揭阳职业技术学院

电子商务创业学院

《运筹学》教案

（2025-2026 学年第 2 学期）

教师姓名：梁庭欢

所授专业：电子商务（专本协同）

授课班级：241

课程整体教学设计

一、课程的性质和任务

本课程是全日制电子商务（专本协同）专业学生的一门必修的重要基础理论课，是现代管理学的一门重要专业基础课，是应用数学和形式科学的跨领域研究。它利用统计学、数学模型和算法等方法，去寻找复杂问题中的最佳或近似最佳的解答。

通过本课程的学习，要使学生掌握运筹学的基本概念和理论，了解运筹学的主要分支和应用领域，能够构建和求解运筹学模型，掌握常用的运筹学方法和技术。

在课程的教学过程中，要通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、数学建模与实践能力，注意培养学生的自学能力，注意理论联系实际，不断提高学生的综合素质以及运用所学知识解决实际问题的能力。

二、教学目标与要求

1.了解运筹学的含义、发展简史、基本特征和基本方法。

2.了解运筹学的主要分支和应用领域。

3.掌握线性规划问题的数学模型和标准化方法。

4.掌握图解法、单纯形法及其计算步骤。

5.理解对偶理论和灵敏度分析。

6.掌握整数规划问题的基本概念和数学模型。

7.掌握割平面法、分支定界法和隐枚举法等求解方法。

8.了解指派问题的数学模型和求解方法。

9.掌握动态规划的基本原理，包括最优解的性质（如最优子结构和无后效性）、状态转移方程的构建以及边界条件的确定。

10.理解动态规划在数学、管理科学、经济学、生物信息学、计算机科学等领域的应用背景。

11.了解 LINGO 软件的使用。

12.《运筹学》的思政教学目标：立足“知识——能力——价值观”三位一体，通过科学思维训练、国家战略对接、职业道德塑造，培养兼具专业能力与社会责任感的新时代人才，实现“为党育人、为国育才”的教育使命。

三、教学方法与手段

该课程以老师讲授与启发为主，辅以学生讨论、练习与自学。

(1) 精讲多练，注重学生基础知识的掌握;

(2) 激发学生兴趣，加强自主学习;

(3) 注意学习方法，指导培养自学能力。

四、理论与实践课程内容与学时分配

课程内容和学时分配表

章节（序号）	内 容	学时数			
		理论	实践、实验	总学时	
0	绪论	1	0	1	
第一章	线性规划基础	3	2	5	
第二章	单纯形法	6	2	8	
第三章	线性规划模型的建立	3	2	5	
第四章	对偶理论	7	2	9	
第五章	运输问题	5	2	7	
第六章	整数规划	8	2	10	
第七章	动态规划	4	2	6	
机动课	习题课	1	2	3	
合计		38	16	54	

授课时间	第 1 周	课 次	第 1 次		
章 节 名 称	绪论 、第一章 线性规划基础 §1 线性规划问题的数学模型 §2 线性规划模型的标准形式 §3 线性规划模型的图解法				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）		教学时数	3	
教 学 目 的 要 求	(1)、了解运筹学的基本概况、掌握运筹学的研究方法与模型、理解运筹学的应用价值与前景、培养学习兴趣与动机，并为后续学习奠定基础。				(3)

	(2) 、理解线性规划的基本概念、掌握线性规划的标准形式与求解方法、了解问题解的概念以及熟悉其基本性质	
思政元素	在运筹学课程中，通过讲解优化问题，可以引入国家发展战略中的实际案例，如“一带一路”建设中的资源配置问题、区域经济协同发展中的产业布局问题等。这些案例能够让学生理解优化思想在国家层面的应用，增强对国家政策的理解和认同感。同时，通过决策分析部分的学习，探讨不同决策方案对社会、环境等方面的影响，可以引导学生思考如何在追求经济利益的同时兼顾社会责任和环境保护，从而培养学生的全局观念。	
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学	
教　学 重　点 难　点	重点：线性规划的标准形式与求解方法 难点：问题解的概念以及熟悉其基本性质。	
教学步骤及内容：		

运筹学是一门以系统思想和定量优化为方法解决实际问题的学科。

本书案例围绕交通运输、物流、管理、经济和生产工程等问题，深入浅出地介绍问题的背景和特点、建模的方法和技巧、求解问题的算法步骤，并对结果进行了验证和分析。通过这些案例，可以了解和掌握解决复杂工程问题的思路和方法。

李引珍的"管理运筹学"课程2006年被教育部批准为国家精品课程。

本书特点：1. 学以致用，兼顾理论

2. 由浅入深，循序渐进

3. 联系实际，例题丰富

4. 对LINGO软件做了相关介绍。

绪论

运筹学自20世纪40年代发展起来，新兴应用学

一、运筹学的发展历程

1. 战国时期 田忌赛马

2. 古希腊 阿基米德《十四巧板》 组合数学

3. 欧拉 1736年 《哥尼斯堡的七座桥》 图论

(一) 萌芽于一战时

(二) 兴起于二战时 OR 运筹学

Operational Research

(三) 二战后蓬勃发展

1956年，钱学森、许国志共率先将运筹学介绍到中

(四) 20世纪70年代衰落

(五). 运筹学的发展趋势

运筹软件的出现，"软运筹学"

复杂巨系统的计算机模拟、经济博弈论、供应链

理论将是运筹学未来的主要研究内容。

二. 运筹学的定义、特点及主要内容
OR.

(一) 运筹学的定义

应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。

量化、决策、最优

(二) 运筹学的特点

(1) 系统性 (2) 量化性 (3) 多学科性 (4) 理论性和应用性

(三) 运筹学的主要内容

线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、存储论、图与网络优化、博弈论、决策论、排队论和启发式方法等。

三. 运筹学的应用

应用领域：经济、管理、工程技术、军事、其他领域

利用运筹学解决实际问题的步骤：(1) 系统分析 (2) 建立模型 (3) 求解模型 (4) 结果分析 (5) 解的实施

Ch1 线性规划基础

LP linear programming

研究线性约束条件下线性目标函数极值问题的数学理论和方法.

问题的提出大致分为两种类型：一是在给定人力、物力、财力等资源的情况下，研究如何充分利用资源，得到最大的经济效益或最高的生产效率.

二是给定计划任务，研究如何统筹安排，用最少的资源完成规定的任务.

第一节 线性规划问题的数学模型

由决策变量、目标函数和约束条件构成.

均为决策变量的线性函数

P7.[例1.1] $\max z = 2x_1 + 3x_2$ —目标函数

$$s.t.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 \le 60 \end{array}\right\} \text{—条件约束} \\ x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{— 变量约束} \end{cases}$$

P8.[例1.2] 决策变量假设为含有两个下标的变量.

P8.[例1.2] 决策变量假设为含有两个下标的变量.

第二节 线性规划模型的标准形式

一、标准形式

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$ ① 目标函数求最大值

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geq 0, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

② 等式 ③ b_i非负 ④ 决策变量非负

二、转化为标准形式的方法. $\boxed{P12. 表1-3}$

P12.[例1.3]

三、解的概念

$$\max z=CX$$ P13. 图1-1

$$s.t.\begin{cases}AX=b \\ X\geq 0\end{cases}$$ 线性规划

P14.[例1.4] 写出下列线性规划模型的全部基、基解、基可行解和最优解.

$$\min z=3x_1+5x_2$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6 \\ x_1+x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_5=2 \\ x_j\geq 0, \ j=1,2,\cdots,5\end{cases}$$

四、解的分类

P15. 图1-2. 线性规划问题解的分类

解的分类 $\begin{cases} 无可行解 \\ 有可行解 \begin{cases} 有最优解 \begin{cases} 唯一最优解 \\ 无穷多最优解 \end{cases} \\ 无最优解 \end{cases} \end{cases}$

第三节 线性规划模型的图解法

求解线性规划模型常用：

$\begin{cases} 图解法：决策变量不超过3个 \\ 单纯形法：一般适用 \end{cases}$

一、图解法的步骤 P15.

坐标系作图.

第一步：求可行解集合（可行域）

形状为凸集、P23 图2-1 凸集和非凸集的图示.

第二步：寻找最优解

P16.[例1.5] 用图解法求解例1.1的模型.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

结合例题讲步骤

二. 特殊解的情况

(1) 无穷多最优解

P17 [例1.6]

(2) 无可行解

P18 [例1.7]

(3) 无最优解

P18 [例1.8]

P19. 第一章 线性规划基础 习题

1. 设生产A.B.C三种产品的数量分别为 x_1、x_2、x_3 件.

则线性规划模型如下:

$$\max z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

时 单位 件?

