区间估计来进行比较，方法如下：

由于 $\bar{y}_i - \bar{y}_j \sim N(\mu_i - \mu_j, (\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})\sigma^2)$ ，又由定理 8.1.2 知 $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(f_e)$ ，且两者独立，故

$\frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}) \frac{S_e}{f_e}}} \sim t(f_e)$, 由此给出 $\mu_i - \mu_j$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{y}_i - \bar{y}_j - \sqrt{(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})} \hat{\sigma} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e), \bar{y}_i - \bar{y}_j + \sqrt{(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})} \hat{\sigma} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_e)] \quad (8.2.1)$$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_e}{f_e}$ 是 σ^2 的无偏估计.

例 8.2.1 略

注 (8.2.1)给出的置信区间与第六章中两样本的 t 区间基本一致,区别在于这里 σ^2 的估计使用了全部样本而不仅仅是 A_i, A_j 两个水平下的观测值.

8.2.2 多重比较问题

对每一组 (i, j) (8.2.1)给出的区间置信水平都是 $1 - \alpha$, 但对于多个这样的区间, 要求其同时成立, 其联合置信水平就不再是 $1 - \alpha$. 例如, 设 E_1, \dots, E_k 是 k 个随机事件, 且有 $P(E_i) = 1 - \alpha, i = 1, \dots, k$, 则其同时发生的概率 $P(\bigcap_{i=1}^k E_i) = 1 - k\alpha$, 即它们同时发生的概率可能比 $1 - \alpha$ 小很多, 为了解决这个问题, 常采用多重比较法.

在方差分析中, 如果经过 检验拒绝原假设, 表明因子 A 是显著的, 即 r 个水平对应的水平均值不全相等, 此时, 我们还需要进一步确认哪些水平均值间确有差异, 哪些水平均值间无显著差异.

在 $r(r > 2)$ 个水平均值中同时比较任意两个水平均值间有无明显差异的问题称为多重比较, 多重比较即要以显著水平 α 同时检验如下 $r(r-1)/2$ 个假设:

$$H_0^{ij}: \mu_i = \mu_j, 1 \leq i < j \leq r. \quad (8.2.2)$$

关于假设 (8.2.2) 的拒绝域应有如下形式:

$$W = \bigcup_{1 \leq i < j \leq r} \{|y_i - y_j| \geq c_{ij}\}$$

诸临界值应在(8.2.2)成立时由 $P(W) = \alpha$ 确定. 下面介绍重复数相等和不等时临界值确定的方法.

8.2.3 重复数相等场合的 T 法

在重复数相等时, 由对称性可要求诸 c_{ij} 相等, 记为 c , 记 $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_e}{f_e}$, 则由条件可得

$\frac{\bar{y}_i - \mu_i}{\hat{\sigma} \sqrt{m}} \sim t(f_e)$, 于是当(8.2.2)成立时, $\mu_1 = \dots = \mu_r = \mu$, 故有

$$P(W)=P(\max_i \frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\hat{\sigma} \sqrt{m}} - \min_j \frac{(\bar{y}_j - \mu_j)}{\hat{\sigma} \sqrt{m}} \geq \frac{c}{\hat{\sigma}}), \text{ 这里 } q(r, f_e) = \max_i \frac{(\bar{y}_i - \mu_i)}{\hat{\sigma} \sqrt{m}} - \min_j \frac{(\bar{y}_j - \mu_j)}{\hat{\sigma} \sqrt{m}}$$

一般称为 t 化极差统计量, $q(r, f_e)$ 的分布可由随机模拟方法得到, $q(r, f_e)$ 的 $1-\alpha$ 分位数 $q_{1-\alpha}(r, f)$ 可查表.

重复数相同时的多重比较步骤如下: 对给定的显著性水平 α , 差多重比较的分位数 $q_{1-\alpha}(r, f)$ 表, 计算 $c = q_{1-\alpha}(r, f) \hat{\sigma} / \sqrt{m}$, 比较诸 $|y_i - y_j|$ 与 c 的大小, 若 $|y_i - y_j| \geq c$ 则认为水平 A_i, A_j , 有显著差异, 反之则认为 A_i, A_j , 间无明显差别. 这一方法称为 T 法.

例 8.2.2 略

8.2.4 重复数不等场合的 S 法

在重复数不等时, 仍沿用上面的记号, 有

$$\frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}} \hat{\sigma}} \sim t(f_e),$$

在假设 (8.2.2) 成立时, $\mu_1 = \dots = \mu_r = \mu$,

$$\text{于是有 } t_{ij} = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}} \hat{\sigma}} \sim t(f_e) \text{ 或 } F_{ij} = \frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2}{\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}} \hat{\sigma}^2} \sim F(1, f_e)$$

$$\text{要求 } c_{ij} = c \sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}$$

$$\text{于是有 } P(W) = P(\max_{1 \leq i < j \leq r} F_{ij} \geq (\frac{c}{\hat{\sigma}})^2)$$

$$\text{由 } P(W) = \alpha \text{ 推出 } (\frac{c}{\hat{\sigma}})^2 = (r-1)F_{1-\alpha}(r-1, f_e), \text{ 即 } c_{ij} = \sqrt{(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, f_e) (\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}) \hat{\sigma}^2}$$

例 8.2.3 略

方差齐性检验

在单因子试验中 r 个水平的指标可以用 r 个正态分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1, \dots, r$ 来表示. 在进行方差分析时要求 r 个方差相等, 称为方差齐性.

所谓方差齐性检验是对如下一对假设做出检验:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2 \text{ vs } H_1: \text{ 诸 } \sigma_i^2 \text{ 不全相等} \quad (8.3.1)$$

下面分别介绍几个常用的检验:

- (1) Hartley 检验, 仅适用于样本量相等的场合;
- (2) Bartlett 检验, 可用于样本量相等或不等的场合, 但每个样本量不得低于 5;
- (3) 修正的 Bartlett 检验, 在样本量较小或较大, 相等或不等场合均可使用.

8.3.1 Hartley 检验

在各水平下试验重复次数相等时, 即 $m_1 = \dots = m_r = m$, Hartley 检验提出检验方差相等的检验统计量 $H = \frac{\max\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_r^2\}}{\min\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_r^2\}}$, 在诸方差相等条件下, 可通过随机模拟法获得 H 分布的分位数, 该分布依赖于水平数 r 和样本方差的自由度 $f = m - 1$, 故可记该分布为 $H(r, f)$.

