揭阳职业技术学院

师范教育系

《小学数学基础理论》

教案

(2025-2026 学年第 2 学期)

教师姓名：　洪敏

所授专业：　小学教育

授课时间	第 2-4 周	课 次	第 次
章 节 名 称	**第一章 数与运算**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	12
教 学 目 的 要 求	掌握数与运算的相关概念；自然数的意义和作用，熟练讲解四则运算，分析整数分数和小数。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	重点：解题教学对小学生学习数学的作用，同时了解数的生成与自然数，整数，分数，小数的应用。		

教学步骤及内容：

本章为《小学数学基础理论》的数与运算章节，从高观点阐释小学数学数与运算的理论，助力教师理解数学本质、设计教学，核心围绕自然数、整数、小数、分数的概念与运算展开，同时明确学习该理论的意义与方法。

一、学习《小学数学基础理论》的意义与方法

学习意义

1. 解答小学生的数学疑难问题，理解教材中渗透的数学思想方法。
2. 教师理解数学是教好数学的前提，需领悟数学本质、思想方法，把握《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》的教学要求。
3. 从高观点把握小学数学原理、结构和联系，实现“数学育人”目标。

学习方法

认真学习建结构、拓展阅读扩视野、完成练习固内容、研究小问题培养研究能力。

二、自然数（1.1）

产生

源于人类辨别事物多寡的原始数感，是“数数”的结果，用于表示物体个数，发展历经分类→比较→多少→数数→替代→记数六个阶段。

原理

1. 基数理论：建立在集合论基础上，有限集合的基数为自然数，即表示集合元素个数的数，空

集基数为 0。

2. 序数理论（皮亚诺公理）：从顺序角度定义，集合 N 元素有“后继”关系，满足 4 条公理（1 属于 N；每个元素有唯一后继；除 1 外元素仅为一个元素的后继；归纳公理），集合元素即为自然数。

计数与读数

1. 计数：常用十进制计数法，遵循**十进位（满十进一）和位置值（同一数字在不同数位数值不同）**原则。

2. 命数：给数命名，我国“四位一级”，前十个数有单独名称，按满十进一规定计数单位（个、十、百、千、万、亿等），其他数由前十个数与计数单位组合。

3. 读数：遵循我国传统四位一级的读数习惯。

三、自然数的四则运算（1.2）

加法

1. 定义：核心为合并/后继，“+”为加号。

2. 运算性质：交换律（a+b=b+a）、结合律（(a+b)+c=a+(b+c)）。

3. 运算规则：表内加法用加法表；表外加法将多位数拆为不同计数单位的和，相同计数单位相加。

减法

1. 定义：加法的逆运算，“-”为减号，涉及被减数、减数、差。

2. 运算规则：表内减法逆向用加法表；表外减法将多位数拆为不同计数单位的和，相同计数单位相减。

乘法

1. 定义：序数定义（a×1=a；a×b^+ =a×b+a）、加法定义（求几个相同加数和的运算）。

2. 运算性质：交换律（ab=ba）、结合律（(ab)c=a(bc)）、分配律（(a+b)c=ac+bc）（可通过连加证明）。

3. 运算规则：表内乘法用乘法口诀；表外乘法分三类，均借助分配律转化为简单运算：多位数乘一位数拆数后计算；多位数乘整十/百/千数先乘一位数再乘相应计数单位；多位数乘多位数将乘数拆为十进制和后计算。

除法

1. 定义：乘法的逆运算，“÷”为除号，涉及被除数、除数、商；可表示平均分，也可理解为“连减/包含”。

2. 运算性质：去括号（a÷(b×c)=a÷b÷c）、除法对加减法的分配律。

3. 运算规则：表内除法逆用乘法口诀；表外除法将被除数拆为和后按分配律计算，数位不能整除则向下转移。

4. 带余数除法：a=b×q+r（0≤r<b），a 为被除数，b 为除数，q 为不完全商，r 为余数；r=0 时

为整除。

混合运算

遵循小学数学混合运算的基本法则（文档未展开具体规则）。

四、整数（1.3）

产生

1. 实际需要：表示具有相反意义的量（如零上/零下温度）。
2. 运算需要：弥补自然数减法不封闭的缺陷。

定义

正整数、零、负整数统称为整数，是自然数集加入负整数后的更大集合，整数集中任意两个数可进行减法运算。

运算

1. 加减法：转化为自然数的加减法计算（如 $8+(-13)=-5$，$9-(-4)=13$）。
2. 乘除法：
- 乘法：基于自然数运算律和常见运算事实，分四类：正×正=正，正×负=负，负×正=负，负×负=正。
- 除法：乘法的逆运算，核心规则同号得正，异号得负，绝对值相乘除；零乘任何整数积为零。

五、小数（1.4）

产生

满足精确度量、表达和计算的实际需求，是整数十进制的延伸。

定义

1. 十进分数定义：分母为 10、100、1000…的十进分数，用小数形式表示（加小数点，分十分位、百分位等）。
2. 整数延伸定义：本质是十进制数，以 1 为基本单位，向小的方向延伸（$1/10=0.1$，$1/100=0.01$…），整数和小数均遵循十进制位制原则。
3. 小数位数表示测量的精确程度，位数越多精度越高。

运算

1. 加减法：小数点对齐（相同计数单位对齐），按整数加减法法则计算。
2. 乘法：移动小数点转化为整数乘法，计算后反向移动小数点（移动位数为因数移动位数之和）。

3. 除法：
- 除数是整数：按整数除法法则，结合除法分配律计算，数位不够除则向下转移。
- 除数是小数：利用商不变性质，被除数和除数同时扩大相同倍数，转化为除数是整数的除法。
4. 除法结果：除尽（有限小数/整数）、除不尽（无限循环小数）。

六、分数（1.5）

产生

1. 测量需要：单位度量后剩余部分，需将单位再等分度量。
2. 运算需要：弥补整数除法不封闭的缺陷，用分数表示非整数的商。
3. 两个数相除=两个数的比=分数（$m \div n=m:n=m/n$）。

定义

1. 狭义定义：形如 m/n（m、n 为整数，$n>1$，$m \div n$ 商非整数），分子 m，分母 n，分数线为中间短横线，不含整数。
2. 广义定义：形如 m/n（m、n 为整数，$n \neq 0$），补充 $n=1$ 时 $m/n=m$，$m=0$ 时 $0/n=0$；包含整数，实质为有理数，$1/n$ 为分数单位，m/n 含 m 个 $1/n$。

运算

1. 加减法：同分母分母不变分子相加减；异分母先通分再计算，结果化为最简分数；本质是相同分数单位的数相加减。
2. 乘法：分子相乘作分子，分母相乘作分母（$m/n \times p/q = mp/nq$）。
3. 除法：被除数乘除数的倒数（$m/n \div p/q = m/n \times q/p = mq/np$），是乘法的逆运算。

分数与小数的关系

1. 分数：书写、运算简单，直观性差；小数：直观性强，部分运算/书写复杂。
2. 分数化小数：分子除以分母，结果为有限小数或循环小数，有 3 个核心定理：
- 最简真分数能化为有限小数的充要条件：分母仅含质因数 2、5。
- 分母仅含 2、5 以外质因数的最简真分数：化为纯循环小数，循环节最少位数与分母能整除的 999…的位数相同。
- 分母既含 2/5，又含其他质因数的最简真分数：化为混循环小数，不循环位数为分母中 2、5 指数的较大值，循环节位数与分母去 2、5 后能整除的 999…的位数相同。

七、课堂教学情境问题

小学复习课中，学生提出“循环小数 0.333…可表示哪个十进分数？是否由十进分数改写？”，核心结论：十进分数改写成的小数均为有限小数，循环小数由非十进分数改写。1，人类同其他许多动物一样，在蒙昧时代就具有辨别事物多寡的能力。 这就是原始的 “数感”，后来逐渐发展成数概念。

早期的数是自然数，它用来表示自然界中物体的个数，是 “ 数数 (shǔ shù)”数出来的。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 5-6 周	课 次	第 9-12 次		
章 节 名 称	**第二章 整数的性质**				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	8
教 学 目 的 要 求	熟练掌握整数的整除，同余，约数与倍数和奇偶性； 能合理运用正确的思想方法解答小学数学问题。				
教 学 方 法	讲授				
教 学 重 点 难 点	重点：整数的各个性质 难点：熟练讲解整除同余约数倍数与奇偶。				

教学步骤及内容：

本章为《小学数学基础理论》的整数的性质章节，隶属初等整数论范畴，围绕整除性、同余性、约数与倍数、奇偶分析四大核心展开，解答质数合数判定、数的整除特征等教学常见问题，为小学数学教学提供理论支撑。

一、课堂教学情境核心问题

教学质数与合数时，学生常问 0、1 是质数还是合数，同时涉及能被 9/7 整除的数的特征、分解质因数唯一性、最小公倍数与最大公约数性质等问题，是本章核心研究的整数性质问题。