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \le 2000 \\ 2x_1 + 1.2x_2 + x_3 \le 1000 \\ 200 \le x_1 \le 250 \\ 250 \le x_2 \le 280 \\ 100 \le x_3 \le 120 \end{cases}$$

<table>
<tr><td colspan="6">复习思考题、作业题：
P19 第一章习题 第 1、2、3、5、8 题</td></tr>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点
第一章习题课
第二章 单纯形法
§1 线性规划问题的几何意义
§2 单纯形法原理</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="5">《运筹学》这门课内容多且难，课时一周只有 3 节，学生数学基础尚未达到本科要求，课堂教学安排有点紧张。备课时我把教学资料上传到学习通上去，企图借用学习通平台节省板书时间，提高教学效率，然而上课时发现教室电脑很慢且无法上网，最终只能借助课件和板书，挑重点地把绪论和第一章的内容讲完了。总的来说，班里有提前预习、认真听讲的几位同学，就学得很不错，而个别同学的教材都还没有到货，所以听起来有点迷糊。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 2 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 2 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">第一章习题课
第二章 单纯形法
§1 线性规划问题的几何意义
§2 单纯形法原理</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">(1)、理解单纯形法的基本原理
(2)、掌握单纯形法的标准形式</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="5">创新精神与迭代思维
单纯形法通过“进基——出基”迭代逐步逼近最优解，体现“循序渐进、勇于试错”的创新方法论。
思政案例：
以“华为芯片研发”为例，说明技术突破需经历多次迭代优化，呼应“关键核心技术攻坚”的国家战略需求。</td></tr>
</table>

教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：掌握单纯形法的标准形式 难点：理解单纯形法的基本原理
教学步骤及内容：	

第二章 单纯形法

第一节 线性规划问题的几何意义

一、基本概念

P23. 凸集

极点

凸组合

二、相关定理

P28. 结论

(1) 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集(可能为无界的凸集)，包含有限个极点；线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个极点。

(2) 线性规划问题的可行解集若非空且有界，则一定有最优解。若最优解唯一，则必在某个极点上得到；若具有多重最优解，则最优解是某些极点的凸组合。即最优解是可行解集的极点或界点，不可能

是可行解集的内点.

(3) 线性规划问题的可行解集若无界，则可能有最优解，也可能没有最优解。若线性规划问题只有无界解，则可行域一定无界

第二节 单纯形法原理 P28. 例2.2

复习思考题、作业题：

P49 第二章习题第 1 题

下次课预习要点

§3 单纯形法的计算步骤

§4 单纯形法的进一步讨论

教 学 后 记	这部分内容理论性较强，同学们不太容易理解。因此在讲授过程中，务必结合例子，宁可慢点也要讲透，否则欲速不达，影响后面的学习。该让学生记的地方就得记，比如 P28 顶部关于线性规划问题的解的结论。P31 单纯形法理论的推导过程，由于涉及较多线性代数矩阵运算的内容，考虑到学生线性代数基础不是太好，可以略过，把重点放在应用它来解题上去。

授课时间	第 3 周	课 次	第 3 次	
章 节 名 称	第二章 单纯形法 §3 单纯形法的计算步骤 §4 单纯形法的进一步讨论			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）		教学时数	3
教 学 目 的 要 求	1、掌握单纯形法的标准形式 2、熟悉单纯形法的计算步骤 3、理解单纯形法的数学表达以及掌握应用技巧			
思政元素	严谨规范意识：表格化操作的严格步骤（如检验数计算、主元选择）培养精益求精的工匠精神，类比制造业精密工艺流程。			

<table>
<tr><td>教　学
方　法</td><td>讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td>重点：单纯形法的计算步骤
难点：大 M 法和两阶段法的区别</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学步骤及内容：</td></tr>
</table>

第三节 单纯形法的计算步骤

P34 例2.3 用单纯形法求解线性规划模型:

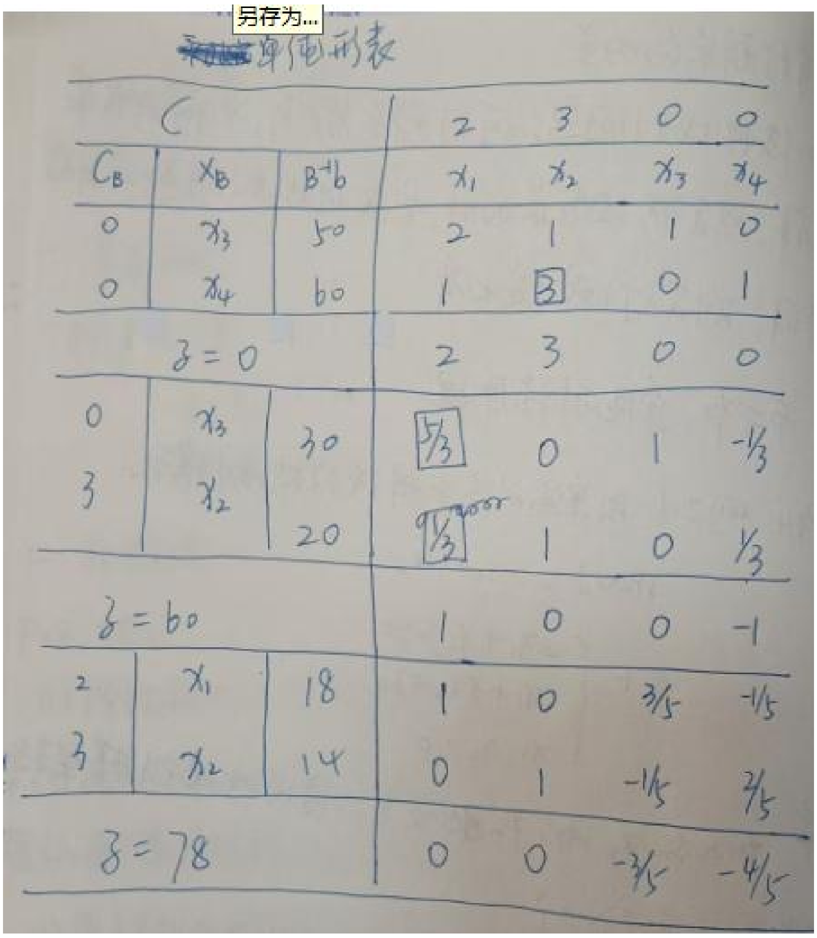
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 加入x_3, x_4两个松弛变量, 将线性规划模型转化为标准形式, 即

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



另存为...

~~[illegible]~~单纯形表

		C	2	3	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	50	2	1	1	0
0	x_4	60	1	$\boxed{3}$	0	1
$z=0$			2	3	0	0
0	x_3	30	$\boxed{5/3}$	0	1	$-1/3$
3	x_2	20	$\boxed{1/3}$	1	0	$1/3$
$z=60$			1	0	0	-1
2	x_1	18	1	0	$3/5$	$-1/5$
3	x_2	14	0	1	$-1/5$	$2/5$
$z=78$			0	0	$-3/5$	$-4/5$

或　单纯形表

		C	2	3	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	50	$\boxed{2}$	1	1	0
0	x_4	60	1	3	0	1
	$z=0$		2	3	0	0
2	x_1	25	1	1/2	1/2	0
0	x_4	35	0	$\boxed{5/2}$	-1/2	1
	$z=50$		0	2	-1	0
2	x_1	18	1	0	3/5	-1/5
3	x_2	14	0	1	-1/5	2/5
	$z=78$		0	0	-3/5	-4/5

左、右两页分别对应于P36. 图2-4 的求解路径1 和 求解路径2.

P37 单纯形法解的讨论

唯一最优解：基变量的检验数一定为零，而非基变量的检验数为负数.

多重最优解：若在最优表中所有基变量的取值均大于零，且存在检验数为零的非基变量，则线性规划具有多重最优解。此时，引入该检验数为零的非基变量，可得到另一个最优基可行解.

无界解：若存在$\lambda_j > 0$且$a_{ij} \le 0$ $(i=1,2,\dots,m)$. 则线性规划具有无界解（即找不到最优解）.

退化解：基变量取值为零. 则称该基可行解为退化解，说明该线性规划问题是退化的.