对给定的显著性水平 α , 检验 H_0 的拒绝域为 $W = \{H \geq H_{1-\alpha}(r, f)\}$, $H_{1-\alpha}(r, f)$ 为 H 的 $1-\alpha$ 分位数.

例 8.3.1 利用 Hartley 检验法

8.3.2 Bartlett 检验

在单因子方差分析中有 r 个样本, 设第 i 个样本方差为:

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_j} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{Q_i}{f_i}, i=1, 2, \dots, r,$$

误差均方和 $MS_e = \frac{1}{f_e} \sum_{i=1}^r Q_i$, $GMS_e = [(s_1^2)^{f_1} (s_2^2)^{f_2} \dots (s_r^2)^{f_r}]^{1/f_e}$, 则 $GMS_e \leq MS_e$, 故可得检验

(8.3.1) 的拒绝域为 $W = \{\ln(MS_e / GMS_e) > d\}$, 可以证明, 在大样本场合, $\ln(MS_e / GMS_e)$ 的某个函数近似服从自由度为 $r-1$ 的 χ^2 分布. 故取 $B = \frac{f_e}{C} \ln(MS_e / GMS_e) \sim \chi^2(r-1)$, $C = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_e} \right]$, 选

取 $B = \frac{1}{C} [f_e \ln MS_e - \sum_{i=1}^r f_i \ln s_i^2]$ 作为检验统计量, 可得显著性水平 α 下的检验拒绝域为

$$W = \{B \geq \chi_{1-\alpha}^2(r-1)\}.$$

例 8.3.2 应用 Bartlett 检验法.

8.3.3 修正的 Bartlett 检验

针对样本量低于 5 时不能使用 Bartlett 检验的缺点, 提出修正的 Bartlett 检验统计量

$$B' = \frac{f_2 BC}{f_1(A-BC)}, \text{ 其中 } B, C \text{ 如前所示, } f_1 = r-1, f_2 = \frac{r+1}{(C-1)^2}, A = \frac{f_2}{2-C+2/f_2}, \text{ 在原假设成立的条件下, } B' \text{ 的近似分布是 } F(f_1, f_2), \text{ 对给定的显著性水平 } \alpha, \text{ 检验 (8.3.1) 的拒绝域为}$$

$W = \{B' \geq F_{1-\alpha}(f_1, f_2)\}.$

§ 3 一元线性回归

1 变量间的两类关系

回归分析处理的是变量与变量间的关系，变量间常见的关系有确定性关系与相关关系。

变量间的相关关系不能用完全确切的函数形式表示，但在平均意义下有一定的定量关系表达式，寻找这种定量关系是回归分析的主要任务。

2 一元线性回归模型

一元回归分析是研究两个变量之间的相关关系的方法。如果两个变量之间的关系是线性的，这就是一元线性回归问题。一元线性回归问题主要分以下三个方面：

- (1) 通过对大量试验数据的分析、处理，得到两个变量之间的经验公式即一元线性回归方程。
- (2) 对经验公式的可信程度进行检验，判断经验公式是否可信。
- (3) 利用已建立的经验公式，进行预测和控制。

设 y 与 x 间有相关关系，称 x 为自变量， y 为因变量， $f(x)=E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty} yp(y|x)dy$ 是 y 关于 x 的理性回归函数。

进行回归分析首先是回归函数形式的选择，当只有一个变量时，可采用散点图的方法进行选择。

通过试验，可得到 x 、 y 的若干对实测数据，将这些数据在坐标系中描绘出来，所得到的图叫做散点图。

例 8.4.1 由专业知识知道，合金的强度与合金中碳的含量有关，为了生产出强度满足用户需要的合金，在冶炼时如何控制碳的含量，如果在冶炼时得知了碳的含量，如何预测合金的强度？

为了解决这类问题就需要知道两个变量间的关系。首先是收集数据记为 $(x_i, y_i), i=1, \dots, n$ ，将每对观察值 (x_i, y_i) 在直角坐标系中描出，得散点图，从图可看出，这些点虽不在一条直线上，但都在一条直线附近。于是，很自然会想到用一条直线来近似地表示 x 与 y 之间的关系，这条直线的方程就叫做 y 关于 x 的经验回归函数，简称回归方程。设这条直线的方程为 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ ，其图形称为回归直线，给定 x_0 后 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$ 称为回归值。

3 回归系数的最小二乘估计

在一次试验中，取得 n 对数据 (x_i, y_i) ，其中 y_i 是随机变量 y 对应于 x_i 的观察值。我们所要求的直线应该是使所有 $|y_i - \hat{y}_i|$ 之和最小的一条直线，其中 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ 。由于绝对值在处理上比较麻烦，

所以用平方和来代替，即要求 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 的值使 $Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 最小。利用多元函数求极值的方法求回归系数 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ，得

法求回归系数 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ，得

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \end{cases}$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $l_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)^2$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i)^2, \quad l_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$$

从而得到一元线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$. 其中 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 称为参数 β_0, β_1 的最小二乘估计, 上述方法叫做最小二乘估计法.

例 8.4.2

下面给出最小二乘估计的性质.

定理 8.4.1 在模型 (8.4.5) 下, 有

$$(1) \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, (\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}) \sigma^2), \hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{l_{xx}})$$

$$(2) \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\bar{x}}{l_{xx}} \sigma^2$$

$$(3) \text{对给定的 } x_0, y_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, (\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}) \sigma^2)$$

4 回归方程的显著性检验

一般的情况下, 给定 n 对数组, 总能建立一个方程, 但是这个方程不一定有意义. 若回归方程中 $\beta_1 = 0$, 则回归方程变成 $y = \beta_0$, 不再与 x 有关, 此时称回归方程不显著. 原假设与备择假设为:

$$H_0: \beta_1 = 0 \leftrightarrow H_1: \beta_1 \neq 0,$$

为了寻求检验的统计量. 我们把总体平方和分解, 令 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ 称为回归值.

$$S_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

令 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = S_e$, 称为残差平方和. $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = S_R$ 称为回归平方和. 则

$$S_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = S_e + S_R.$$

再来分析它们的分布, $\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 若能求出 $\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma^2}$ 的自由度, 则

$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sigma^2}$ 的自由度也就知道了. 为了求 $\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma^2}$ 的自由度, 只要求出 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 的数学

期望就可.