二、整除性（2.1）

2.1.1 整除的定义与性质

1. 定义：对于整数 $a,b(b\neq 0)$，若存在整数 q 使 $a=bg$，则称 b 整除 a，记作 $b|a$；若 $a\div b$ 余数 r

$\neq 0$，则 b 不能整除 a，记作 $b \nmid a$。

2. 基本性质

- 传递性：$b|a$ 且 $c|b$，则 $c|a$，推论：$b|a$ 则 $b|ac$。
- 和差性：$c|a$ 且 $c|b$，则 $c|(a\pm b)$，推论 1：$c|(ma+nb)$；推论 2：$c|a$ 且 $c|(a\pm b)$，则 $c|b$。
- 余数性：$a\div b=q\cdots\cdots r$，若 $c|a$ 且 $c|b$，则 $c|r$；推论 1：$c|a$ 且 $c|r$ 则 $c|b$；推论 2：$c|b$ 且 $c|r$ 则 $c|a$。

2.1.2 数的整除特征

1. 被 2/5 整除：末位数字能被 2/5 整除。
2. 被 8/125 整除：末三位数能被 8/125 整除。
3. 被 3/9 整除：各数位数字之和能被 3/9 整除。
4. 被 11 整除：奇数位与偶数位数字之和的差（大减小）是 11 的倍数。
5. 被 7/11/13 整除：末三位数与末三位前数字组成的数的差（大减小）能被 7/11/13 整除。

2.1.3 质数与合数

1. 定义

- 质数（素数）：大于 1 的正整数，除 1 和本身外无其他因数（如 2、3、5）。
- 合数：大于 1 的正整数，除 1 和本身外还有其他因数（如 12、45）。

2. 1 既不是质数也不是合数

- 因数个数：1 只有 1 个因数，质数有 2 个，合数≥3 个，不符合定义。
- 分解质因数：若 1 为质数，合数分解会有无数种结果（如 $84=2\times2\times3\times7=2\times2\times3\times7\times1$），造成研究混乱。

3. 0 既不是质数也不是合数：文档未直接给出通俗解释，核心原因为 0 的因数无明确界定，且 $0\div0$ 无意义，不符合质数合数的定义前提。

4. 核心定理

- 定理 1：质数有无限多个（反证法：构造 $N=p_1p_2\cdots p_n+1$，与质数有限假设矛盾）。
- 定理 2（算术基本定理）：任一大于 1 的整数能唯一表示为质数的乘积（不考虑质因数顺序）。

三、同余性（2.2）

2.2.1 带余除法

对于正整数 a,b，若 b 不能整除 a，则存在唯一正整数 $q,r(0<r<b)$，使得 $a=bg+r$。

2.2.2 同余

1. 定义：正整数 a,b 除以正整数 m 的余数相同，则称 a 和 b 关于 m 同余，记作 $a\equiv b(\mod m)$。
2. 定理 1：同余的数进行加、减、乘运算，结果仍同余。
3. 拓展概念与定理

- 欧拉函数 $\varphi(m)$：序列 $0,1,2,\cdots,m-1$ 中与 m 互质的整数个数，计算公式：若 $m=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_n^{q_n}$，则 $\varphi(m)=m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_n})$。

- 欧拉定理：若 $m>1$ 且 $(a,m)=1$，则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mod m)$。

2.2.3 不定方程

1. 定义：含两个及以上未知数的方程，$ax+by=c$（a,b,c 为整数，$a,b\neq 0$）为二元一次不定方程。
2. 核心定理
- 定理 1：$ax+by=c$ 有整数解的充要条件是 $(a,b)|c$。
- 定理 2：若方程有一组整数解，可推导出其所有整数解。
3. 经典问题：百鸡问题（鸡翁一值五，鸡母一值三，鸡雏三值一，百钱买百鸡），通过不定方程求解得 4 组非负整数解。

四、约数与倍数（2.3）

2.3.1 约数与倍数的定义

若 $a=b\times c$（a,b,c 为正整数），则 b,c 是 a 的约数，a 是 b,c 的倍数；也可通过整除定义：$b|a$ 则 b 为 a 的约数，a 为 b 的倍数。

- 定理：若 $a=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_n^{q_n}$（标准质因数分解式），则 a 的约数个数为 $(1+q_1)(1+q_2)\cdots(1+q_n)$；约数和为 $(p_1^0+p_1^1+\cdots+p_1^{q_1})\times\cdots\times(p_n^0+p_n^1+\cdots+p_n^{q_n})$。

2.3.2 最大公约数

1. 定义：几个数的公约数中最大的数，记作 $(a,b)=m$；若 $(a,b)=1$，则 a,b 为互质数（如 8 和 15）。
2. 性质
- 性质 1：$(a,b)=d$，则 $(a\div d,b\div d)=1$（两数除以最大公约数，商互质）。
- 性质 2：$(a,b)=d$ 且 $c|d$，则 $c|a$ 且 $c|b$（最大公约数的约数是两数的公约数）。

2.3.3 最小公倍数

1. 定义：几个数的公倍数中最小的正整数，记作 $[a,b]=n$。
2. 核心性质
- 性质 1：$[a,b]=c$ 且 $c|m$，则 $a|m$ 且 $b|m$（最小公倍数的倍数是两数的公倍数）。
- 性质 2：$[a,b]\times(a,b)=a\times b$（最大公约数与最小公倍数的乘积等于两数乘积）。
- 性质 3：若 $(a,b)=1$，则 $[a,b]=a\times b$（互质数的最小公倍数是其乘积）。
- 性质 4：若 $a|m$、$b|m$ 且 $(a,b)=1$，则 $ab|m$（一个数能被互质的两数整除，必能被其乘积整除）。

五、奇偶分析（2.4）

2.4.1 奇数与偶数的定义

- 偶数：能被 2 整除的整数，记作 $2k$（k 为整数）。
- 奇数：不能被 2 整除的整数，记作 $2k+1/2k-1$（k 为整数）。

2.4.2 奇数与偶数的核心性质

1. 奇数≠偶数；
2. 奇+奇=偶，偶+偶=偶，奇+偶=奇；
3. 奇×奇=奇，偶×偶=偶，奇×偶=偶；
4. 若 a,b 为整数，则 a+b 与 a-b 奇偶性相同；
5. 两个连续整数，必有一个奇数、一个偶数。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 7-9　　周	课　次	第 13-18 次		
章　节 名　称	**第三章　比例与方程**				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	12
教　学 目　的 要　求	1. 理解比与比例的概念。 2. 了解函数的概念及其运算。 3. 熟练掌握算术与代数。 4. 认识方程及熟悉计算。				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：1. 熟练掌握运算，透彻理解各个函数，方程的意义。 2.熟练比与比例的关系和运算。 难点：能熟练讲解各个知识点。				

教学步骤及内容：

第一节　比与比例

情境引入

在"认识百分数"的新授课上，教师带领学生建构了百分数的意义。在课堂练习时，教师出示问题，"姚明在某个赛季的进球率为 48.96%，请问 48.96%说明了什么？"学生回答，"姚明投了 100 个球，进

了 48.96 个"。有的学生认为不对，应该是"进了 49 个"。假如你是教师，你怎么处理这种情况。
类似的问题还有，小学生在解决问题"妈妈买回 8 个苹果，吃了一些还剩下 3 个，请问吃了几个？"时，常常列出算式"8-5=3"，可是参考答案是 8-3=5。作为老师，你觉得学生的解答是否正确？为什么？
又如，有学生计算 $4a^2\div 2a$ 时，这样计算：$4a^2\div 2a=4\times a\times a\div 2\times a=2\times a\times a\times a=2a^3$。你觉得这样计算对吗？为什么？这样的问题还有很多。

3.1 比与比例

3.1.1 比

比，早期是指同类量的比。在比较两个同类量 a 与 b 的关系时，如果把 b 作为单位来度量 a，就成为 a 比 b。
也就是说，两个同类量中，一个量是另一个量的几倍或者几分之几，叫作这两个量的比，记作 $a:b=k$。其中，:为比号，a 叫作比的前项，b 叫作比的后项（后项不能为零），k 叫作比值。

后来，既有同类量的比，又有不同类量的比。因此，比的定义拓展为：两个数相除，又叫作两个数的比，即 $a\div b=a:b(b\neq 0)$。两个数（或量）的比，还可以写成分数形式，即 $a:b=\frac{a}{b}$。可见除法、比、分数在某种意义上是相通的，即 $a\div b=a:b=\frac{a}{b}$，它们最后都可以统一为分数。因此，比也具有与分数类似的性质，被称为比的基本性质。
性质：比的前项与后项，同时乘或除以一个相同的数（零除外），比的值不变。即
$a:b=am:bm(m\neq 0)$
或 $a:b=(a\div m):(b\div m)(m\neq 0)$

教学链接
比既是一个数学概念，又是一个生活概念。在小学数学教学中，学生常常受生活概念的干扰。那么生活中的比与数学中的比有什么不一样呢？
(1) 数学中的比可以利用基本性质化简，比值（结果）不变；生活中的比化简后意义可能发生改变。比如，某场球赛的结果是 6:2，如果化简为 3:1，结果就发生改变了。
(2) 数学中的比后项不能为零，但生活中的比后项可以为零。例如，两支足球队某场比赛结果为 2:0。
(3) 数学中的比本质上是两个量相除，表示倍数关系，而生活中的比除了表示这种关系，还可以是两个量相减，表示多（或少）多少。

3.1.2 百分比

两个量的比，有时写成$\frac{p}{100}$的形式，通常记作 $p\%$，叫作百分比，又叫作百分数。
对于百分数，还有两种不同的理解。一种是形式上的理解，即"分母是 100 的分数叫作百分数"；另一种是应用层面的，即"表示一个数是另一个数的百分之几的数，叫作百分数"。