P37. 例2.4 用单纯形法求解下列线性规划模型：

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：加入松弛变量 x_3 和 x_4，将线性规划模型转化为标准形式，即

多重最优解

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形表

C			2	1	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	50	$\boxed{2}$	1	1	0
0	x_4	60	1	3	0	1
$z=0$			2	1	0	0
2	x_1	25	1	1/2	1/2	0
0	x_4	35	0	$\boxed{5/2}$	-1/2	1
$z=50$			0	0	-1	0

C			2	1	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_1	18	1	0	3/5	-1/5
1	x_2	14	0	1	-1/5	$\boxed{2/5}$
$z=50$			0	0	-1	0
2	x_1	25	1	1/2	1/2	0
0	x_4	35	0	5/2	-1/2	1
$z=50$			0	0	-1	0

P38. 例2.5 求解如下线性规划模型:

无界解

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解: 加入松弛变量, 将模型转化为标准形式, 即

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0\times x_3 + 0\times x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形表

	C		2	1	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	10	$\boxed{1}$	-1	1	0
0	x_4	40	2	-1	0	1
	$z=0$		2	1	0	0
2	x_1	10	1	-1	1	0
0	x_4	20	0	$\boxed{1}$	-2	1
	$z=20$		0	3	-2	0
2	x_1	30	1	0	-1	1
1	x_2	20	0	1	-2	1
	$z=80$		0	0	4	-3

P39. 例2.6 退化解 求解下列线性规划模型：

$$\min z = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5$$

$$\max(-z) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + x_4 + 3x_5 = 30 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots 5 \end{cases}$$

解：

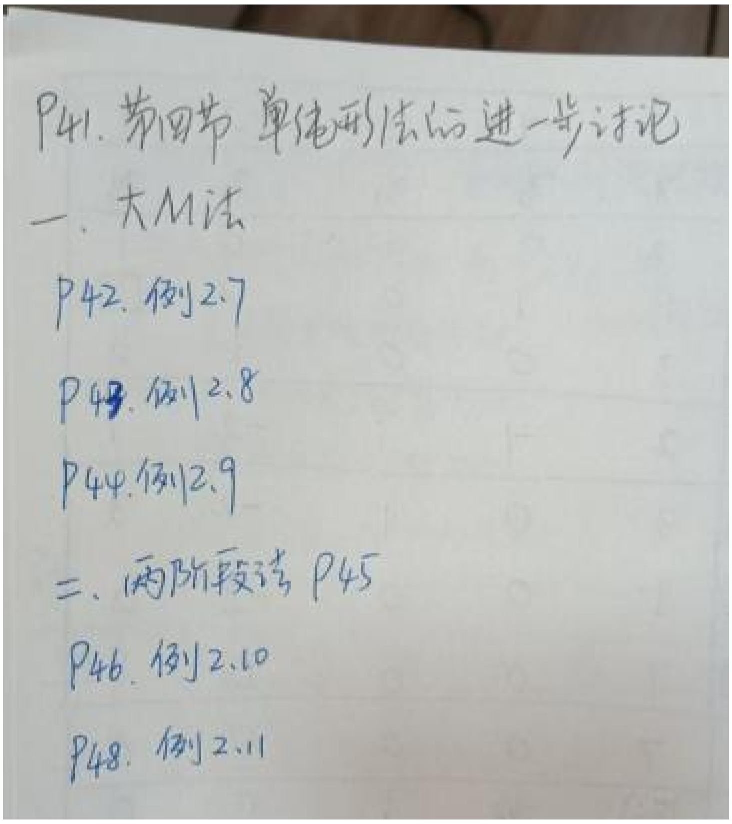
	c		2	-1	1	-2	1
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	20	2	0	1	0	1
-1	x_2	10	$\boxed{1}$	1	0	0	2
-2	x_4	30	3	0	0	1	3
$-z = -50$			2	-1	1	-2	1
1	x_3	0	0	-2	1	0	-3
2	x_1	10	1	1	0	0	2
-2	x_4	0	0	-3	0	1	-3
$-z = 20$			0	-3	1	-2	-3

做不下去了. x_3 已在基.

换

	C		2	−1	1	−2	1
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	20	2	0	1	0	1
−1	x_2	10	1	1	0	0	$\boxed{2}$
−2	x_4	30	3	0	0	1	3
$-z=-50$			2	−1	1	−2	1
		$+x_2$行	3	0	1	−2	3
		$-x_3$行	1	0	0	−2	2
P40 ~~图~~ 表2-8		$+2x_4$行	7	0	0	0	8
$-z=-50$			7	0	0	0	8
1	x_3	15	$\boxed{3/2}$	−1/2	1	0	0
1	x_5	5	1/2	1/2	0	0	1
−2	x_4	15	3/2	−3/2	0	1	0
$-z=-10$			3	−4	0	0	0
2	x_1	10	1	−1/3	2/3	0	0
1	x_5	0	0	2/3	−1/3	0	1
−2	x_4	0	0	−1	−1	1	0
$-z=20$			0	−3	−2	0	0

基取零. 退化解.



P41. 第四节 单纯形法的进一步讨论

一、大M法

P42. 例2.7

P43. 例2.8

P44. 例2.9

二、两阶段法 P45

P46. 例2.10

P48. 例2.11

复习思考题、作业题：

P52 第二章习题第 3 题、第 7 题

下次课预习要点

第二章习题课

第三章 线性规划模型的建立

§1 线性规划问题举例

教 学 后 记	这部分用单纯形法求解线性规划模型，解的不同情况的判断可以参照 P37 顶部四种情况：(1)唯一最优解(2)多重最优解(3)无界解(4)退化解

授课时间	第 4 周	课 次	第 4 次	
章 节 名 称	第二章习题课 第三章 线性规划模型的建立 §1 线性规划问题举例			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ √ ）、其它（ ）		教学 时数	3
教 学 目 的 要 求	明确线性规划问题的背景与目标、确定决策变量、建立目标函数、列出约束条件、确保线性关系以及模型检验与调整。			

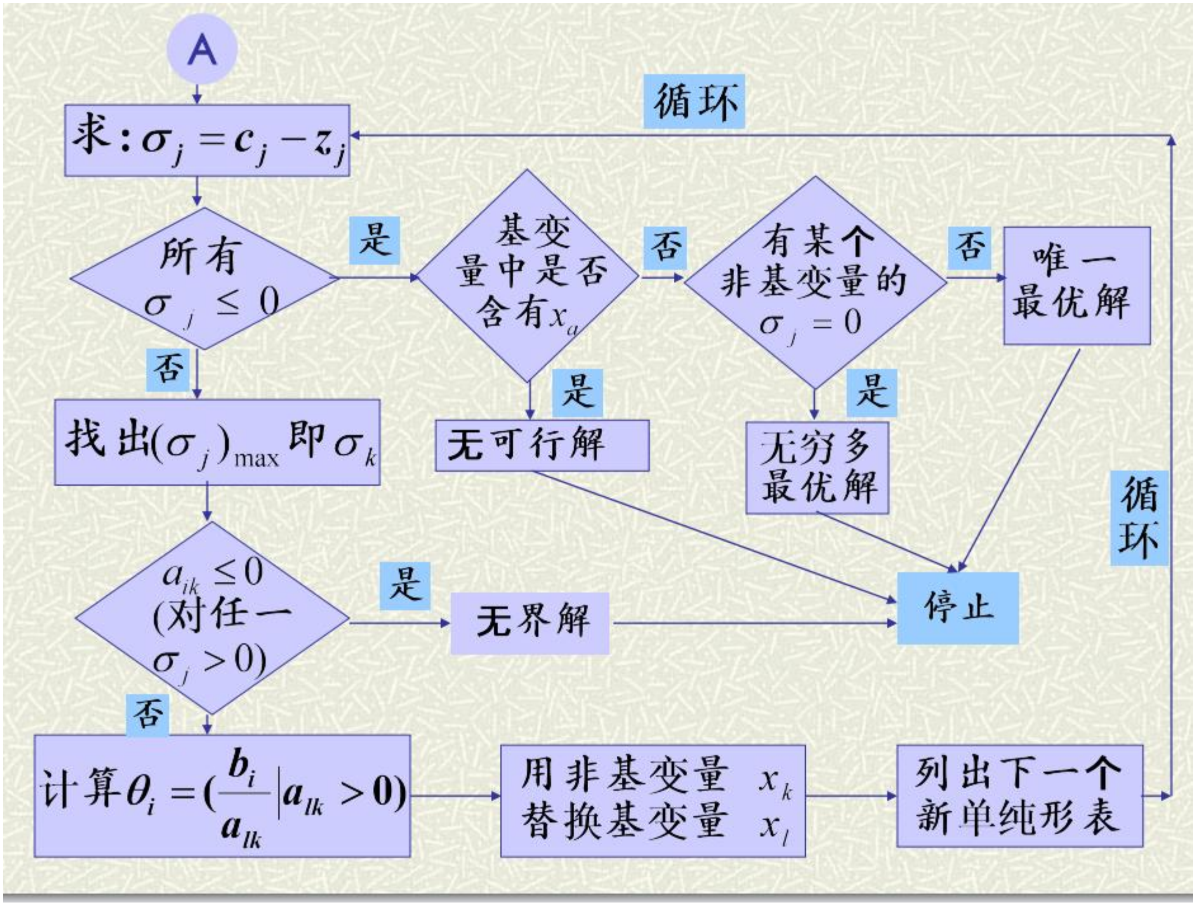
思政元素	以案例为纽带，传递全局观、社会担当与科学报国理念，深化专业学习的现实意义。
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：单纯形法和大 M 法和两阶段法的区别与联系，线性规划模型的建立 难点：单纯形法和大 M 法和两阶段法的区别与联系