由于

$$\begin{aligned} E(S_R) &= E\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right) - E(\hat{\beta}_1^2 l_{xx}) \\ &= (n-1)\sigma^2 + \beta_1^2 l_{xx} - \sigma^2 - \beta_1^2 l_{xx} \\ &= (n-2)\sigma^2 \end{aligned}$$

可知 $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$

因此,

$$\frac{S_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(1),$$

又记为 $\frac{S_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \frac{S_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(1), \frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$

在 H_0 成立的条件下, 检验统计量 $F = \frac{S_R}{S_e/(n-2)} \sim F(1, n-2)$

拒绝域为

$$\{F \geq F_{1-\alpha}(1, n-2)\}$$

5 估计与预测

在求出随机变量 y 与变量 x 的一元线性回归方程, 并通过相关性检验后, 便能用回归方程进行估计和预测.

对给定的 $x=x_0$, 寻求均值 $E(y_0)=\beta_0+\beta_1x_0$ 的点估计和区间估计, 这是估计问题.

对给定的 $x=x_0$, 利用区间估计的方法求出 y_0 一个置信区间, 使 y_0 落在这个区间内的概率为 $1-\alpha$, 这是预测问题.

一 $E(y_0)$ 的估计

对给定的 $x=x_0$, 其对应的 y_0 是一个随机变量, 均值为 $E(y_0)=\beta_0+\beta_1x_0$, 用 $\hat{E}(y_0)=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_0$ 作为 y_0 的估计值, 记为 \hat{y}_0 , 则 \hat{y}_0 是 $E(y_0)$ 的无偏估计.

又由于 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, (\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}})\sigma^2)$, $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, 且与 \hat{y}_0 相互独立, 故

$$\frac{\hat{y}_0 - E(y_0)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}} \sim t(n-2), \quad \text{得到 } E(y_0) \text{ 的 } 1-\alpha \text{ 置信区间为}$$

$$[\hat{y}_0 - \delta_0, \hat{y}_0 + \delta_0], \delta_0 = t_{1-\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}$$

二 y_0 的预测区间

上面讨论了 $x=x_0$ 时对应的应变量的均值 $E(y_0)$ 的区间估计, 下面讨论 y_0 的预测区间.

记 $y_0 = E(y_0) + \varepsilon$, 假定 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, 设 $[\hat{y}_0 - \delta, \hat{y}_0 + \delta]$, 作为 y_0 的取值范围. 下面来确定 δ 的值. 由于 y_0 与 \hat{y}_0 独立, $y_0 - \hat{y}_0 \sim N(0, [1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}] \sigma^2)$, $\frac{y_0 - \hat{y}_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}} \sim t(n-2)$, 从而得到

$$\delta = \delta(x_0) = t_{1-\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}.$$

例 8.4.4

例 8.4.5

复习思考题、作业题:

P261 第九章习题

下次课预习要点:

第九章习题课

教
学
后
记

回归分析和方差分析是数理统计学中应用很广泛的分支, 在实际数据分析工作中最常用的统计工具. 在国内本科阶段有些数理统计教材先叙述方差分析部分后叙述回归分析部分, 有些是顺序相反. 老师在综合实践教学中发现学生在数据分析时普遍地把线性回归和方差分析截然分为毫无关系的两个方面的现象. 以线性模型的观点来说的话这两个方面是同属一类. 因此, 教师在授课时应跟学生强调二者之间的内在联系. 从而使学生正确而灵活地应用这两种统计分析方法来进行实际数据分析. 此外, 在学有余力的前提下, 鼓励学生学习统计分析软件进行具体数据的分析处理.

授课时间	第 17 周	课 次	第 17 次
章 节 名 称	第九章习题课		
授 课 方 式	理论课 ()、实践课 ()、习题课 (<input checked="" type="checkbox"/>)、其它 ()	教学时数	3
教 学 的 要 求	1、教学目标: 强化巩固第九章 方差分析与回归分析内容。 2、课程思政育人目标 重温方差分析及平方和分解, 巩固科学分析逻辑, 培育试验数据探究的严谨态度; 回顾回归分析与相关性检验, 强化理性建模意识, 树立数据应用的责任担当。		
教 学 方 法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学		
教 学 重 点	重点: 方差分析与回归分析各理论知识的框架结构及内在联系。		

难点

难点：理论联系实际，建立数据模型并分析求解。

应用统计硕士历年真题试卷汇编 7

题型有：1. 单选选择题 3. 简答题

单选选择题

1. 关于方差分析，以下说法哪一项更合理？() [中山大学 2012 研]

- A. 方差分析的目的在于分析各组总体方差是否有显著差异
- B. 方差分析的目的在于分析各组总体标准差是否有显著差异
- C. 方差分析的目的在于分析各组总体均值是否有显著差异
- D. 方差分析的目的在于分析各组总体中位数是否有显著差异

正确答案：C

解析：表面上看，方差分析是检验多个总体均值是否相等的统计方法，但本质上它所研究的是变量之间的关系。方差分析就是通过检验各总体的均值是否相等来判断分类型自变量对数值型因变量是否有显著影响。知识模块：方差分析

2. 在方差分析中，所提出的原假设是 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ ，备择假设是()。 [江苏大学 2012 研]

- A. $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_k$
- B. $H_1: \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_k$
- C. $H_1: \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$
- D. $H_1: \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 不全相等

正确答案：D

解析：在方差分析中，原假设所描述的是在按照自变量的取值分成的类中，因变量的均值相等。因此，检验因素的 k 个水平(总体)的均值是否相等，需要提出如下形式的假设： $H_1: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ 自变量对因变量没有显著影响 $H_1: \mu_1 (i=1, 2, \dots, k)$ 不全相等 自变量对因变量有显著影响 知识模块：方差分析

3. 为研究食品的包装和销售地区对其销售量是否有影响，在三个不同地区中用三种不同包装方法进行销售，根据获得的销售量数据计算得到下面的方差分析表。表中“A”单元格和“B”单元格内的结果是()。 [安徽财经大学 2012 研]