上述定义的共性是：百分数是表示一个量与另一个量的比，而且将比的后项化成 100 的形式。因此，百分数更多的含义隐藏在"两个量比"里面，是一个比值，后面常常不带单位。比如，将 5 克盐溶解在 20 克水中，形成盐溶液的浓度为$\frac{5}{20+5}\times 100\%$。
与一般分数相比，百分数的大小比较更为直观。例如，两种品牌的袜子，含棉量分别为$\frac{22}{25}$和$\frac{9}{10}$，不容易直接看出谁的含量高，如果转换成百分数 88%与 90%，则非常容易看出后者含棉量高。

黄金比
假如全段长为 1，不妨设黄金比为 x，则大段=x，小段=1-x。故有$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}$，所以$x^2+x-1=0$，解得正根 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

黄金分割的尺规作图
作线段 AB，作 BD⊥AB，且 $BD=\frac{1}{2}AB$，连 AD。作以 D 为圆心、DB 为半径的圆交 AD 于 E，再作以 A 为圆心、AE 为半径的圆交 AB 于 C，C 为 AB 的黄金分割点。
证明：不妨令 $|BD|=1$，则 $|AB|=2$，$|AD|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|AE|=|AD|-|ED|=\sqrt{5}-1$，$|AC|=|AE|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB|$。

3.1.3 比例

1. 概念与基本性质
两个比相等的式子叫作比例，可以用字母把比例表示为 a:b=c:d 或者$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。组成比例的四个数是比例的项，a 和 d 是比例的外项，b 和 c 是比例的内项。

基本性质 1：在比例里，两个外项的乘积等于两个内项的乘积，即如果 a:b=c:d，那么 ad=bc。
基本性质 2：把一个比的倒数（即前后项交换位置形成新的比）称为原来比的反比。在比例 a:b=c:d 中，各取两个比的反比 b:a 和 d:c，比例式仍然成立，即 b:a=d:c。这个性质又叫作反比定理。
基本性质 3：在比例 a:b=c:d 中，把两个内项或者两个外项交换位置，比例式仍然成立，即 a:c=b:d 或 d:b=c:a。这个性质又叫作更比定理。

2. 比例定理（a,b,c,d 都不等于零）

- 合比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。
- 分比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。
- 合分比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。
- 等比定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$，那么$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$。

3. 正比例与反比例关系

- 正比例关系：两种相关联的量，相对应的两个数的比值一定，这两种量叫作成正比例的量。用字母表示为$\frac{y}{x}=k$（k 为定值，比例常数）。
例如：商店销售笔记本，数量 x 与总价 y 的比值为 2，$\frac{y}{x}=2$，二者成正比例，对应数对在平面直角坐标系中为一条直线。
- 反比例关系：两种相关联的量，相对应的两个数的乘积一定，这两种量叫作成反比例的量。用字母表示为 xy=k 或者 $y=\frac{k}{x}$（k 为定值，比例常数）。
例如：面积为 24 平方厘米的长方形，长 x 与宽 y 的乘积为 24，xy=24，二者成反比例，对应数对在坐标系中为一条曲线。

第二节函数

特殊函数--数列

数列：按照一定顺序排列的一列数，一般形式为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，$a_n$ 为通项。

常见数列的通项与前 n 项和公式

1. 自然数列：通项 $a_n=n$；前 n 项和 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。
2. 奇数列：通项 $a_n=2n-1$；前 n 项和 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。
3. 偶数列：通项 $a_n=2n$；前 n 项和 $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$。
4. 平方数列：通项 $a_n=n^2$；前 n 项和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。
5. 立方数列：通项 $a_n=n^3$；前 n 项和 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。
6. 等差数列：通项 $a_n=a_1+(n-1)d$；前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$。
7. 等比数列：通项 $a_n=a_1q^{n-1}$；前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)$。

例 2：按规律堆单位正方体积木，每层积木数依次为 1,3,6,⋯，求第 100 层积木数和堆到 100 层的总积木数。

3.5.3 斐波那契数列

意大利数学家斐波那契研究兔子繁殖问题时得到的数列，背景：一对初生兔子 1 个月成熟，一对成熟兔子每月生一对兔子，由一对初生兔子开始，每月兔子对数依次为：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,⋯，即斐波那契数列，12 个月后有 144 对兔子。
通项公式：可通过联想等比数列推导得出。

例 3：一个人站在"梯子格"起点向上跳，从格外只能进入第 1 格，从格中每次可向上跳一格或两格，求跳到第 n 格的方法数。

第三节　算术与代数

代数与算术的区别

人们用抽象数学符号代替具体数字运算，发展出代数分支：

- 代数：研究数字和符号的运算理论和方法的数学分支，更确切地说，研究实数、负数及以其为系数的多项式的代数运算理论和方法。
- 算术：研究数的性质及其运算，即"计算的方法"。

核心区别：

1. 算术运算处理具体数字，代数运算处理抽象符号；
2. 算术运算关注解决问题的程序，代数运算重视问题的结构；
3. 用字母表示数并参与运算，是由算术跨越到代数的桥梁。

例 4："鸡兔同笼"问题：今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？
例 5：三个半圆的直径分别为 6cm、4cm 和 2cm，求图中阴影部分的面积（π 取 3.14）。

第四节　方程

通过字母代替数参与运算，能解决一类数学问题，由此产生代数式概念。
代数式：用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连接而成的式子。代数式能清晰表示量之间的数量关系和逻辑结构，便于分析和解决问题。

方程

等式：用等号连接的两个代数式。
等式的基本性质：

1. 等式两边同时加上或减去同一个数或式子，等式仍然成立；
2. 等式两边同时乘以或除以同一个不为 0 的数或式子，等式仍然成立。

方程：含有未知数的等式（描述性定义），如 $4x-12=21$、$x+5=10$ 等。
方程的本质：用字母/符号代表未知量，让其与已知量一起参与运算，根据数量关系列等式，再通过数学方法求出未知量。
解方程

1，一元一次方程

形如 $ax+b=0$ 的一元一次方程，当 $a\neq0$ 时，有唯一解 $x=-\frac{b}{a}$。

2 一元二次方程

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一元二次方程，两端除以 a 化为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，配方后可求解。
判别式：$\Delta=b^2-4ac$

- 当$\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数解 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；
- 当$\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数解 $x=-\frac{b}{2a}$；
- 当$\Delta<0$ 时，方程有两个不相等的虚数解 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}$（i 为虚数单位，$i^2=-1$）。

例 1：解方程(1)$x^2-6x+8=0$ (2)$x^2-4x+8=0$

.3 一元三次方程

求解思路：通过换元消去二次项，转化为特殊三次方程求解。
例：求解 $y^3-6y+6=0$
令 $y=a+b$，则 $y^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，即 $y^3-3aby-(a^3+b^3)=0$；与 $y^3-6y+6=0$ 比较系数，结合韦达定理求解。
例 2：解方程 $x^3-3x^2-3x+11=0$
解：将原方程化为$(x-1)^3-6(x-1)+6=0$，令 $y=x-1$，转化为 $y^3-6y+6=0$ 求解，再还原得 $x=y+1$。

4 数域扩充

数是数学最基本的概念，数的概念不断发展形成不同数系，数系扩充有自然历史体系和逻辑扩充体系两种，且遵循基本原则：

1. 原数域为新数域的子集；
2. 原数域中不能进行的某些运算，在新数域中可以进行；
3. 原数域中的运算结果，在新数域中仍然不变；
4. 原数域中的运算性质，在新数域中仍然保留；
说明：数域的每一次扩充，都是基于上述原则的最小扩充。

4.1 整数

自然数起源于点数物体的数目，具有基数和序数属性，自然数集（N）对加法、乘法封闭，对减法、除法不封闭。
为表示相反意义的量、进行任意自然数的减法运算，创造负整数；自然数和负整数统称为整数，分为正整数、零、负整数。整数集（Z）对加法、减法、乘法封闭，对除法不封闭。

性质：整数集 Z 为可数集。
可数集定义：能够和自然数集建立一一对应的集合。
证明：整数集与自然数集可建立一一对应关系（如 $0\to1$，$1\to2$，$-1\to3$，$2\to4$，$-2\to5$，…，$n\to2n$，$-n\to2n+1$），因此整数集为可数集。
.4.2 有理数

为计数非整数个物体、进行任意整数的除法运算（除数不为 0），创造分数（正分数、负分数）；整数和分数统称为有理数，有理数集（Q）。
有理数都可以表示为$\frac{m}{n}$（m,n 为整数，$n\neq0$）的形式，有理数集对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算封闭，且有理数集为可数集（可通过排序与自然数集建立一一对应）。

例 1：计算 $8\div0.4$

拓展阅读：用反证法证明$\sqrt{2}$不是有理数
设$\sqrt{2}$是有理数，则存在互质整数 p,q，使得$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，即 $p^2=2q^2$；由此推出 p 为偶数，设 $p=2r$，代入得 $q^2=2r^2$，又推出 q 为偶数，与 p,q 互质矛盾，故$\sqrt{2}$不是有理数。

4.3 实数

1. 无理数：无限不循环小数，不能写成两个整数的最简比的形式。常见无理数：圆周率$\pi\approx3.1415926\cdots$、自然常数 $e\approx2.71828\cdots$、黄金分割比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618\cdots$、$\sqrt{3}\approx1.732\cdots$等。
2. 实数：有理数和无理数统称为实数，实数集（R）。实数与数轴上的点一一对应，实数集合与小数集合等价。