教学步骤及内容：

一、总结单纯形法计算步骤并练习

单纯~~性~~形法小结:

建立模型	个数		取值			右端项		等式或不等式			极大或极小		新加变量系数	
	两个	三个以上	$x_j \ge 0$	x_j无约束	$x_j \le 0$	$b_i \ge 0$	$b_i < 0$	$\le$	$=$	$\ge$	max Z	min Z	x_s	x_a
求解	图解法、单纯形法	单纯形法	不处理	令$x_j = x_j' - x_j''$ $x_j' \ge 0$ $x_j'' \ge 0$	令$x_j' = -x_j$	不处理	约束条件两端同乘以-1	加松弛变量x_s	加入人工变量x_a	减去x_s加入x_a	不处理	令$z' = -Z$ $\min Z = -\max z'$	0	$-M$



单纯形法的计算步骤

例1.12 用单纯形法求下列线性规划的最优解

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：1）将问题化为标准型，加入松弛变量x_3、x_4则标准型为:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法的计算步骤

2）求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

c_j			3	4	0	0	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	
σ_j			3	4	0	0	

检验数

$$\sigma_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21}) = 3 - (0\times 2 + 0\times 1) = 3$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_3 a_{12} + c_4 a_{22}) = 4 - (0\times 1 + 0\times 3) = 4$$

单纯形法的计算步骤

3）进行最优性检验

如果表中所有检验数 $\sigma_j \le 0$ ，则表中的基可行解就是问题的最优解，计算停止。否则继续下一步。

4）从一个基可行解转换到另一个目标值更大的基可行解，列出新的单纯形表

① 确定换入基的变量。选择$\sigma_j > 0$，对应的变量x_j作为换入变量，当有一个以上检验数大于0时，一般选择最大的一个检验数，即：$\sigma_k = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$ ，其对应的x_k作为换入变量。

② 确定换出变量。根据下式计算并选择θ，选最小的θ对应基变量作为换出变量。

$$\theta_L = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\}$$

单纯形法的计算步骤

③ 用换入变量x_k替换基变量中的换出变量，得到一个新的基。对应新的基可以找出一个新的基可行解，并相应地可以画出一个新的单纯形表。

④ 5）重复3）、4）步直到计算结束为止。

单纯形法的计算步骤

换入列　　b_i/a_{i2}，$a_{i2}>0$

将3化为1

	c_j		3	4	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	40
0	x_4	30	1	3	0	1	10
σ_j			3	4	0	0	
0	x_3	30	5/3	0	1	−1/3	18
4	x_2	10	1/3	1	0	1/3	30
σ_j			5/3	0	0	−4/3	
3	x_1	18	1	0	3/5	−1/5	
4	x_2	4	0	1	−1/5	−2/5	
σ_j			0	0	−1	−1	

换出行

乘以1/3后得到

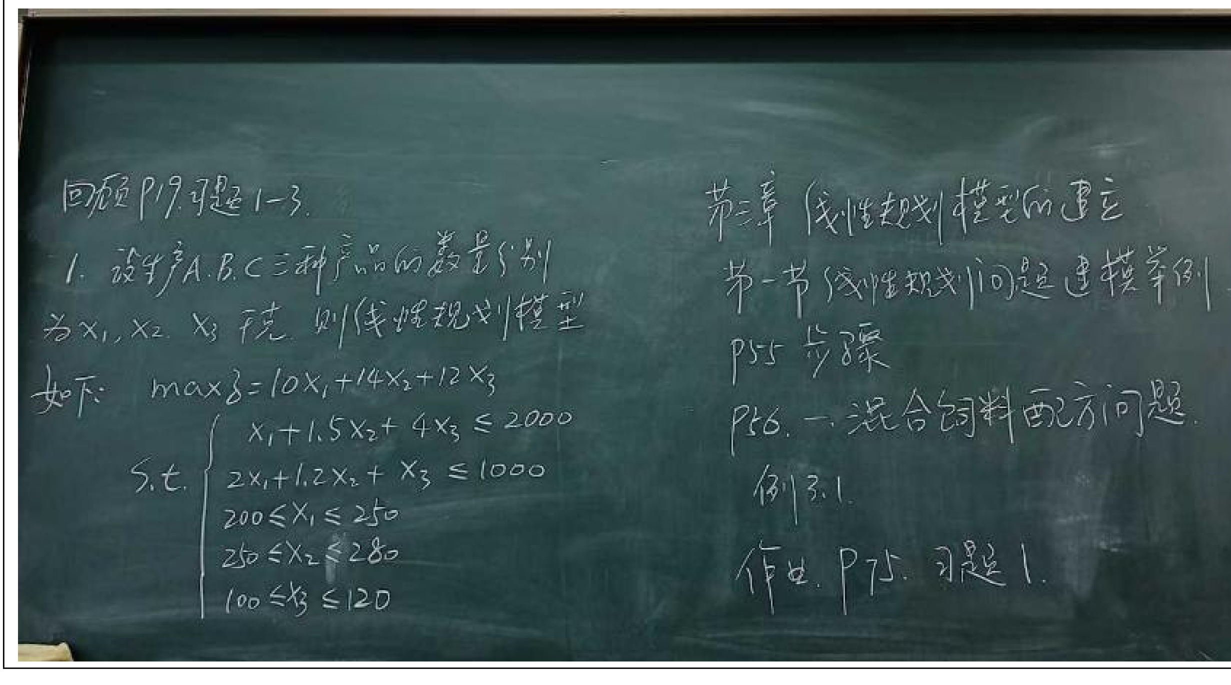
二、复习用大M法和两阶段法求解一道练习题

■ 求解线性规划问题：

$$\max \quad z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

三、讲授新课：第三章 线性规划模型的建立 §1 线性规划问题举例



习题

1\. 动物园为小动物制定食谱，可供选择的蔬菜及其每份费用、每份所含营养成分的数量，以及这类小动物每周所需各种营养成分的最低数量如表 3-13 所示。

表 3-13 蔬菜的营养成分及费用

蔬菜	每份所含营养成分/毫克					每份费用/元
	铁	磷	维生素 A	维生素 C	烟酸	
青豆	0.45	10	415	8	0.3	0.15
胡萝卜	0.45	28	9 065	3	0.35	0.15
花菜	1.05	50	2 550	53	0.6	0.24
卷心菜	0.4	25	75	27	0.15	0.06
甜菜	0.5	22	15	5	0.25	0.18
土豆	0.5	75	235	8	0.8	0.1
每周最低需求量/毫克	6	325	17 500	245	5	

另外规定所用卷心菜不多于 2 份，其他蔬菜不多于 4 份。已知动物园一共有 14 只小动物，每只小动物需要 1 份食谱，问选用每种蔬菜各多少份使总成本最小？

解：给各种蔬菜编序号，依次为：

1 青豆 2 胡萝卜 3 花菜 4 卷心菜 5 甜菜 6 土豆

设 x_j 为第 j 种蔬菜的份数，即选用青豆 x_1 份，胡萝卜 x_2 份，……，依此类推 $j=1,2,\dots,6$

目标为总成本最小，即

$$\min z = 14\times(0.15x_1+0.15x_2+0.24x_3+0.06x_4+0.18x_5+0.1x_6).$$

约束条件为一份食谱中所需的各种营养成分应满足以下各需求.

(1) 一份食谱中对铁的含量要求：

$$0.45x_1+0.45x_2+1.05x_3+0.4x_4+0.5x_5+0.5x_6\geq 6$$

(2) 一份食谱中对磷的含量要求：

$$10x_1+28x_2+50x_3+25x_4+22x_5+75x_6\geq 325$$

(3) 一份食谱中对维生素A的含量要求：

$$415x_1+9065x_2+2550x_3+75x_4+15x_5+235x_6\geq 17500$$

(4) 一份食谱中对维生素C的含量要求：

$$8x_1+3x_2+53x_3+27x_4+5x_5+8x_6\geq 245$$

(5) 一份食谱中对烟酸的含量要求：

$$0.3x_1+0.35x_2+0.6x_3+0.15x_4+0.25x_5+0.8x_6\geq 5$$

(6) 其它约束

$$0\leq x_4\leq 2,\ 0\leq x_j\leq 4,\ j=1,2,3,5,6$$

复习思考题、作业题：

【例 4.1】某液晶面板生产企业生产甲、乙两种规格的 TFT（thin film transistor，薄膜晶体管）液晶显示器，生产流程主要包括 TFT 加工、彩色滤光器加工、单元装配和模块装配四道工序，分别在四种设备 A、B、C、D 上加工，每台显示器加工所需的机时数（时）、利润及每种设备的可利用机时数见表 4-1。