- A. 0.073 和 3.127
- B. 0.023 和 43.005
- C. 13.752 和 0.320
- D. 43.005 和 0.320

正确答案：A

解析：在无交互作用的双因素方差分析中， $A=FR \approx 0.073$ ， $B=FC \approx 3.127$ 。知识模块：方差分析

4. 在方差分析中，数据的误差是用平方和来表示的。其中组间平方和反映的是()。 [安徽

财经大学 2012 研]

- A. 一个样本观测值之间误差的大小
- B. 全部观测值误差的大小
- C. 各个样本均值之间误差的大小
- D. 各个样本方差之间误差的大小

正确答案：C

解析：组间平方和，记为 SSA，它是各组平均值 ($i=1, 2, \dots, k$) 与总平均值的误差平方和，反映各样本均值之间的差异程度，因此又称为因素平方和。 知识模块：方差分析

5. 关于单因素方差分析中的 F 检验 ()。[中央财经大学 2011 研]
- A. 拒绝域在 F 分布曲线的右侧
 - B. F 统计量的样本观测值可能为负值
 - C. 拒绝域在 F 分布曲线的左侧和右侧
 - D. 以上表述都不对

正确答案：A

解析：在单因素方差分析中，若 $F > F_{\alpha}$ 则拒绝原假设 H_0 ；若 $F < F_{\alpha}$ ，则不拒绝原假设 H_0 。 知识模块：方差分析

6. 关于方差分析，下列说法正确的是 ()。[中山大学 2011 研]
- A. 方差分析的目的是分析各组总体方差是否相同
 - B. 方差分析的组间均方仅仅衡量了随机误差的变异大小
 - C. 各组数据呈严重偏态时，也可以作方差分析
 - D. 方差分析的目的是分析各组总体的均值是否相同

正确答案：D

解析：方差分析就是通过检验各总体的均值是否相等来判断分类型自变量对数值型因变量是否有显著影响。如果分析数据来自相同总体，那么在组间误差中只包含随机误差，而没有系统误差。反之，如果分析数据来自不同总体，在组间误差中除了包含随机误差外，还会包含系统误差。方差分析中有三个基本假定：①每个总体都应服从正态分布；②各个总体的方差 σ^2 必须相同；③观测值是独立的。 知识模块：方差分析

7. 方差分析是通过多个总体均值差异的比较来 ()。[江苏大学 2011 研]
- A. 判断各总体是否存在方差
 - B. 检验各样本数据是否来自正态总体
 - C. 比较各总体的方差是否相等
 - D. 研究分类自变量对数值因变量的影响是否显著

正确答案：D

解析：方差分析就是通过检验各总体的均值是否相等来判断分类型自变量对数值型因变量是否有显著影响。 知识模块：方差分析

8. 投资某项目的收益率 R 是随机变量，其分布如表 2—44 所示；某位投资者在该项目上投资

1000 元, 他的预期收入和收入的方差分别为_____元和_____ (元)²。() [中山大学 2011 研]

- A. 50, 10
- B. 1050, 10
- C. 1050, 80
- D. 50, 80

正确答案: D

解析: 预期收入 = $1000 \times (4\% \times 0.3 + 5\% \times 0.5 + 6\% \times 0.1 + 7\% \times 0.1) = 50$ (元) 预期收入的方差 = $(1000 \times 4\% - 50)^2 \times 0.3 + (1000 \times 5\% - 50)^2 \times 0.5 + (1000 \times 6\% - 50)^2 \times 0.1 + (1000 \times 7\% - 50)^2 \times 0.1 = 80$ (元²) 知识模块: 方差分析

9. 在多元回归分析中, 当 F 检验表明线性关系显著时, 而部分回归系数的 t 检验却不显著, 这意味着()。 [浙江工商大学 2012 研]

- A. 不显著的回归系数所对应的自变量对因变量的影响不显著
- B. 所有的自变量对因变量的影响都不显著
- C. 模型中可能存在多重共线性
- D. 整个回归模型的线性关系不显著

正确答案: C

解析: 如果出现下列情况, 暗示存在多重共线性: ①模型中各对自变量之间显著相关; ②当模型的线性关系检验 (F 检验) 显著时, 几乎所有回归系数 β_i 的 t 检验却不显著; ③回归系数的正负号与预期的相反。 知识模块: 多元线性回归

10. 在多元线性回归分析中, 检验是用来检验()。 [中央财经大学 2011 研、浙江工商大学 2011 研]

- A. 总体线性关系的显著性
- B. 各回归系数的显著性
- C. 样本线性关系的显著性
- D. $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

正确答案: B

解析: 回归系数的检验又称为 t 检验。线性关系的检验又称为 F 检验, 是检验因变量 y 与 k 个自变量之间的关系是否显著, 其原假设 H_0 为 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ 。 知识模块: 多元线性回归

11. 在多元线性回归分析中, 如果 F 检验表明线性关系显著, 则意味着()。 [安徽财经大学 2012 研、浙江工商大学 2011 研]

- A. 在多个自变量中至少有一个自变量与因变量之间的线性关系显著
- B. 所有的自变量与因变量之间的线性关系都显著
- C. 在多个自变量中至少有一个自变量与因变量之间的线性关系不显著
- D. 所有的自变量与因变量之间的线性关系都不显著

正确答案: A

解析: 线性关系检验 (F 检验) 表明回归方程显著时, 只是说, 因变量至少同自变量中的一个自变量的线性关系是显著的, 并非意味着同每个自变量之间的关系都显著。 知识模块: 多元线性回归

12. 以下统计方法中,哪一种不能用来研究变量之间的关系?() [中山大学 2011 研]

- A. 样本比例估计
- B. 列联表分析
- C. 一元线性回归
- D. 多元线性回归

正确答案: A

解析: 列联分析也称为独立性检验,是分析两个变量之间是否有关联;回归分析则侧重于考察变量之间的数量伴随关系,并通过一定的数学表达式将这种关系描述出来,进而确定一个或几个变量(自变量)的变化对另一个特定变量(因变量)的影响程度;样本比例估计是用样本比例 p 估计总体比例, π , 不能用来研究变量之间的关系。 知识模块: 多元线性回归

简答题

13. 什么是方差分析?它与总体均值的 t 检验或 Z 检验有什么不同?其优势是什么? [西安交通大学 2008 研]