例 2：计算(1)$(\sqrt{28}-\sqrt{48})+(\sqrt{7}+\sqrt{12})$ (2)$(\sqrt{28}-\sqrt{48})\div(\sqrt{7}+\sqrt{12})$

<table>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="4">下次课预习要点
教学后记</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 10-12 周</td><td>课 次</td><td>第 19-24 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="3">第四章 图形与几何</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td>理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>12</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="3">了解线、角、长度、周长、面积、表面积、体积（容积）等概念，掌握课标要求的几何计算公式；能根据学习的周长、面积、表面积、体积公式进行相关计算，并结合所学的代数知识解决一些实际问题。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="3">讲授</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="3">重点：能根据学习的周长、面积、表面积、体积公式进行相关计算，并结合所学的代数知识解决一些实际问题
难点：求平面图形阴影部分的面积。</td></tr>
</table>

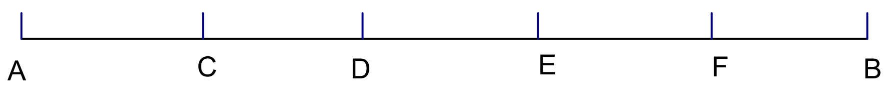
教学步骤及内容：

第一节 线段与角

几何图形一般指点、线、面、体及其它们的组合。几何图形又可以分为平面图形和空间图形。这里主要研究平面图形的个数问题。

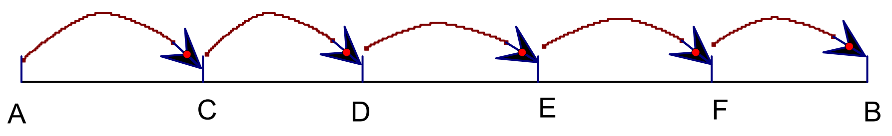
由于平面图形变化复杂，要准确计算出一个平面组合图形中包含多少个简单图形，关键是解决计算中不重复、不遗漏的问题，并且能够根据简单图形的特征进行辨认，按照一定的解题思路和方法进行计算，同时揭示在解答这一类问题中的规律性。

例： 在下面的线段 AB 上，包括端点共有 6 个点，数一数，在线段 AB 上可以找到多少条线段？

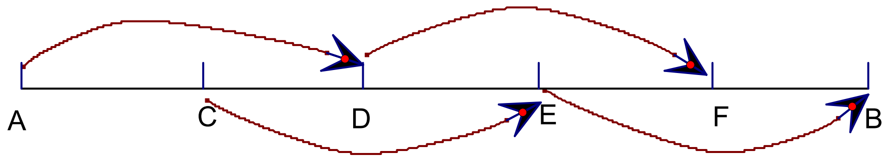


分析与解：我们把中间没有点的线段叫做基本线段，中间至少有一点的线段叫做复合线段。采用“以基本线段组成其它线段的方法”进行思考：这样就可以考虑基本线段、含有两条基本线段的线段、含有三条基本线段的线段、含有四条基本线段的线段、含有五条基本线段的线段的数量。

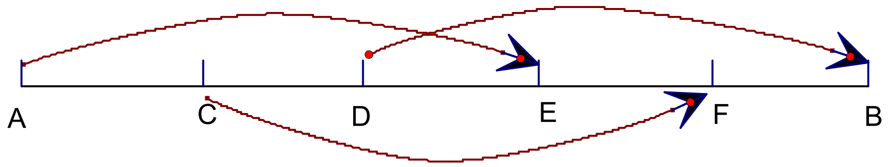
（1）基本线段有 5 条：AC、CD、DE、EF、FB



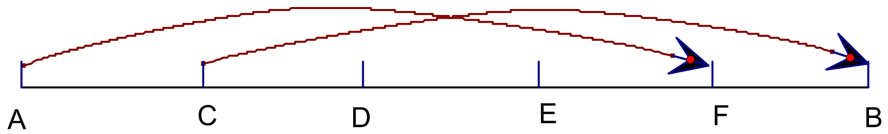
（2）由两条基本线段组成的线段有 4 条：AD、CE、DF、EB



（3）又 3 条基本线段组成的线段有 3 条：AE、CF、DB



（4）由 4 条基本线段组成的线段有 2 条：AF、CB

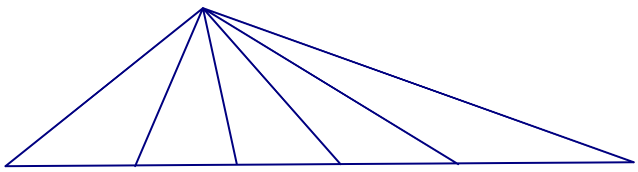


（5）由 5 条基本线段组成的线段只有一条，就是 AB。

所以，在线段 AB 上一共有 5＋4＋3＋2＋1＝15（条）

答：在线段 AB 上可以找到 15 条线段。

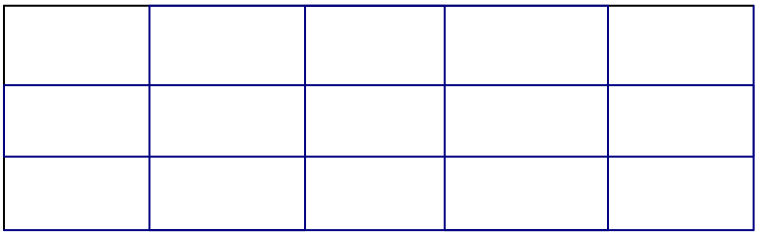
例：数一数下面图形中有多少个三角形？



分析与解：我们把每条边上不含其它点的三角形叫做基本三角形，至少一条边上含有其它点的三角形叫做复合三角形。跟上题类似，采用“以基本三角形组成其它三角形的方法”进行思考。这道题是在上题的直线 AB 的基础上，利用直线外一点来产生三角形，因此可以利用上题的结论，这样图中的三角形一共有 5＋4＋3＋2＋1＝15（个）。

答：下面图形中有 15 个三角形.

例：下面的图形中有多少个长方形？



分析：从长方形的特征来考虑，图形中各顶点处的角都是直角，因此只要选取一组长和一组宽，就可以得到一个长方形。长方形长的取法就是大长方形长边上线段的条数，宽取法就是大长方形宽边上线段的条数。用乘法就能求出有多少个长方形。

解：（1）在大长方形长边上有多少条线段？

5＋4＋3＋2＋1＝15（条）

（2）在大长方形宽边上有多少条线段？

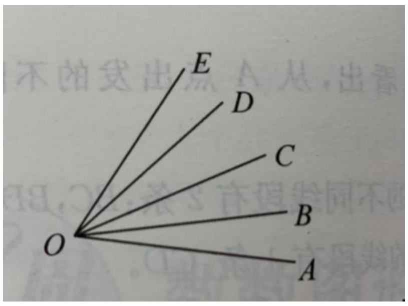
3＋2＋1＝6（条）

（3）有多少个长方形？

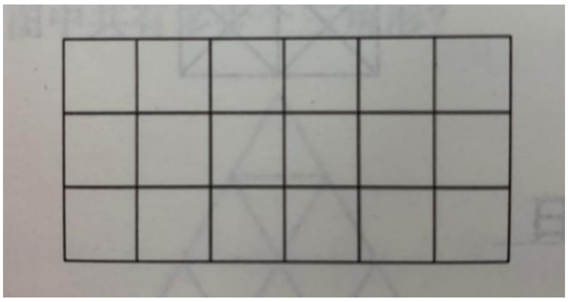
15×6=80（个）

答：有 80 个长方形。

例：下图一共有多少个锐角？



例：下面图形中有多少个正方形？

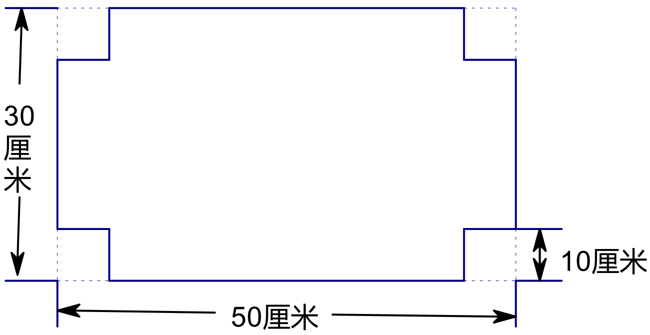


第二节 四边形

一、平面图形的周长

一个平面图形的周长就是这个图形边界的总长。在具体求平面图形的周长时，要分清应该计算哪些边的长度的总和。

例 1. 一张长方形硬纸，长 50 厘米，宽 30 厘米。把它的四个角各剪去边长是 10 厘米的小正方形，如下图所示。剪成的图形的周长是多少厘米？



分析与解：要求剪成的图形的周长，就是求围成这个图形所有边长度的总和。从图可以看出，这个图形的边（线段）有 12 条。有 2 条边的长都是（50－10×2）厘米，有 2 条边是长都是（30－10×2）厘米，有 8 条边的长都是 10 厘米。因此可以求出这个图形的周长是多少厘米。

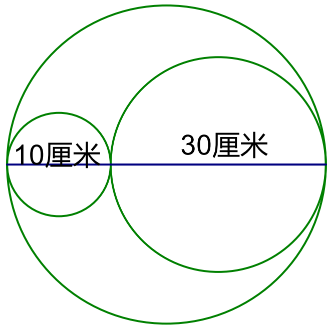
（50－10×2）×2＋（30－10×2）×2＋10×8＝60＋20＋80＝160（厘米）