表 4-1　产品及资源信息表

产品	设备				单位产品利润/元
	A	B	C	D	
甲	2	1	4	2	7
乙	2	3	1	3	5
设备可利用机时数/时	20	15	32	21	

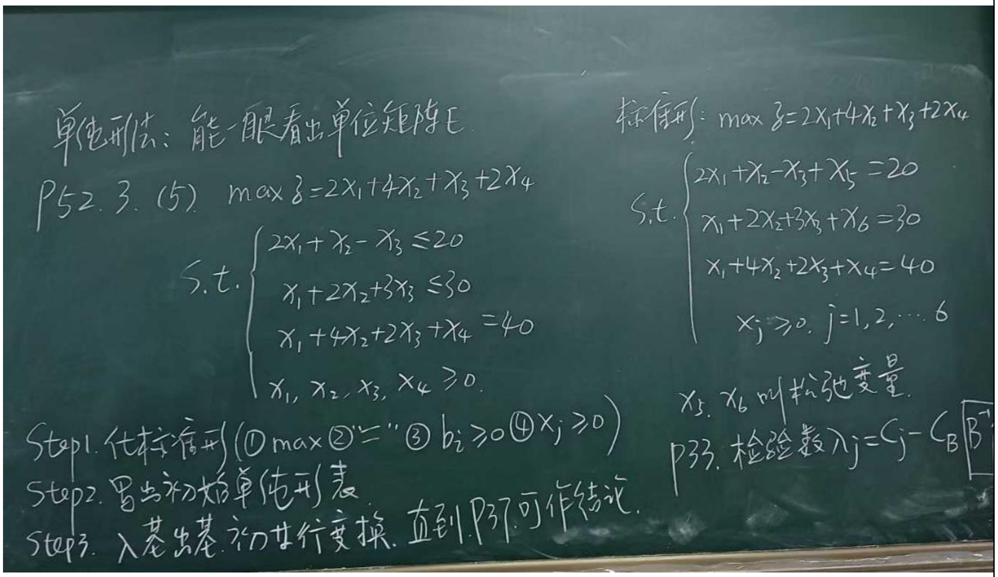
为充分利用设备机时，工厂应生产甲、乙显示器各多少台才能获得最大利润？

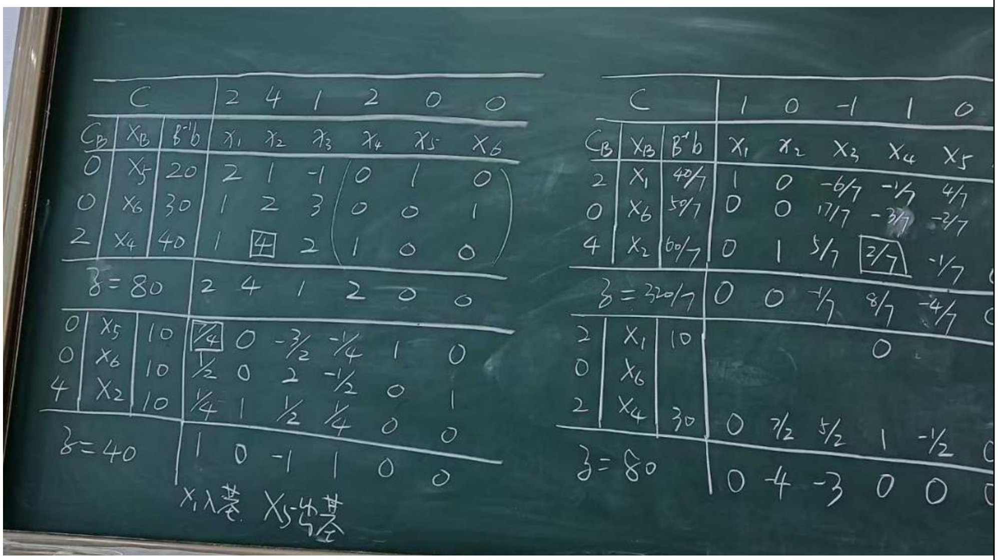
下次课预习要点

§2 应用 LINGO 软件求解线性规划问题

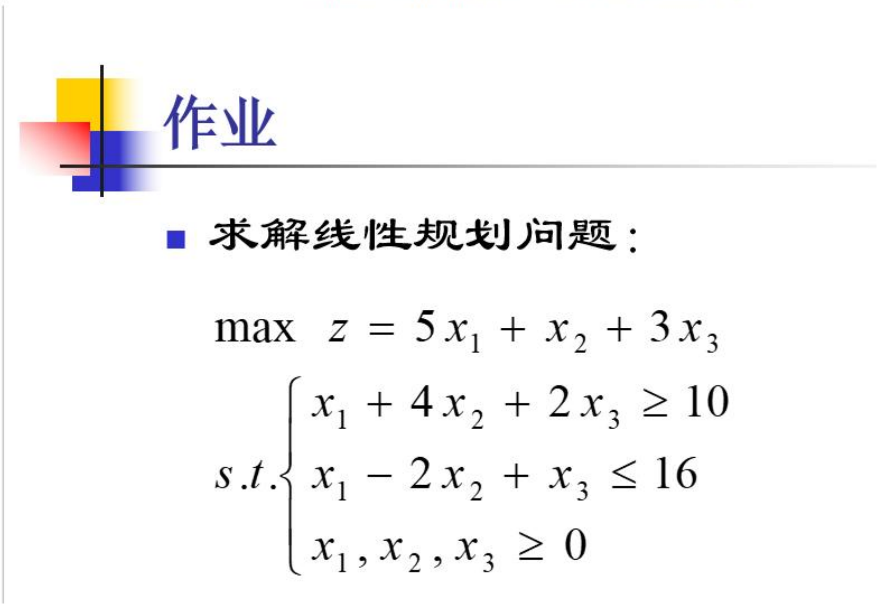
第三章习题

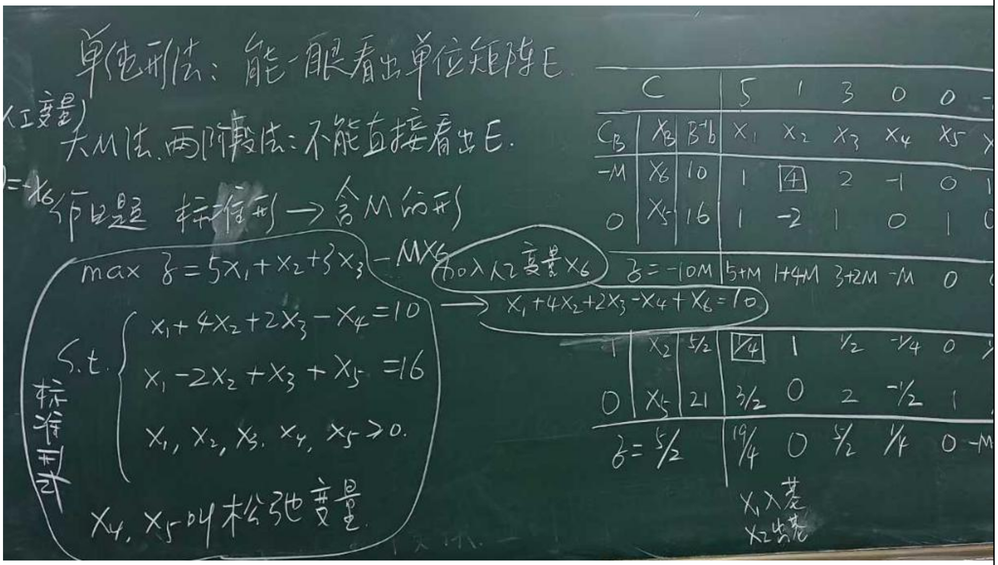
教　学 后　记	今天班里好几个学生外出参加省的技能大赛去了，剩下不到一半的学生来上课，我就对第二章内容做了总结，并安排了 3 道练习题，让学生比较单纯形法、大 M 法和两阶段法。学生们听课认真，踊跃参与，思路紧跟老师，课堂氛围很好。为了便于请假学生回来自学，我把课堂过程都拍了下来，发到课程群里，受到学生欢迎。