正确答案: 方差分析就是通过检验各总体的均值是否相等来判断分类型自变量对数值型因变量是否有显著影响。 总体均值的 t 检验或 Z 检验,一次只能研究两个样本,如果要检验多个总体的均值是否相等,那么作这样的两两比较十分烦琐。而且,每次检验两个的做法共需进行 C_n^2 次不同的检验,如果 $\alpha = 0.05$,每次检验犯第 I 类错误的概率都是 0.05,作多次检验会使犯第 I 类错误的概率相应增加,而方差分析方法则是同时考虑所有的样本,因此排除了错误累积的概率,从而避免拒绝一个真实的原假设。 方差分析不仅可以提高检验的效率,同时由于它是将所有的样本信息结合在一起,也增加了分析的可靠性。 涉及知识点: 方差分析

14. 单因素方差分析的实质是什么?并说明单因素方差分析的步骤。 [中南财经政法大学 2003 研]

正确答案: 单因素方差分析的实质是研究一个分类型自变量对一个数值型因变量的影响。 单因素方差分析的步骤: (1) 按要求检验的 k 个水平的均值是否相等,提出原假设和备择假设。(2) 构造检验统计量,计算各样本均值,样本总均值,误差平方和. SST、SSE 和 SSA。(3) 计算样本统计量 $F =$ 。(4) 统计决策。比较统计量 D 和 $F_{\alpha}(k-1, n-k)$ 的值。若 $F > F_{\alpha}$, 拒绝原假设;反之,不能拒绝原假设。 涉及知识点: 方差分析

15. 多元回归分析中为什么需要使用修正的判定系数(可决系数)来比较方程的拟合效果?是如何计算的? [中央财经大学 2009 研]

正确答案: 在多元线性回归分析中,常用修正的判定系数,而不用多重判定系数来衡量估计模型对样本观测值的拟合优度。这是由于多重判定系数 R^2 随着样本解释变量个数的增加, R^2 的值越来越高(即 R^2 是解释变量个数的增函数)。也就是说,在样本容量不变的情况,在模型中增加新的解释变量不会改变总离差平方和,但可能增加回归平方和,减少残差平方和,从而可能改变模型的解释功能。因此在多元线性回归模型之间比较拟和优度时, R^2 不是一个合适的指标,需加以调整。而修正判定系数 R^2 ,其值不会随着解释变量个数 k 的增加而增加,因此在用于估计多元回归模型方面要

优于多重判定系数 R^2 。修正判定系数 R^2 的计算公式为 $R_a^2 = 1 - (1 - R^2)$ 。涉及知识点：多元线性回归

16. 说明回归模型的假设以及当这些假设不成立时的应对方法。[中国人民大学 2006 研]

正确答案：(1) 多元回归模型的基本假定有：①自变量 x_1, x_2, \dots, x_k 是非随机的、固定的，且相互之间互不相关(无多重共线性)；②误差项 ε 是一个期望值为 0 的随机变量，即 $E(\varepsilon) = 0$ ；③对于自变量 x_1, x_2, \dots, x_k 的所有值， ε 的方差 σ^2 都相同，且不存在序列相关，即；④误差项 ε 是一个服从正态分布的随机变量，且相互独立，即 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。(2) 若模型中存在多重共线性时，即 x_1, x_2, \dots, x_k 有成对自变量显著相关，解决的方法有：第一，将一个或多个相关的自变量从模型中剔除，使保留的自变量尽可能不相关。第二，如果要在模型中保留所有的自变量，那就应该：避免根据 t 统计量对单个参数 β_j 进行检验；对因变量 Y 值的推断(估计或预测)限定在自变量样本值的范围内。若模型中存在序列相关时，即 $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0 (i \neq j)$ ，解决的方法有：如果误差项 ε 不是相互独立的，则说明回归模型存在序列相关性，这时首先要查明序列相关产生的原因。如果是回归模型选用不当，则应改用适当的回归模型；如果是缺少重要的自变量，则应增加自变量；如果以上两种方法都不能消除序列相关性，则需采用迭代法、差分法等方法处理。若模型中存在异方差性时，即 $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq \sigma^2 (i = j)$ ，解决的方法有：当存在异方差性时，普通最小二乘估计不再具有最小方差线性估计的性质，而加权最小二乘估计则可以改进估计的性质。加权最小二乘估计对误差项方差小的项加一个大的权数，对误差项方差大的项加一个小的权数，因此加强了小方差性的地位，使离差平方和中各项的作用相同。涉及知识点：多元线性回归

17. 在多元线性回归中，为什么我们对整个回归方程进行检验后，还要对每个回归系数来进行检验呢？[中南财经政法大学 2005 研]

正确答案：在多元线性回归中，线性关系检验主要是检验因变量同多个自变量的线性关系是否显著，在 k 个自变量中，只要有一个自变量与因变量的线性关系显著， F 检验就能通过，但这并不意味着每个自变量与因变量的关系都显著。回归系数检验则是对每个回归系数分别进行单独的检验，它主要用于检验每个自变量对因变量的影响是否都显著。如果某个自变量没有通过检验，就意味着这个自变量对因变量的影响不显著，也许就没有必要将这个自变量放进回归模型中了。涉及知识点：多元线性回归

18. 研究人员估计了两个回归模型，相关结果如下。[中央财经大学 2010 研] (1) 根据表中的数据比较两个模型的拟合效果，并对 t 检验的结果进行分析。(2) 在以上两个模型中，你会选择哪一个模型进行预测？为什么？(3) 写出你选定的回归方程，并分析回归系数的含义。(4) 一名男性职工上月收入为 3000 元，预测其支出。

正确答案：(1) 根据已知数据，模型 1 的调整判定系数为 0.953，模型 2 的调整判定系数为 0.954，二者近似相等，所以从判定系数角度看两个模型的拟合效果是一样的。由于表中关于收入的 t 统计量的 p 值都为 0.000，所以收入对于支出的影响是显著的；而在模型 1 中，关于性别的 t 统计量的 p 值为 0.466，大于一般情况下给定的显著性水平，故该变量对支出的影响不显著。(2) 由(1)中的分析，模型 1 中的“性别”变量没有通过 t 检验，并且在模型 2 的基础上去掉该变量未使估计标准误差明显的减少，因此可以判定，应选择模型 2 进行预测。(3) 设 y 表示支出， x 表示收入，则选定的回归方程为： $y = 639.961 + 0.621x$ 回归系数 = 0.621 表示，收入每增加 1 个