也可以这样思考：由于把这张长方形硬纸的四个角，各剪去边长是 10 厘米的小正方形，这个小正方形的各边的长是相等的，通过观察可以看出，用剪去后所形成的 2 条边去代替剪去以前的部分，剪成的图形的周长就是原长方形的周长。

（50＋30）×2＝80×2＝160（厘米）

答：剪成的图形的周长是 160 厘米。

例 2. 如下图所示，在大圆里面有两个小圆，大圆的直径是 40 厘米，两个小圆的直径分别是 10 厘米、30 厘米。大圆的周长与里面两个小圆的周长和相比较，有什么结果？



分析：要比较大圆的周长与它里面两个小圆周长的和，就要分别求出三个圆的周长，经过计算和比较，就可以得出结果。

解：（1）大圆的周长是多少厘米？

3.14×40＝125.6（厘米）

（2）两个小圆的周长的和是多少厘米？

3.14×10＋3.14×30＝3.14×（10＋30）＝3.14×40＝125.6（厘米）

通过计算，可以知道大圆的周长与里面两个小圆的周长和相等。

答：大圆的周长与里面两个小圆的周长和相比较，结果是：大圆的周长与里面两个小圆的周长的和相等。

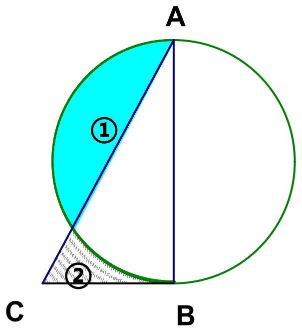
在这个数学问题中，已知大圆的直径等于两小圆直径的和，从这个条件可以确定这三个圆特殊的位置关系：三个圆的圆心在同一条直线上，两个小圆外切并且内切于大圆之中。在小学数学中，从题目的图示或圆的直径关系就可以说明三个圆特殊的位置关系。

二、平面图形的面积

平面图形的大小就是它的面积。我们主要在常见的平面图形，如长方形、正方形、平行四边形、三角形、梯形和圆的面积计算的基础上，简单研究一些组合图形面积的计算问题。在具体求平面组合图形的面积时，要分清楚应该把组合图形分解成哪些简单图形，怎样通过这些简单图形面积的计算求出组合图形的面积。

例 1. 如下图形所示，三角形 ABC 是直角三角形，直角边 AB 是半圆的直径，并且 AB 的长是 20 厘米。如果半圆与三角形相交所形成的区域①的面积比阴影部分②的面积多 7 平方厘米，那么三角形 ABC 的直角边 BC 长多少厘米？

分析：要求三角形 ABC 的直角边 BC 的长，就必须先求出三角形 ABC 的面积。由于区域①的面积比阴影部分②的面积多 7 平方厘米，也就是半圆的面积比三角形 ABC 的面积多 7 平方厘米；而半圆的面积可以求出来，因此可以求出三角形 ABC 的面积。



解：（1）半圆的面积是多少平方厘米？

3.14×(20÷2) (20÷2)÷2＝3.14×100÷2＝157（平方厘米）

（2）三角形 ABC 的面积是多少平方厘米？

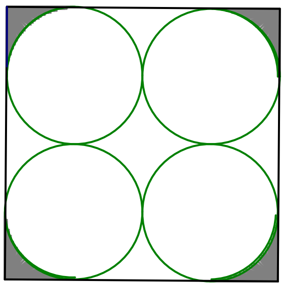
157－7＝150（平方厘米）

（3）三角形 ABC 的直角边 BC 长多少厘米？

150×2÷20＝15（厘米）

答：三角形 ABC 的直角边 BC 长 15 厘米。

例 2. 求下面图形中阴影部分的面积。



40厘米

分析：从图形知道，大正方形的边长是 40 厘米，图形中间小正方形的边长是：40÷2＝20（厘米），每一个圆的半径是：40÷2÷2＝10（厘米）。仔细观察图形，可以看出，阴影部分的面积等于大正方形的面积减去中间小正方形的面积、再减去 4 个四分之三的小圆面积。

解：（1）大正方形是面积是多少平方厘米？

40×40＝1600（平方厘米）

（2）小正方形的面积是多少平方厘米？

20×20＝400（平方厘米）

（3）4 个四分之三小圆面积的和是多少平方厘米？

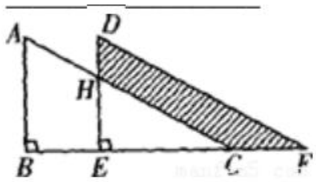
3.14×(40÷2÷2) (40÷2÷2) ×3÷4×4＝3.14×100 ×3＝942（平方厘米）

（4）阴影部分的面积是多少平方厘米？

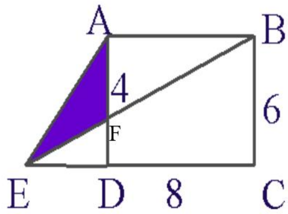
1600－400－942＝258（平方厘米）

答：阴影部分的面积是 258 平方厘米。

例：如图所示，两个完全相同的直角三角形，已知 $AB=8cm, DH=3cm, BE=5cm$，求阴影部分的面积。



例：如图，ABCD 是长为 8，宽为 6 的长方形，AF 为 4，求阴影部分 ΔAEF 的面积。

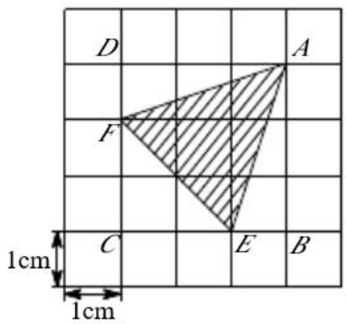


三、毕克定理：

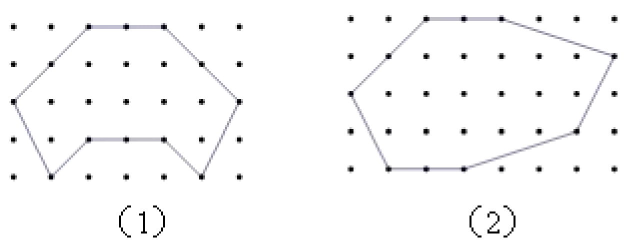
正方形格点：面积=内部格点数+边界格点数÷2-1，

如果用 S 表示面积，a 表示内部的格点数，b 表示边界上的格点数，我们也可以把公式用字母表示为 S=a+b÷2-1

例：计算阴影部分的面积



例题：求下图两个多边形的面积分别是多少？



解：图（1）中多边形的顶点都在格点上，是格点多边形。

内部有 10 个格点，N=10

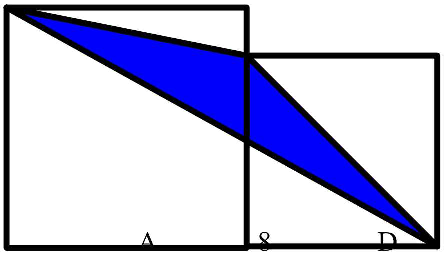
边界上有 12 个格点，L=12
S=10+12÷2-1=15（单位面积）
图（2）内部有 16 个格点，N=16
边界上有 10 个格点，L=10
S=16+10÷2-1=20（单位面积）

四、巩固练习

1、已知正方形甲的边长为 5 厘米，正方形乙的边长为 4 厘米，求图中阴影部分的面积。

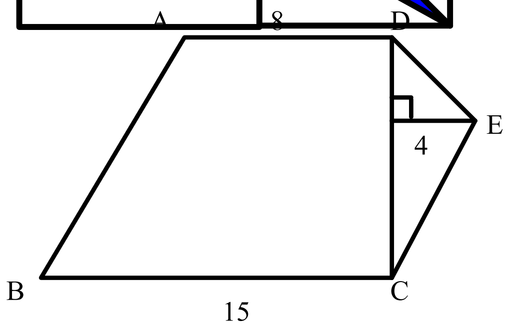
分析：

用两个正方形的面积之和减去三个三角形的面积。



解：阴影部分面积是 8 平方厘米。

2、直角梯形 ABCD 和三角形 CDE 组成的多边形面积是 135 平方厘米，求三角形的面积（单位：cm）。（如图）



分析：设 DC 长为 xcm。根据题义可列方程求出长度，在用三角形面积公式求出面积。

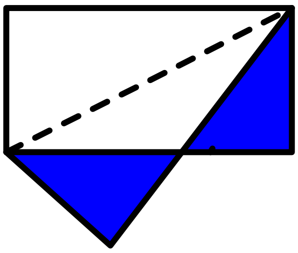
解：（8+15）×x÷2+4×x÷2=135

11．5 x+2 x =135

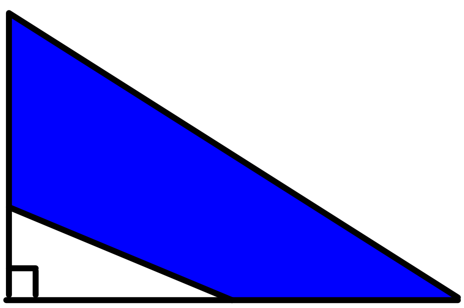
x =10

三角形面积：10×4÷2=20（平方厘米）

3、长方形长为 4 厘米，宽为 2 厘米，沿对角线 BD 对折得到一个几何图形，求图形阴影部分的周长。



4、已知三角形 ABC 中，角 C 是直角，且面积为 12 平方厘米，AE=2CE，BD=CD，求四边形 ABDE 的面积。（提示：连接 AD）



A

E

第三节 三角形

1. 定理一：等底等高的三角形面积相等。

2. 等角定理（定理四）：等角三角形的面积比，等于等角两边的乘积之比。

3. 共边定理（定理五）：共边三角形的面积比，等于该边所在直线分其顶点的线段比。

例题与拓展

- 例 1：平行线等分线段定理，若 $AB\parallel CD$，则对应线段成比例。
- 例 2：长方形中，已知两个三角形面积，求阴影部分面积。
- 拓展阅读：梯形蝴蝶定理：梯形 ABCD 上底 a、下底 b，对角线交于 O，分梯形为四个区域 S_1,S_2,S_3,S_4，则：