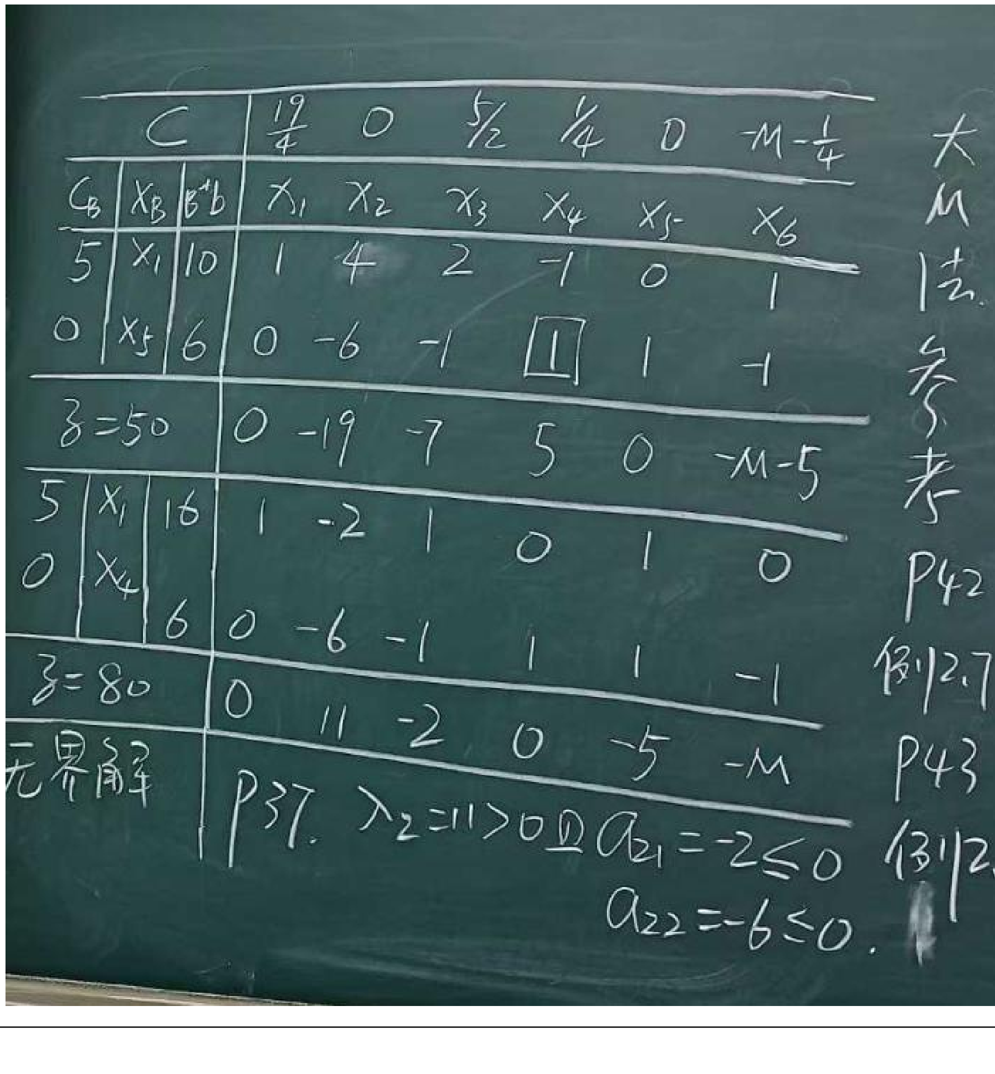


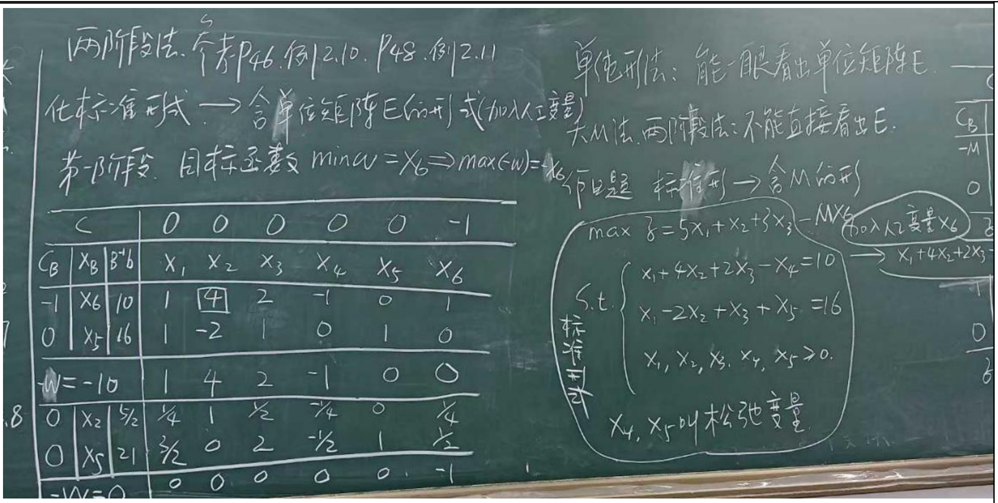
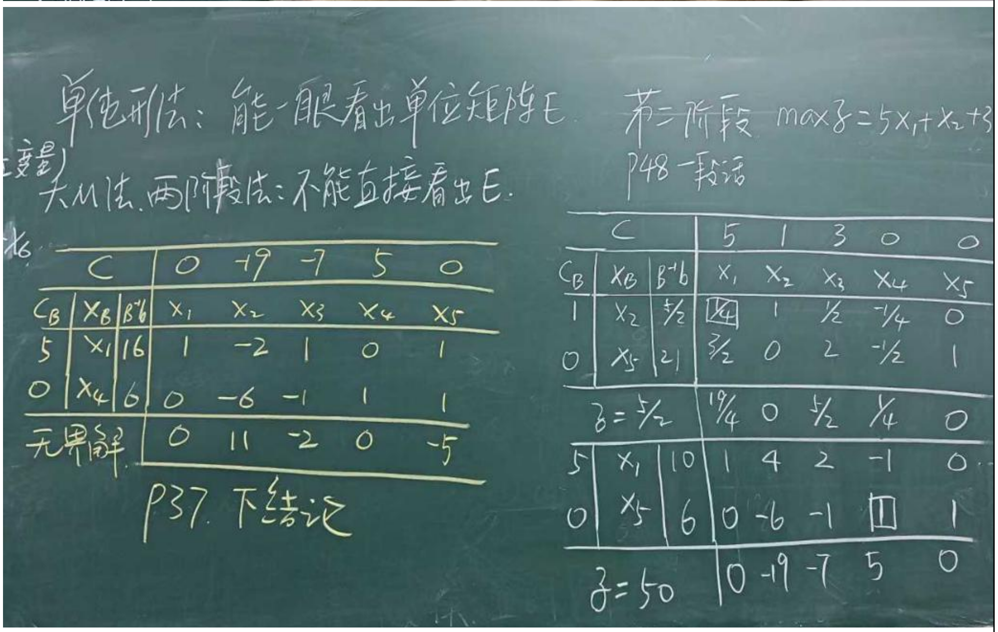
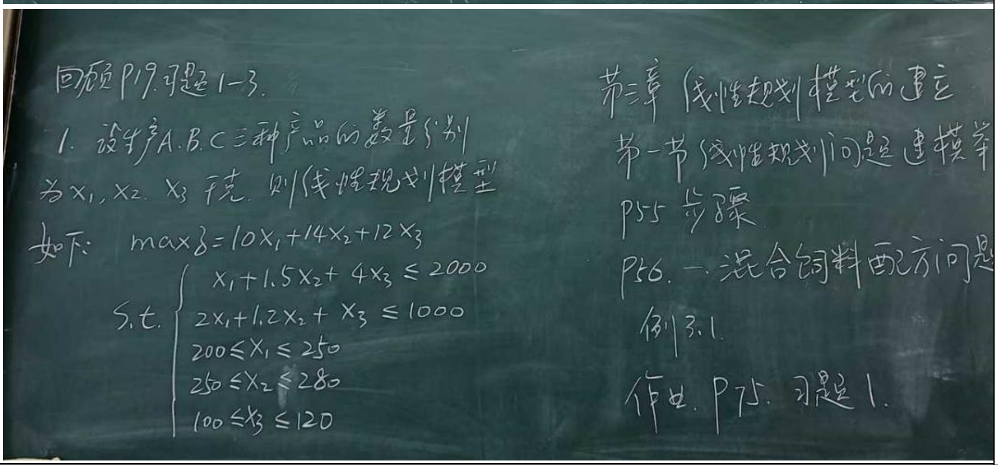


分别用大M法和两阶段法，求解下列线性规划问题。




单纯形法：能一眼看出单位矩阵E
大M法、两阶段法：不能直接看出E.
(人工变量)
例题 标准型 → 含M的型
max z = 5x1 + x2 + 3x3 − Mx6
x6人工变量x6
s.t. x1 + 4x2 + 2x3 − x4 = 10
x1 − 2x2 + x3 + x5 = 16
x1, x2, x3, x4, x5 ≥ 0.
x1 + 4x2 + 2x3 − x4 + x6 = 10
标准型式
x4, x5叫松弛变量
x1入基
x2出基


大M法
参考
P42
例2.7
P43
例2
无界解
P37. λ2 = 11 > 0 且 a21 = −2 ≤ 0
a22 = −6 ≤ 0.