单位,支出平均增加 0.621 个单位。(4)当 $x = 3000$ 时, $= 639.961 + 0.621 \times 3000 = 2502.961$ 。即当该名男性职工上月收入为 3000 元时,其支出为 2503 元。涉及知识点:多元线性回归



第9章方差分析与回归分析习题解答.pdf

复习思考题、作业题:
整理消化第九章习题课内容。

下次课预习要点:
期末总复习

教 学
后 记

方差分析是推断统计学的重要内容,也是统计学教学过程中的难点问题之一。为了更好地理解方差分析的精髓,整个教学过程采用启发式教学,围绕回答“做什么”“为什么做”“怎么做”三个问题,从寻找因果关系的角度讲解方差分析。具体过程:先讲解方差分析的概念,解释它的基本思想;其次,阐述方差分析的计算步骤;最后,为加强统计思想的培养及统计方法的掌握,提高教学效果,重点列举两个案例分别探究方差分析的具体应用过程。

为进一步加深对方差分析的认识和应用,明晰其中的分析过程,下面通过两个案例展示方差分析的具体应用。

案例 1 根据某高校经济学、财务管理、金融工程、国际商务和中韩财管等 5 个专业的学生统计学考试分数,探讨专业对于统计学成绩有无显著影响。

用相应公式计算出其各专业统计学分数均值和方差,如表 1 所示^[7]。根据以上方差分析的基本步骤,分析过程如下。

首先,根据原始数据和表 1,计算总变动 $SS_T = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2 = 18\,638.80$ 。其次,计算组间平方和、组内平方和分别为 $SS_B = \sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = 3\,365.82$, $SS_C = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = 15\,272.98$ 。进而可得组间均方和、组内均方和分别为 $MS_B = SS_B/df_B = 3\,365.82/4 = 841.46$, $MS_C = SS_C/df_C = 15\,272.98/115 = 132.81$ 。最后,假设检验(F-检验)。在此基础上可得统计量 $F = MS_B/MS_C = 841.46/132.81 = 6.34$ 。在置信水平 $\alpha = 0.05$ 下,查表可得 $F_{0.05}(4, 15) = 2.45$ 。

依据假设检验,原假设 H_0 :专业对于统计学成绩没有显著影响;备择假设 H_1 :专业对于统计学成绩有显著影响。由统计量 $F = 6.34$,又 $F_{0.05}(4, 15) = 2.45$, $F > F_{0.05}(4, 15)$,故拒绝原假设 H_0 ,表明专业对于统计学成绩有显著性影响,这与实际是相符的,究其原因可能与统计学的学习需要扎实的数学基础有关。

表 1 5 个专业统计学分数的描述统计

专业	观测数	求和	平均值	方差
经济学	24	1 819	75.79	121.04
金融工程	20	1 478	73.90	225.36
财务管理	36	2 820	78.33	114.80
国际商务	22	1 709	77.68	83.27
中韩财管	18	1 126	62.56	143.56

案例2 K.pearson收集了大量有关父亲身高和儿子身高的数据(表2),试求儿子身高 y 关于父亲身高 x 的回归方程^[8-9]。

表2 父亲身高和儿子身高列表(单位:cm)

父亲身高 x	152.4	157.48	162.56	165.1	167.64	170.18	172.72	177.8	182.88	187.96
	127	152.4	165.1	139.7	165.1	167.64	149.86	121.92	167.64	152.4
儿子身高 y	161.54	165.61	167.64	166.37	169.93	170.43	171.2	173.48	178.05	177.8
	196.9	178.82	170.18	179.07	182.37	173.23	192.53	255.04	188.47	203.2

解 在求解回归方程之前,首先需要检验父亲的身高是否对儿子身高有显著影响,这正是方差分析要解决的问题。然而,不同于上一个例子,这个例子的自变量是数值型变量。按照方差分析步骤,首先计算总变动: $SS_T = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y})^2 = 1164098.32$ 。其次,计算组间平方和、组内平方和分别为 $SS_B = \sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = 1152766.92$, $SS_e = \sum \sum (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)^2 = 11331.40$ 。进而可得组间均方和、组内均方和分别为 $MS_B = SS_B/df_B = 1152766.92/9 = 128085.21$, $MS_e = SS_e/df_e = 11331.40/20 = 566.57$ 。最后,构造 F -检验统计量 $F = MS_B/MS_e = 128085.21/566.57 = 226.07$ 。在置信水平 $\alpha = 0.05$ 下,查表可得 $F_{0.05}(9,20) = 2.39$ 。显然 $F > F_{0.05}(9,20)$,表明父亲身高与儿子身高存在因果关系。

方差分析仅仅表明父亲的身高对儿子的身高有较强的因果关系,但不能给出具体的数量关系式。为了进一步量化这种因果关系,需要利用回归分析计算相应的函数关系。由于在每个观测点处有多个观测值,因此选取这些观测值的平均值 y_i 作为对应观测点处的回归值,通过取平均值的手段还可以在一定程度上过滤数据中的噪声。

假设这种函数关系是线性函数,即 $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$ 。由普通最小二乘估计式则有:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = 35.98, b = \bar{y} - a\bar{x} = \sum y_i / N - a \sum x_i / N = 1.17。$$

这里, x_i, y_i 为样本观测值, \bar{x} 为样本观测值的均值, \bar{y} 为所有样本观测值的均值。最后,可得回归方程为 $f(x) = 35.98x + 1.17$ 。

授课时间	第 18 周	课 次	第 18 次
章 节 名 称	期末总复习		
授 课 方 式	理论课 ()、实践课 ()、习题课 (√)、其它 ()	教学时数	3
教 学 的 目 的 要 求	1、教学目标 (1)梳理 1-9 章知识要点 (2)模拟期末考试训练 2、课程思政育人目标 梳理 1-9 章知识要点,构建系统知识体系,培育归纳整合的严谨思维;开展模拟考试训练,强化规范解题意识,树立诚信应考的责任担当。		
教 学 方 法	练习法、讲解法		
教 学 重 点 难 点	重点: 详见文件“概率论与数理统计重点” 难点: 理解这些重点		

教学步骤及内容:



概率论与数理统计重点.pdf



《概率论与数理统计》期末考试题(附答案).pdf

复习思考题、作业题:

做好期末复习, 按时顺利参加期末考试。

下次课预习要点:

本次课为该课程最后一次课, 学生复习期间有疑问可以通过网络提问, 老师在线答疑。

教 学
后 记

通过一个学期的理论学习, 学生对概率论与数理统计课程的理论知识已有所掌握, 必然会产生“学这个课又有什么用”的疑问, 这时教师可以提供一些应用型题目来给学生尝试解答, 让学生感受该课程的魅力所在。例如:

§ 2.1 在中奖问题中的应用

集市上有一个人在设摊“摸彩”, 只见他手拿一个黑色的袋子, 内装大小、形状、质量完全相同的白球 20 只, 且每一个球上都写有号码 (1-20 号) 和 1 只红球, 规定: 每次只摸一只球。摸前交 1 元钱且在 1-20 内写一个号码, 摸到红球奖 5 元, 摸到号码数与你写的号码相同奖 10 元。

(1) 你认为该游戏对“摸彩”者有利吗? 说明你的理由。

(2) 若一个“摸彩”者多次摸奖后, 他平均每次将获利或损失多少元?

分析: (1) 分别求出“摸彩”者获奖 5 元和获奖 10 元的概率, 即可说明;

(2) 求出理论上的收益与损失, 再比较即可解答。

解答: (1) 获奖 5 元的可能性和获奖 10 元的可能性同样大,

$P(\text{摸到红球}) = P(\text{摸到同号球}) = \frac{1}{20}$, 概率相等, 所以获奖 5 元的可能性和获奖 10 元的可能性同样大;

(2) 每次的平均收益为

$$\frac{1}{20} (5+10) - 1 = -0.25 < 0, \text{ 故每次平均损失 } 0.25 \text{ 元.}$$

§ 2.2 在经济管理决策中的应用

某人有一笔资金, 可投入三个项目: 房产 x 、地产 y 和商业 z , 其收益和市场状态有关, 若把未来市场划分为好、中、差三个等级, 其发生的概率分别为

$p_1 = 0.2, p_2 = 0.7, p_3 = 0.1$, 根据市场调研的情况可知不同等级状态下各种投资的年收益(万元), 见下表:

各种投资年收益分布表

	好 $p_1 = 0.2$	中 $p_2 = 0.7$	差 $p_3 = 0.1$
房产	11	3	-3
地产	6	4	-1
商业	10	2	-2

请问：该投资者如何投资好？

解 我们先考察数学期望，可知

$$E(x) = 11 \times 0.2 + 3 \times 0.7 + (-3) \times 0.1 = 4.0;$$

$$E(y) = 6 \times 0.2 + 4 \times 0.7 + (-1) \times 0.1 = 3.9;$$

$$E(z) = 10 \times 0.2 + 2 \times 0.7 + (-2) \times 0.1 = 3.2;$$

根据数学期望可知，投资房产的平均收益最大，可能选择房产，但投资也要考虑风险，我们再来考虑它们的方差：

$$D(x) = (11 - 4)^2 \times 0.2 + (3 - 4)^2 \times 0.7 + (-3 - 4)^2 \times 0.1 = 15.4;$$

$$D(y) = (6 - 3.9)^2 \times 0.2 + (4 - 3.9)^2 \times 0.7 + (-1 - 3.9)^2 \times 0.1 = 3.29;$$

$$D(z) = (10 - 3.2)^2 \times 0.2 + (2 - 3.2)^2 \times 0.7 + (-2 - 3.2)^2 \times 0.1 = 12.96$$

因为方差愈大，则收益的波动大，从而风险也大，所以从方差看，投资房产的风险比投资地产的风险大得多，若收益与风险综合权衡，该投资者还是应该选择投资地产为好，虽然平均收益少 0.1 万元，但风险要小一半以上。

§ 2.3 在经济损失估计中的应用

随着经济建设的高速发展火灾、车祸等各种意外事故所造成的经济损失成明显上升的趋势，从而买保险成为各单位及个人分担经济损失的一种有效方法。利用统计知识可以估计各种意外事故发生的可能性以及发生后导致的经济损失大小。下面以参数估计为例来说明它在这一方面的应用。

已知某仓库货物在储藏过程中，仓库货物因火灾而损失的金额服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，今随机抽取 8 次货损资料，得到如下仓库货物损失金额表。

仓库货物损失金额表

货物损失金额 (元)	1000	2000	3000	5000
次数	2	1	4	1

解 利用矩估计法或最大似然估计法可知： μ ， σ^2 的矩估计量分别为：

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

从而根据表2 中的数据可计算出:

$$\mu = \frac{1}{8}(1000 \times 2 + 2000 \times 1 + 3000 \times 4 + 5000 \times 1) = 2625$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{8}[(1000 - 2625)^2 \times 2 + (2000 - 2625)^2 + (3000 - 2625)^2 \times 4 + (5000 - 2625)^2]$$

$$= 1101562.5 ;$$

$$\sigma = 1049.55$$

从而得到仓库货物损失的平均估计值为2625元, 标准差的估计值为1049.55 元。

§ 2.4 在求解经济最大利润问题中的应用

如何获得最大利润是商界永远追求的目标, 随机变量函数期望的应用为此问题的解决提供了新的思路。

某公司经销某种原料, 根据历史资料: 这种原料的市场需求量 x (单位: 吨) 服从 $(300, 500)$ 上的均匀分布, 每售出1 吨该原料, 公司可获利1.5 千元; 若积压1 吨, 则公司损失0.5 千元, 问公司应该组织多少货源, 可使期望的利润最大?