1. $S_1:S_3=a^2:b^2$；

2. $S_1:S_3:S_2:S_4=a^2:b^2:ab:ab$；

3. 梯形面积对应份数为$(a+b)^2$。

第四节 圆与球

圆的定义与基本性质

1. 定义：平面内到定点（圆心 O）距离等于定长（半径 r）的点的集合；相关概念：弦（圆上两点连线）、直径（过圆心的弦）、圆弧。

2. 性质：同圆/等圆的半径、直径分别相等；圆是轴对称（任意直径为对称轴）和中心对称图形（圆心为对称中心）。

3. 圆周率 π：圆的周长与直径的比值，为无限不循环小数、超越数。

圆的相关计算

1. 面积：小学数学中通过割补法转化为长方形推导，也可由圆内接正多边形边数无限增加逼近（割圆术），公式 $S=\pi r^2$；

2. 扇形：角度为 n° 时，弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$，面积 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$；角度为弧度数 α 时，弧长 $l=\alpha r$，面积 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$，周长 $C=\alpha r+2r$。

球的定义与计算

1. 定义：空间中到球心距离等于半径的点的集合；

2. 公式：表面积 S=4πR^2，体积 V=\frac{4}{3}πR^3（可通过将球分割为无数空心球壳，求和逼近推导）。

第五节 长方体圆柱和圆锥

一、立体图形的表面积

一个立体图形各个面的面积之和就是它们的表面积。如，长方体的表面积就是它的六个面的面积的和。在具体求立体图形的表面积时，要根据实际情况分清应该计算哪些面的面积的和，如，计算一个无盖的水桶的表面积，只需要计算它的侧面积和一个底面积的和，等等。解答立体图形表面积的计算问题，要充分发挥空间想象力，抓住问题的关键进行思考，认真寻找解题方法。

	表面积	体积
正方体（棱长为 a）	$6a^2$	a^3
长方体（边长 a、b、c）	2（ab+bc+ca）	abc
圆柱体（底面半径 r，高 h）	$2\pi r^2+2\pi r\cdot h$	$\pi r^2\cdot h$
圆锥体（底面半径 r，高 h）	$\pi r^2+\pi r\cdot l$	$\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$

例 1. 把一个棱长是 4 厘米的正方体切割成 8 个相等的小正方体。这些小正方体的表面积比原来正方体的表面积多多少平方厘米？

分析 1：如果按一般的思路解答，先求出这些小正方体的表面积的和，再减去原来正方体的表面积，就可以求出多的表面积。

解法 1：2×2×6×8－4×4×6＝192－96＝96（平方厘米）

分析 2：可以想象：要把一个棱长是 4 厘米的正方体切割成 8 个相等的小正方体，就是沿着正方体的长、宽、高的方向各切了一刀，切割 3 刀就增加了 6 个正方形的面，其面积就是比原来正方体的表面积多出的面积。

解法 2：4×4×6＝96（平方厘米）

答：这些小正方体的表面积比原来正方体的表面积多 96 平方厘米。

显然，用第二种解法所反映出来的空间想象力就要高一些，不必先求 8 个小正方体的表面积和原来正方体的表面积，只要想象出由于切割了 3 刀，就应该新增加 6 个正方形的面积就可以。

例 2. 小圆柱的表面积是 80 平方厘米，其中底面积是 18 平方厘米。如果把 2 个这样的小圆柱拼

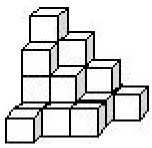
成一个大圆柱，这个大圆柱的表面积是多少平方厘米？

分析：根据题意，把 2 个相同的小圆柱拼成一个大圆柱，原来 2 个小圆柱的表面积就减少了 2 个底面积。

解：80×2－18×2＝160－36＝124(平方厘米)

答：这个大圆柱的表面积是 124 平方厘米。

例 3.把 20 个边长是 1 厘米的正方体摆放成一个立体图形，如下图所示。这个立体图形的表面积是多少厘米？



分析与解：要求这个立体图形的表面积，就要从 20 个正方形的表面积的和中减去正方形之间重叠部分的面积。

这个立体图形是由 20 个边长是 1 厘米的正方体摆放成的，20 个正方体的表面积是：

1×1×6×20（平方厘米）。

重叠部分的面的个数我们用分类的方法去找出来。通过观察，上下相重叠的面有

(5＋3＋1)×2＝18（个）；

左右相重叠的面有

(7＋3＋1)×2＝22（个）；

前后相重叠的面有

(7＋2＋1)×2＝20（个）。

全部重叠的面有：

18＋22＋20＝60（个），

因此重叠部分的面积就是：1×1×60（平方厘米）。

所以，这个立体图形的表面积是：

1×1×6×20－1×1×60＝120－60＝60（平方厘米）

答：这个立体图形的表面积是 60 平方厘米。

二、立体图形的体积

一个立体图形所占有空间的大小就是它们的体积。通常把物体所占有的空间的大小叫做物体的体积，而把容器所能容纳的物体的体积叫做容器的容量（或容积）。解答有关立体图形体积的计算问题一般要求比较简单，可以直接应用公式进行计算就可以。在这里，我们主要对一些变化条件的问题进行研究，解答这些问题时也要注意空间想象能力的培养和训练。

例 1. 把一块长 20 厘米、宽 20 厘米、高 24 厘米的长方体木料，削成一个最大的圆柱。这个圆柱

的体积是多少立方厘米？

分析：要削成一个最大的圆柱，就要考虑削成的圆柱体的底面、高最大，或者是削去的部分应该是最少的。从题中的已知条件可以看出，如果把长 20 厘米、宽 20 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面直径就是 20 厘米，而圆柱的高就是 24 厘米；如果把宽 20 厘米（或长 20 厘米）、高 24 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面直径就是 20 厘米，而圆柱的高是 20 厘米。通过比较知道，前一种方法削成的圆柱的体积最大。

解：（1）以长 20 厘米、宽 20 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面半径是多少厘米？

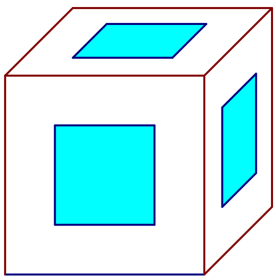
20÷2＝10（厘米）

（2）圆柱体的体积是多少立方厘米？

3.14×10×10×24＝7536（立方厘米）

答：这个圆柱的体积是 7536 立方厘米。

例 2. 一个正方体木块，棱长是 4 厘米。在这块正方体木块的前后、左右、上下各面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体后，制作成一个玩具，如下图所示。这个玩具的表面积是多少平方厘米？体积是多少立方厘米？



分析与解：由于在这块正方体木块的前后、左右、上下各面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，并且按前后、左右、上下去看：2＋2＝4（厘米），这块正方体从三个方向上都被挖穿了。在求其表面积与体积时关键是要有顺序地去想象、思考，确定要计算哪些面积、体积，要做到不重复、不遗漏。

（1）这个玩具的表面积是多少平方厘米？

①先考虑把这个正方体按上下两个面的方向，在上下两面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，合起来就是一个长方体。这个长方体的底面是边长为 2 厘米的正方形，高是 2＋2＝4（厘米）。正方体挖去一个长方体后的立体图形的表面积：正方体的表面积加上长方体的侧面积，再减去上下两个面上被挖去的正方形（边长是 2 厘米）。

4×4×6＋2×4×4－2×2×2＝96＋32－8＝120（平方厘米）

②正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后，我们再这样思考：在这个正方体的前面开始，在中心位置沿前后方向再挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形、高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体。此时，在正方体的前面已与挖去的长方体连通。需要增加这个小长方体的侧面积，2×4×1（平方厘米），但是要减去这个小长方体的两个底面积（其中一个是正方体前面被挖去的面；另一个是与小长方体相接的面，）2×2×2（平方厘米）。由此类推，正方体的后面、左面、右面也是按同样的方法去挖，都挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形，高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长

方体。所以，在正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后的表面积中，再增加 4 个小长方体的侧面积，减少 4 个小长方体两个底面积，就能求出这个玩具的表面积。

120＋2×4×1×4－2×2×2×4＝120＋32－32＝120（平方厘米）

（2）这个玩具的体积是多少立方厘米?