授课时间	第　5　　周	课　次	第 5 次
章　节 名　称	第三章　§2 应用 LINGO 软件求解线性规划问题 第三章习题		

<table>
<tr><td>授　课
方　式</td><td>理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="3">1. 应用LINGO软件求解线性规划问题需要掌握软件的基本操作、熟悉问题要素的定义与输入、了解结果的分析与解读方法，并注意软件使用中的技巧和注意事项。
2．复习巩固第三章内容。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="3">技术创新与科技报国：掌握工具提升决策效率，体现核心技术自主可控的价值，如国产软件替代对“卡脖子”问题的突破。
严谨求实态度：参数输入的精确性警示“数据即责任”，呼应医疗资源调度中的零容错要求。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="3">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="3">重点：应用 LINGO 软件求解线性规划问题
难点：线性规划模型的建立</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学步骤及内容：</td></tr>
</table>

三、物流配送中心选址问题

P58-59 例3.3 易

四、作业车间调度问题

P59. 例3.4 难

五、人力资源分配问题

P60 例3.5 难

六、设备租借问题

P61-62. 例3.6 难

七、投资问题

P63 例3.7 易

八、非线性函数的线性化处理

P64. 例3.8 易

第二节 应用LINGO软件求解线性规划问题

P65 求解最优化问题的软件有 LINDO/LINGO, Mathematica, Matlab 和Excel等.

P66. LINGO. 交互式的线性与通用优化求解器

① 可求解线性规划问题和二次规划问题

② 可求解非线性规划问题和非线性方程组

具有输入简单、求解速度快，并能对结果进行分析等优点，因而被广泛使用。

LINGO 是 linear interactive and general optimizer 的缩写，意为“交互式的线性与通用优化求解器”，同 LINDO 软件一起是由美国芝加哥大学的 L. Schrage 教授于 20 世纪 80 年代开发的。LINGO 除了具有 LINDO 的全部功能（可以求解线性规划问题和二次规划问题）外，还能求解非线性规划问题和非线性方程组，因此功能十分强大。其特色在于内置了建模语言，可以通过简练、直观的方式描述较大规模的优化问题，同时提供近百个内部函数，方便与 Excel 数据库等其他软件交换数据。

我们使用的版本是 LINGO 11.0，与之前的版本相比，该版本可以计算随机规划问题。下面以例 3.3 为例，介绍如何应用 LINGO 求解线性规划问题。

当我们打开 LINGO 11.0（汉化版）后，会看到如图 3-2 所示的初始界面。

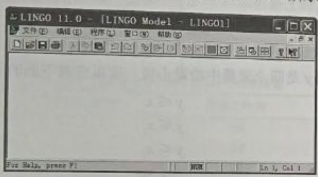


图 3-2 LINGO 的初始界面

其中，标有“LINGO 11.0”的是主窗口，顶部包含了所有菜单命令和工具条。在主窗口内，标题为“LINGO Model-LINGO1”的窗口是 LINGO 的默认模型窗口，建立的模型都要在该窗口内编码实现。

在模型窗口中输入例 3.3 的代码，如图 3-3 所示。

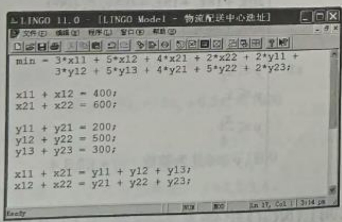


图 3-3 LINGO 代码

LINGO 代码与手写的线性规划模型极为相似，分为目标函数与约束条件。目标函数中用“max=”表示求极大值，“min=”表示求极小值。目标函数与每个约束条件必须以分号结尾，否则模型无法求解。由于 LINGO 中已假设所有的变量是非负

的，所以非负约束不必再输入。

需注意以下几点。

（1）LINGO 中不能省略乘号，需用“*”表示乘号。

（2）LINGO 不区分变量的大小写字符（任何小写字符都将被转换为大写字符）。

（3）约束条件中的“<=”可由“<”代替，“>=”可由“>”代替。

（4）即使运行完程序，LINGO 也无法自动保存，所以每次修改程序后，都应主动存盘。

（5）LINGO 对字体特别敏感，特别是标点符号，只能使用英文输入法，而且必须是 LINGO 默认的 Courier New 字体，否则程序无法运行。

点击工具条上的按钮或菜单命令“LINGO|Solve”，在计算的同时会出现“Solver Status”（求解状态）窗口，如图 3-4 所示。当运行结束后关闭求解状态窗口就得到“Solution Report”（解决方案报告）窗口，如图 3-5 所示。

图 3-4 求解状态窗口

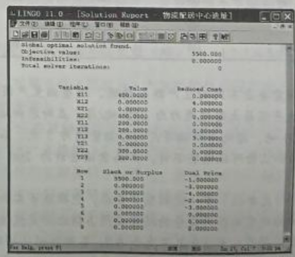
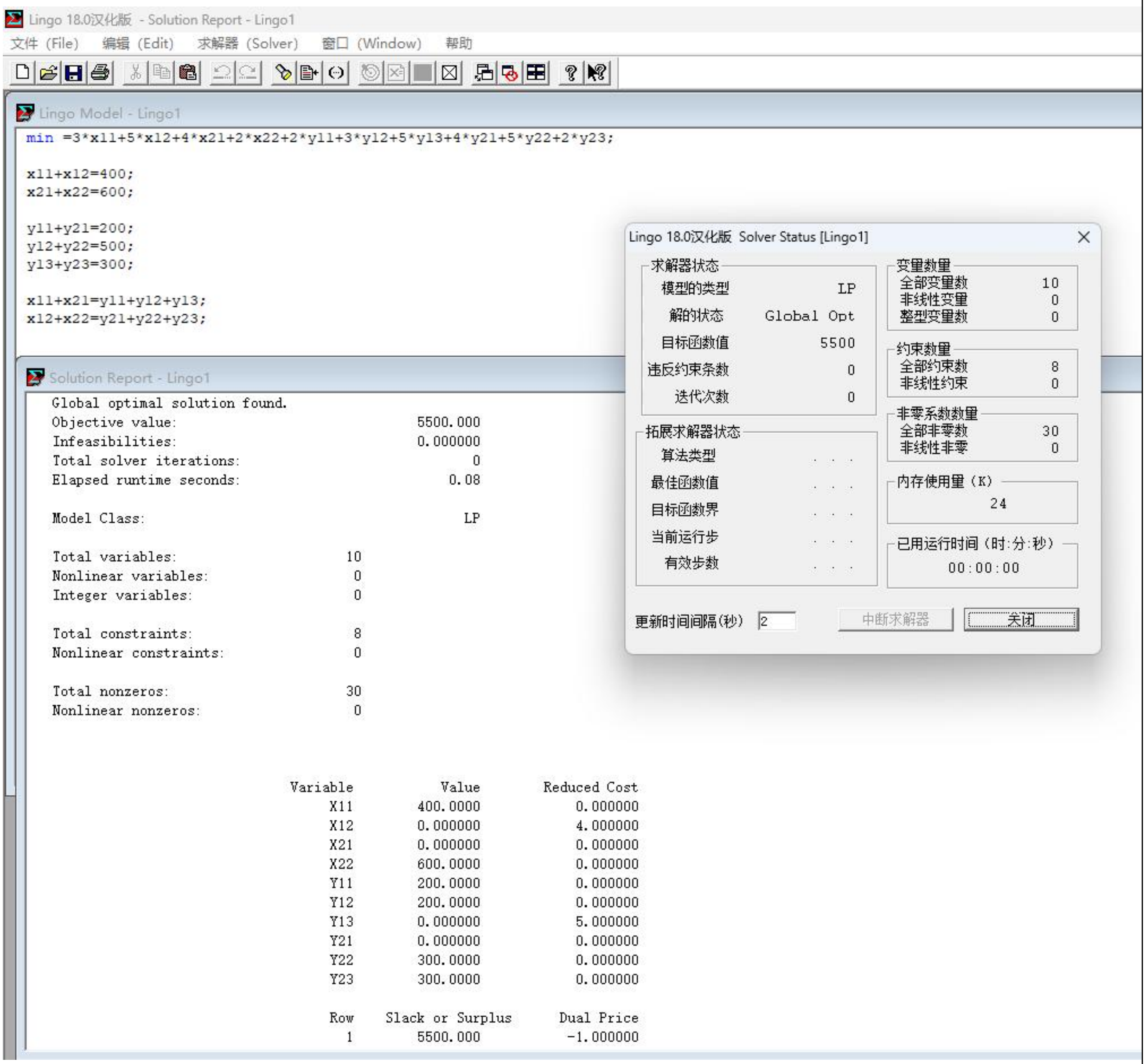