分析: 此问题的解决先是建立利润与需求量的函数, 然后求利润的期望, 从而得到利润关于货源的函数, 最后利用求极值的方法得到答案。

解答: 设公司组织该货源 a 吨, 则显然应该有 $300 \leq a \leq 500$, 又记 y 为在 a 吨货源

的条件下的利润, 则利润为需求量的函数, 即 $y = g(x)$, 由题设条件知:

当 $x \geq a$ 时, 则此 a 吨货源全部售出, 共获利 $1.5a$;

当 $x < a$ 时, 则售出 x 吨 (获利 $1.5x$) 且还有 $a - x$ 吨积压 (获利 $-0.5(a - x)$),

所以共获利 $1.5x - 0.5(a - x)$, 由此得

$$Y = g(x) = \begin{cases} 1.5a & X \geq a \\ 2X - 0.5a & X < a \end{cases}$$

从而得

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_x(x) dx = \int_{300}^{500} g(x) \frac{1}{200} dx \\ &= \int_{300}^a (2x - 0.5a) \frac{1}{200} dx + \int_a^{500} 1.5a \frac{1}{200} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{200}(-a^2 + 900 - 300^2)$$

上述计算表明 $E(y)$ 是 a 的二次函数, 用通常求极值的方法可以求得, $a = 450$ 吨时, 能够使得期望的利润达到最大。

§ 2.5 在保险问题中的应用

某保险公司有 2500 个人参加保险, 每人每年付 1200 元保险费, 在一年内一个人死亡的概率为 0.002, 死亡时某家属可向保险公司领得 20 万元。

问: (1) 保险公司亏本的概率多大?

(2) 保险公司一年的利润不少于 100 万元, 200 万元的概率各位多大?

解: (1) 设 X 为一年内死亡的人数, 则 $X \sim B(2500, 0.002)$, $np = 5$, $npq = 4.99$

$$P(\text{亏本}) = P(20X > 300) = P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{15 - 5}{\sqrt{4.99}}\right) = 1 - \Phi(4.48) = 1 - 0.99993 = 0.00007$$

保险公司亏本的概率为 0.00007, 几乎为零。

$$(2) \quad P(\text{利润} \geq 100) = P(300 - 20X \geq 100)$$

$$= P(X \leq 10) \approx \Phi\left(\frac{10 - 5}{\sqrt{4.99}}\right) = 0.98$$

$$P(\text{利润} \geq 200) = P(300 - 20X \geq 200)$$

$$= P(X \leq 5) \approx \Phi\left(\frac{5 - 5}{\sqrt{4.99}}\right) = 0.5$$

以上结果说明保险公司几乎不可能亏本, 不过要记住, 关键之处是对死亡率估计必须正确, 如果所估计死亡率比实际低, 甚至低得多, 那么情况就会不同。

§ 2.6, 在疾病诊断中的应用

据调查某地居民肝癌发病率为 0.0004, 现用甲胎蛋白法来检查肝癌: 若呈阳性表明患病, 若呈阴性表明未患病。假阳性 (即未患病结果却呈阳性) 和假阴性 (即患病结果却称阴性) 的概率分别为 0.05 和 0.01。某人经检验结果呈阳性, 他确实患肝癌的概率有多大?

令 $A =$ “被检验者患肝癌”, $B =$ “检验结果呈阳性”

$$\text{则 } P(A) = 0.0004 \quad P(\bar{A}) = 0.9996 \quad P(B|\bar{A}) = 0.005 \quad P(\bar{B}|A) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.004 \times (1 - 0.01)}{0.004 \times (1 - 0.01) - 0.9996 \times 0.05} \\ &\approx 0.00786 \end{aligned}$$

由此可见，虽然检测结果为阳性，但实际患病的可能性非常之小，这不得让我们大吃一惊。但其实仔细一想，也是能够理解的。在上述计算中，假阳性的概率并不大，即检验结果是错误的情况并不多，但肝癌的发病率更小，即绝大多数情况下不会患肝癌，这就使得检验结果是错误的部分 $P(A)P(B|A)$ 相对很大，这就造成了 $P(A|B)$ 很小。但这并不能说这种检测方法没有用，像我们在医院检查的时候都会有所谓的“初查”，包括体温，心率，血压等，然后在这之后再对有患病可能性的人进行甲胎蛋白法检查，其准确率就会提高很多。

§ 2.7 在质量检测方面的应用

例 6、 某糖果生产厂用自动包装机包装糖果，每包的标准重量为 100 kg ，每天开工后需要检验一次包装机是否工作正常，某天开工后测出的 9 包糖果的重量如下(单位: kg)：

102.1 , 99.5 , 100.5 , 98.3 ,
99.3 , 98.7 , 100.5 , 101.2 , 99.7 ,

问该包装机工作是否正常？（ $\alpha = 0.5$ ，已知糖包的重量服从正态分布）

解： 本问题是通过样本的信息，对总体参数的检验。

转化为假设检验的概率模型

$$H_0: u = 100 \quad H_1: u \neq 100$$

$$t = \frac{\bar{X} - u}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{计算得 } t = -0.055$$

查 t 分布的临界值表， $t_{0.025}(g) = 2.31$ ，从而 $|t| = 0.055 < 2.31$ 。

由小概率原理可得，改包装机工作正常。

本问题对于没有学过专业知识，甚至对初学者来说，有很多表面上看到这 9 包糖果的重量竟然一包也不等于标准重量，就凭主观判断说该包装机工作不正常，这显然是错误的。因此我们弄清楚小概率事件是非常有必要的。

§ 2.8 概率知识证明不等式

例 7、已知 $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ，证明不等式：

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \sin \alpha + \sin \beta \leq 1 + \sin \alpha \sin \beta .$$

分析：这道题自己要考察的是三角函数，单纯的利用有限的三角函数知识实在无从下手，用微积分的知识也无法证明，但可以应用概率方法来解决。从已知出发，有： $0 \leq \sin \alpha \leq 1, 0 \leq \sin \beta \leq 1$ ，再根据事件概率的性质，把 $\sin \alpha, \sin \beta$ 分别取作两个相互独立事件的概率，最后应用概率加法公式即可得出我们需要证明的结果，由此在解题中起到化繁为简的作用。

证明：由 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ，知 $0 \leq \sin \alpha \leq 1, 0 \leq \sin \beta \leq 1$ ；可假设 $\sin \alpha, \sin \beta$ 分别为两相互独立事件 $A、B$ 的概率。

即 $P(A) = \sin \alpha, P(B) = \sin \beta$ 。根据概率加法公式和独立性有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

而 $0 \leq P(A+B) \leq 1$ ，得

$$0 \leq \sin \alpha + \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \leq 1$$

即为 $\sin \alpha \sin \beta \leq \sin \alpha + \sin \beta \leq 1 + \sin \alpha \sin \beta$

故原不等式得证。

通过上例应用概率论的基本概念、性质和概率模型等有关方法证明不等式，感悟数学的统一性。