①先考虑把这个正方体按上下两个面的方向，在上下两面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，合起来就是一个长方体。这个长方体的底面是边长为 2 厘米的正方形，高是 2＋2＝4（厘米）。正方体挖去一个长方体后的立体图形的体积是：

4×4×4－2×2×4＝64－16＝48（立方厘米）

②正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后，我们再这样思考：在这个正方体的前面开始，在中心位置沿前后方向再挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形、高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体，体积是 2×2×1（立方厘米）。由此类推，正方体的后面、左面、右面也是按同样的方法去挖，都挖去一个底面为边长 2 厘米的正方形，高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体。所以，在正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后的体积中，再减少 4 个小长方体的体积就是这个玩具的体积。

48－2×2×1×4＝32（立方厘米）

答：这个玩具的表面积是 120 平方厘米，体积是 32 立方厘米。

例：有两个完全相同的长方体恰好拼成了一个正方体，正方体的表面积是 30 平方厘米。

练习：

1. 一个圆柱体和它等底的圆锥体的体积相等，圆锥体的高是 12 厘米，圆柱体的高是（4）厘米？

2. 把一个棱长 3 分米的正方体切削成一个最大的圆锥体，它的体积是（7.065）立方分米。

3. 把 3 个棱长是 4 厘米的正方体木块粘合成一个长方体，这个长方体的体积是(192)立方厘米,表面积比原来的 3 个小正方体表面积和减少(64)平方厘米。

第五节 勾股定理

介绍勾股定理的历史：我国古代《周髀算经》中记载“勾三股四弦五”，是世界上最早对勾股定理的记载；南宋数学家赵爽用“弦图”证明了勾股定理，2002 年国际数学家大会的会徽就是赵爽弦图，体现了中国古代数学的成就。

简单介绍西方的毕达哥拉斯发现勾股定理的故事，让学生感受勾股定理是人类共同的数学财富。

强调：勾股定理是直角三角形的重要性质，被称为“几何学的基石”，广泛应用于建筑、测量、航海等领域。

情境导入，激发兴趣

1. 生活问题提问：课件展示“电线杆拉线”问题——一根电线杆高 8 米，为了固定电线杆，在离电线杆底部 6 米的地方拉一根拉线，请问拉线的长度至少需要多少米？引导学生思考：直角三角形中，已知两条直角边的长度，如何求斜边的长度？

2. 引出课题：这类问题的解决需要一个重要的几何定理——勾股定理，这节课我们就一起来探索勾

股定理的奥秘。

例 1：基础应用，求边长

1. 已知一个直角三角形的两条直角边分别为 6 和 8，求斜边的长度。

- 解：由勾股定理得，c^2=6^2+8^2=36+64=100，所以 c=10。

2. 已知一个直角三角形的斜边为 10，一条直角边为 6，求另一条直角边的长度。

- 解：由勾股定理得，b^2=c^2-a^2=10^2-6^2=64，所以 b=8。

- 强调：运用勾股定理时，要分清直角边和斜边，若求直角边，需用“斜边的平方减另一条直角边的平方”。

例 2：生活应用，解决导入问题

回到导入的“电线杆拉线”问题：电线杆高 8 米（直角边 a=8），底部到拉线固定点 6 米（直角边 b=6），求拉线长度（斜边 c）。

- 解：c^2=8^2+6^2=64+36=100，c=10，所以拉线至少需要 10 米。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记			
授课时间	第 13-14　　周	课　次	第 25-28 次
章　节 名　称	**第五章 概率与统计**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	8
教　学 目　的 要　求	掌握概率与统计的定义和各种数据分析的方法。		

教 学 方 法	讲授
教 学 重 点 难 点	重点：能用适当的方法进行概率统计。 难点：数据分析

教学步骤及内容：

第一节　频率与概率

情境引入

两名同学做抛硬币试验，连续 5 次正面朝上，抛第 6 次前，一名同学认为第 6 次一定反面朝上（觉得正面概率均等，前 5 次正面则第 6 次反面概率大），另一名同学认为第 6 次也不会反面朝上，提出问题：两名同学的解释是否正确？结果如何？教师该如何向学生解释？

5.1 频率与概率

5.1.1 事件发生的可能性

以 6 名同学演讲比赛抽签定出场顺序为例（签筒有标 1-6 的 6 张相同纸签），提出问题引导思考事件可能性：抽到的序号有多少种可能、是否会大于 6、等于 6、小于 6。
事件可能性的三种分类：一定发生、不可能发生、可能发生也可能不发生，人们通常根据经验和知识预测事件发生的可能性（如事件 4：花是香的；事件 5：吃饭时用左手拿筷子；事件 6：某班明天拔河比赛取胜）。

5.1.2 频率

在相同条件下重复 n 次试验，事件 A 出现的次数为频数（记为 n_A），事件 A 出现的频数与总试验次数的比值为频率（记为 $f_n(A)$），公式为：$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。
随机事件 A 每次试验是否发生不可预知，但随着试验次数增多，事件 A 的频率会在某个常数附近摆动；该常数越接近 1，事件发生可能性越大，越接近 0，可能性越小，频率可在一定程度上反映随机事件发生的可能性大小。

5.1.3 概率

在大量重复试验的条件下，随机事件 A 发生的频率会在某个常数附近摆动，具有稳定性，这个常数称为该随机事件的概率，常用字母 P 表示。
概率是描述随机事件发生可能性大小的理论精确值，由大量重复试验中频率逐渐稳定得到，因此可以用大量重复试验的频率估计事件的概率。
举例：掷一枚质地均匀的骰子，有 1-6 点六种等可能结果，每种结果的概率均为$\frac{1}{6}$；必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0。

第二节 统计

5.2 统计

5.2.1 数据收集的过程与方法

核心概念

数据收集涉及总体与样本、变量、参数、统计量等基础概念。

三种抽样方法

1. 简单随机抽样：总体容量为 N，从总体中不放回地任意依次抽出 n 个个体，每次抽取时各个个体被抽到的机会相等，得到容量为 n 的样本；是系统抽样、分层抽样的基础，适用于容量较小的总体（如老师随机选 2 名学生回答问题）。
2. 系统抽样：将总体个体按顺序排列，先在指定范围随机抽取一个初始个体，再按事先确定的规则依次抽取，构成样本；起始部分抽样采用简单随机抽样，适用于容量较大的总体（如电影院按固定座位号抽取观众调查影片喜爱度）。
3. 分层抽样：按一定原则将总体分成若干子总体（层），每层中用简单随机抽样或系统抽样抽取样本，最后汇总各层样本作为最终样本；通常按各层所占比例抽样，每层抽样用简单随机/系统抽样，适用于总体容量较大且由差异明显的几部分组成的情况（如学校按年级教师人数比例抽取教师代表）。

抽样方法对比

抽样方式 共同点 特点 相互联系 适用范围
简单随机抽样 抽样过程中每个个体被抽取的可能性相同 从总体中不放回地依次抽取 系统抽样、分层抽样的基础 容量较小的总体
系统抽样 抽样过程中每个个体被抽取的可能性相同 将总体平均分成几部分，按事先确定的规则分别在各部分中抽取 起始部分抽样采用简单随机抽样 容量较大的总体
分层抽样 抽样过程中每个个体被抽取的可能性相同 将总体分成几层，按各层个体数之比抽取 各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样 总体容量较大且由差异明显的几部分组成

5.2.2 统计图与统计量

一、统计图

以具体实例介绍三种常用统计图，各有特点与适用场景：

1. 条形统计图：以年级学生秋游方案投票结果（A:108 人、B:71 人、C:42 人、弃权:6 人）为例，特点：能清楚表述数量的多少，易于比较各类数据之间的差别。
2. 扇形统计图：基于上述秋游投票数据绘制，特点：用扇形面积表示部分在总体中所占的百分比，易于显示每组数据相对于总数的大小。
3. 折线统计图：以冬冬出生后一年内每月身高、体重数据为例，特点：能清晰反映事物的变化情况。

二、统计量

分为中心位置的度量和离散程度的度量两类，是描述数据特征的核心指标。

1. 中心位置的度量

描述数据的集中趋势，包含平均数、中位数、众数三个核心指标：

- 平均数：数据的算术平均数，设 n 个观测样本为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$；大小与每个数据均有关，任何数据变化都会引起其变动，适用于数值变量。
- 中位数：将样本观测值按从小到大排列后，处于中间位置的数值；仅与数据排列有关，个别数据大幅变动对其影响小，适用于数值变量。
- 众数：观察值中出现次数最多的数值；着眼于数据出现频率，仅与部分数据相关，适用于数值变量和分类变量，数据多次重复出现时更有参考价值。

三者联系：都是描述数据中心位置的统计量，其中平均数最为重要、应用最广泛。

2. 离散程度的度量

描述数据的波动大小，包含极差、平均绝对离差、方差和标准差：

- 极差：样本观测值中最大值与最小值的差，即 $x_{(n)}-x_{(1)}$；计算简单，仅反映数据的变化范围。
- 平均绝对离差：设样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，平均数为$\bar{x}$，则平均绝对离差为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i-\bar{x}|$；反映数据在均值附近的波动情况。
- 方差和标准差：方差 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2$，反映数据波动；方差量纲不合理，开方后得到标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$，更贴合实际意义。

三者联系：都用于描述数据离散程度，比较两组数据波动大小；极差、平均绝对离差、方差越小，数据波动越小，越稳定，反之则越不稳定。

第三节 数据分析

5.3 数据分析

5.3.1 数据分析的含义

运用适当的统计分析方法对收集的大量数据进行汇总、整理、分析，最大化开发数据功能、发挥数据作用；实际工作中，数据分析能帮助管理者判断和决策，采取适当的策略与行动（如企业通过数据分析把握市场动向，制定产品研发和销售计划）。

5.3.2 数据分析的过程

分为五个核心步骤，依次推进：

1. 明确数据分析的目的和内容；
2. 收集数据；
3. 加工和整理数据；
4. 分析数据；
5. 数据分析结果的呈现和解释。

5.3.3 数据分析实例

以调查学生对北师大版新世纪小学数学实验教科书的喜爱程度为例，完整展示数据分析的全过程：

1. 明确目的和内容：调查学生对该数学教材及其中例题、插图、图表、单元提示/小结、课后习题、综合性学习活动、探究活动的喜爱程度。
2. 收集数据：设计 8 道选择题，每题设置 A（很喜欢）、B（有点喜欢）、C（不喜欢）、D（很不喜欢）四个选项，对学生进行问卷调查。
3. 加工和整理数据：利用 Excel 发现部分问题存在数据缺失（如 Q2 缺失 2 个、Q3 缺失 1 个等），若缺失数据影响统计分析，需采用 SPSS 等软件进行填补（文档未详述填补方法）。
4. 分析数据：利用 SPSS 计算各问题的均值、中位数、众数、标准差、百分位数等统计量。
5. 结果呈现和解释
- 集中程度：各问题喜爱程度均值均在 3.5 以上，众数、中位数均为 4，偏度小于 0；说明学生对教材的喜爱程度分布中负偏差数值大，喜爱程度较高的人较多，对教材及各内容评价普遍较高，尤其认可插图。
- 离散程度：标准差较小，四分位数十分接近，峰度值大于 0；说明学生对教材的喜爱程度分布比正态分布更陡峭，评价较为集中，尤其对探究活动的评价一致性高。
- 直观图表：通过统计图可见，学生对教材及各内容“很喜欢”的比例均超 60%；“很喜欢”比例由高到低为：插图、探究活动、综合实践活动、图表、教科书、小结、习题、例题。
- 结论：该教材图文并茂，与现实生活联系紧密；探究活动设计符合小学生认知心理发展规律，贴合儿童天性，注重引导学生探究。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教 学 后 记					
授课时间	第 15-17 周	课 次	第 29-34 次		
章 节 名 称	**第六章 数学基本思想**				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学时数	12
教 学 目 的 要 求	了解小学数学解题常用的思想方法； 能合理运用正确的思想方法解答小学数学问题。				
教 学 方 法	讲授				

教　学 重　点 难　点	重点：掌握分析与综合、观察与归纳、枚举与筛选、化归、假设、数形结合、类比与猜想、逆推与还原等小学数学解题中常用的思想方法 难点：能合理运用正确的思想方法解答小学数学问题。

教学步骤及内容：

第一节 基本数学思想概述

情境引入

小学“三角形的三边关系”常见教学流程：

1. 动手实验 1：小组用三根小棒摆三角形，发现部分能摆成、部分不能，提出“怎样的三根小棒能摆成三角形”的问题；
2. 动手实验 2：进一步探究，发现摆成与否和小棒长度相关，完成实验记录；
3. 猜想结论：学生汇报实验结果，集体讨论结论是否正确；
4. 概括结论：总结出“三角形任意两边的和大于第三边”；
5. 验证结论：学生测量三角形三边长度，通过计算验证结论。

6.1 基本数学思想概述

6.1.1 数学方法

数学方法是解决数学问题时采用的方式、途径、手段或策略，中小学领域按层次性分为三类：

1. 解题技巧方面的方法：等量替换法、割补法、总量为 1、添项法、递推法等；
2. 逻辑方面的方法：分析法、综合法、归纳法、演绎法、类比法、抽象法、直接/间接证明法等；
3. 一般性（宏观性）的数学方法：字母表示数、数形结合、坐标法、公理法、极限法、数学模型法、关系映射法等。

6.1.2 数学思想与基本数学思想

- 数学思想：系统化、理论化、理性化的数学知识，是对数学科学研究本质及规律的深刻认识。
- 数学基本思想：数学产生和发展的核心依托，是学过数学的人应具备的思维特征；目前公认的有三种：抽象思想、推理思想、模型思想。

第二节 小学数学的抽象思想

6.2 小学数学的抽象思想

6.2.1 抽象的含义与特点

- 抽象：从众多事物中抽取出共同、本质性的特征，舍弃非本质特征。
- 特点：具有概括性和层次性；抽象与概括紧密相连，概括是从个别到一般，将事物的一般、本质属性推广到同类全体，形成普遍属性。

6.2.2 自然数的抽象

现代数学利用有限集合的基数定义自然数：表示集合中元素个数的数为基数，能建立一一对应的集

合为等价集合，具有相同基数；如集合\{a,b,c\}、3 个人、3 只羊的基数均为 3，且根据集合真子集关系可确定自然数的大小顺序（如 1<2<3）。

6.2.3 计数法的抽象

十进制计数法包含两条核心原则：

1. 十进位：满十进一，相邻计数单位进率为十（如 10 个一进十位，10 个十进百位）；
2. 位置值：同一个数字在不同数位表示的数值不同（如“22”中，前一个 2 表示 2 个十，后一个 2 表示 2 个一）。

6.2.4 四则运算的抽象

基于集合概念对自然数四则运算进行抽象定义：

1. 加法：两个不相交有限集 A、B 的基数为 a、b，并集 A∪B 的基数定义为 a+b；
2. 减法：有限集 A、B 的基数为 a、b（B⊂A），差集 A-B 的基数定义为 a-b；
3. 乘法：先定义笛卡儿集 A×B=\{(a,b)|a∈A,b∈B\}，笛卡儿集的基数定义为 a×b；
4. 除法：有限集 C 的基数为 c，若能分解为 a 个基数均为 b 的互不相交子集，则 a=c÷b。

6.2.5 分数的抽象

分数的本质是两个整数相除的商：整数 b÷a（a≠0），能除尽时商为整数，除不尽时商为分数，记作\frac{b}{a}；分数拓展了整数除法和数的范围，使整数集扩展到有理数集。

6.2.6 几何图形的抽象

为保证数学严谨性，希尔伯特在《几何基础》中对几何对象进行符号化定义：假想三组不同对象，分别为点（A、B、C…）、直线（a、b、c…）、平面（α、β、γ…）；点是直线的几何元素，点和直线是平面的几何元素，点、直线、平面是空间的几何元素。

第三节 小学数学的推理思想

6.3 小学数学的推理思想

6.3.1 推理思想概述

数学推理的两种基本模式：

- 演绎推理：从已有事实（定义、公理、定理等）和确定规则（运算定义、法则等）出发，按逻辑法则证明和计算；
- 合情推理：从已有事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳、类比等推断某些结果。

6.3.2 小学数学中的演绎推理

1. 核心形式：三段论（全称肯定型为典型），包含大前提、小前提、结论；

一般形式：A→P，x∈A，∴x→P（∴表示“所以”）；
举例：凡人皆有死（大前提），苏格拉底是人（小前提），所以苏格拉底有死（结论）。
2. 应用实例：现代乘法竖式的计算规则，依托乘法分配律推导（如 $abc\times xyz=abc\times(100x+10y+z)=(abc\times x)\times 100+(abc\times y)\times 10+abc\times z$）。

6.3.3 小学数学中的合情推理

合情推理是归纳、类比、观察、猜想等结合的推理，归纳推理和类比推理为常见形式：

1. 归纳推理：从特殊到一般的推理，命题内涵由小到大，包括简单枚举归纳推理、科学归纳推理、统计推理等；
2. 类比推理：由归纳推理派生，从特殊到特殊的推理，根据两类事物的某些性质相同/相似，推测其他性质也相同/相似。

- 合情推理是基于推断的推理，得出的结论具有或然性（不一定成立）。

第四节　小学数学的模型思想

6.4 小学数学的模型思想

6.4.1 数学模型思想概述

- 数学模型思想：用数学的语言、工具描述并解决现实问题的思想，是构建数学与现实世界联系的桥梁，也是学生体会数学与外部世界联系的基本途径。
- 建立与求解数学模型的一般过程：
1. 提出现实问题：发现/提出现实生活、社会现象中的问题；
2. 建立数学模型：对现实问题数学化抽象、简化，提取主要因素，建立因素间的关系（如函数、方程式）；
3. 求解数学模型：用数学工具、方法求出方程的解或函数的特殊信息（最值、极值等）；
4. 验证并解释结论：将模型解答与现实问题对照检验、解释，必要时校正结果，得到合理解答。

6.4.2 小学数学中的模型问题

典型实例：工程问题

1. 基础问题：修 600 米公路，甲队单独修 20 天完成，乙队单独修 30 天完成，两队合修需要多少天完成？
2. 简化问题：甲队单独修 20 天完成，乙队单独修 30 天完成，两队合修需要多少天完成？
3. 同类拓展问题：排水问题——一个水池，单开进水管 24 小时灌满空池，单开排水管 36 小时排光满池水，两管齐开几小时灌满空池？

模型思想的教学要点

模型思想无法单独作为数学内容专门教学，需融入具体数学知识的教学过程，让学生在“问题情境—建立模型—解决问题—拓展应用”的学习过程中逐步领悟。

<table>
<tr><td colspan="6">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第　18　周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 35-36 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">期末复习</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">回顾本学期的学习，巩固知识点。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="5">讲授</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="5">重点：熟练掌握各个知识。
难点：熟练应用各个知识。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学步骤及内容：</td></tr>
<tr><td colspan="6">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>