图 3-5 解决方案报告窗口

实验：P58 【例 3.3】


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
min =3*x11+5*x12+4*x21+2*x22+2*y11+3*y12+5*y13+4*y21+5*y22+2*y23;
x11+x12=400;
x21+x22=600;
y11+y21=200;
y12+y22=500;
y13+y23=300;
x11+x21=y11+y12+y13;
x12+x22=y21+y22+y23;
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]
求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 5500
违反约束条数 0
迭代次数 0
变量数量
全部变量数 10
非线性变量 0
整型变量数 0
约束数量
全部约束数 8
非线性约束 0
非零系数数量
全部非零数 30
非线性非零 0
拓展求解器状态
算法类型
最佳函数值
目标函数界
当前运行步
有效步数
内存使用量 (K)
24
已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00
更新时间间隔(秒) 2
中断求解器
关闭
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 5500.000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 0
Elapsed runtime seconds: 0.08
Model Class: LP
Total variables: 10
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 8
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 30
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X11 400.0000 0.000000
X12 0.000000 4.000000
X21 0.000000 0.000000
X22 600.0000 0.000000
Y11 200.0000 0.000000
Y12 200.0000 0.000000
Y13 0.000000 5.000000
Y21 0.000000 0.000000
Y22 300.0000 0.000000
Y23 300.0000 0.000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 5500.000 -1.000000

实验：P63 【例 3.7】

Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1

文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助

Lingo Model - Lingo1

```
max=4.93*x1+9.25*x2+7.8*x3+5*x4+7.38*x5+5.25*x6;

x1+x2+x3+x4+x5+x6<2;

x1<0.4;
x2<1.2;
x3<0.8;
x4<0.7;
x5<1.5;
x6<0.5;
```

Solution Report - Lingo1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              17.34000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             1
Elapsed runtime seconds:                          0.12

Model Class:                                        LP

Total variables:                      6
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    8
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      18
Nonlinear nonzeros:                   0


                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        0.000000            2.450000
                             X2        1.200000            0.000000
                             X3       0.8000000            0.000000
                             X4        0.000000            2.380000
                             X5        0.000000            0.000000
                             X6        0.000000            2.130000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        17.34000            1.000000
                              2        0.000000            7.380000
                              3       0.4000000            0.000000
                              4        0.000000            1.870000
                              5        0.000000           0.4200000
```

Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]

求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 17.34
违反约束条数 0
迭代次数 1

拓展求解器状态
算法类型 . . .
最佳函数值 . . .
目标函数界 . . .
当前运行步 . . .
有效步数 . . .

变量数量
全部变量数 6
非线性变量 0
整型变量数 0

约束数量
全部约束数 8
非线性约束 0

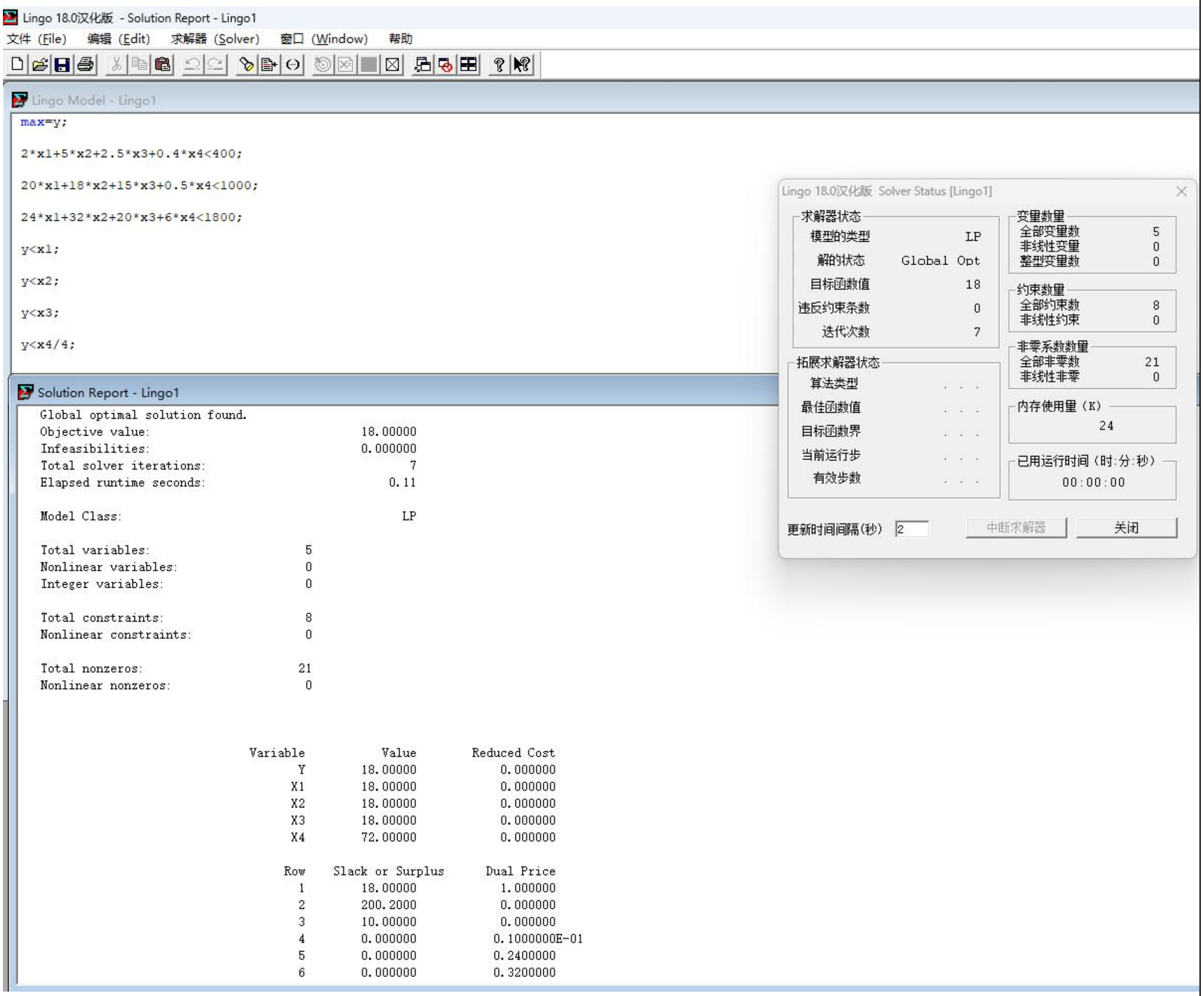
非零系数数量
全部非零数 18
非线性非零 0

内存使用量 (K)
24

已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00

更新时间间隔(秒) 2
中断求解器 关闭

实验：P64 【例 3.8】



复习思考题、作业题：

应用 LINGO 软件求解 P75 第 3 题。

下次课预习要点

第四章 对偶理论

§1 对偶问题的提出及模型的建立

§2 对偶问题的基本性质和经济解释

§3 对偶单纯形法

教 学 后 记	由于课程教学没有安排机房，课前我提醒同学们自行带笔记本电脑来教室，我教他们安装 LINGO 软件，熟悉使用方法，并对课本第二章的部分例题以及作业题进行了软件运算验证，感受到 LINGO 的方便，然后再选取了几个稍微复杂一点的例题，从建模到软件运算，都走了一遍。同学们配

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">合度高，积极主动学习，感觉良好。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 6 周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第 6 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">第四章 对偶理论
§1 对偶问题的提出及模型的建立
§2 对偶问题的基本性质和经济解释
§3 对偶单纯形法</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">1. 学会构建与原问题相对应的对偶问题，并理解对偶理论的核心性质，如对称性、弱对偶性、最优性、强对偶性和互补松弛性。
2. 掌握对偶单纯形法
3. 了解通过影子价格读懂经济信息。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="4">1.辩证统一思维：原问题与对偶问题的对称性体现“矛盾对立统一”的哲学观，如经济发展与生态保护的平衡；
2.全局优化意识：影子价格的经济解释揭示资源稀缺性，引导关注国家资源战略配置（如稀土资源管控）；
3.创新方法论：对偶单纯形法通过逆向迭代突破局部最优，呼应“双循环”新发展格局的破局思维；
4.责任伦理：从“成本——收益”对偶性引申企业社会责任与经济效益的双重目标，强化商业向善价值观。
综合：以理论为镜，培养辩证思维、战略眼光与社会担当，赋能高质量发展决策。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：构建与原问题相对应的对偶问题，对偶单纯形法
难点：对偶理论的核心性质</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第四章前三节授课思路

P80 第一节 对偶问题的提出及模型的建立
P86 第二节 对偶问题的基本性质和经济解释
P92. 第三节 对偶单纯形法.

一. P80.[例4.1] 对偶问题的提出

二. 如何建立对偶问题

两种方法 ① 转化为对称式（不讲. 自学）
② 直接建立（建议学好）

参考 P84.[例4.2]

此方法回到 P80 [例4.1] 检验 对偶问题

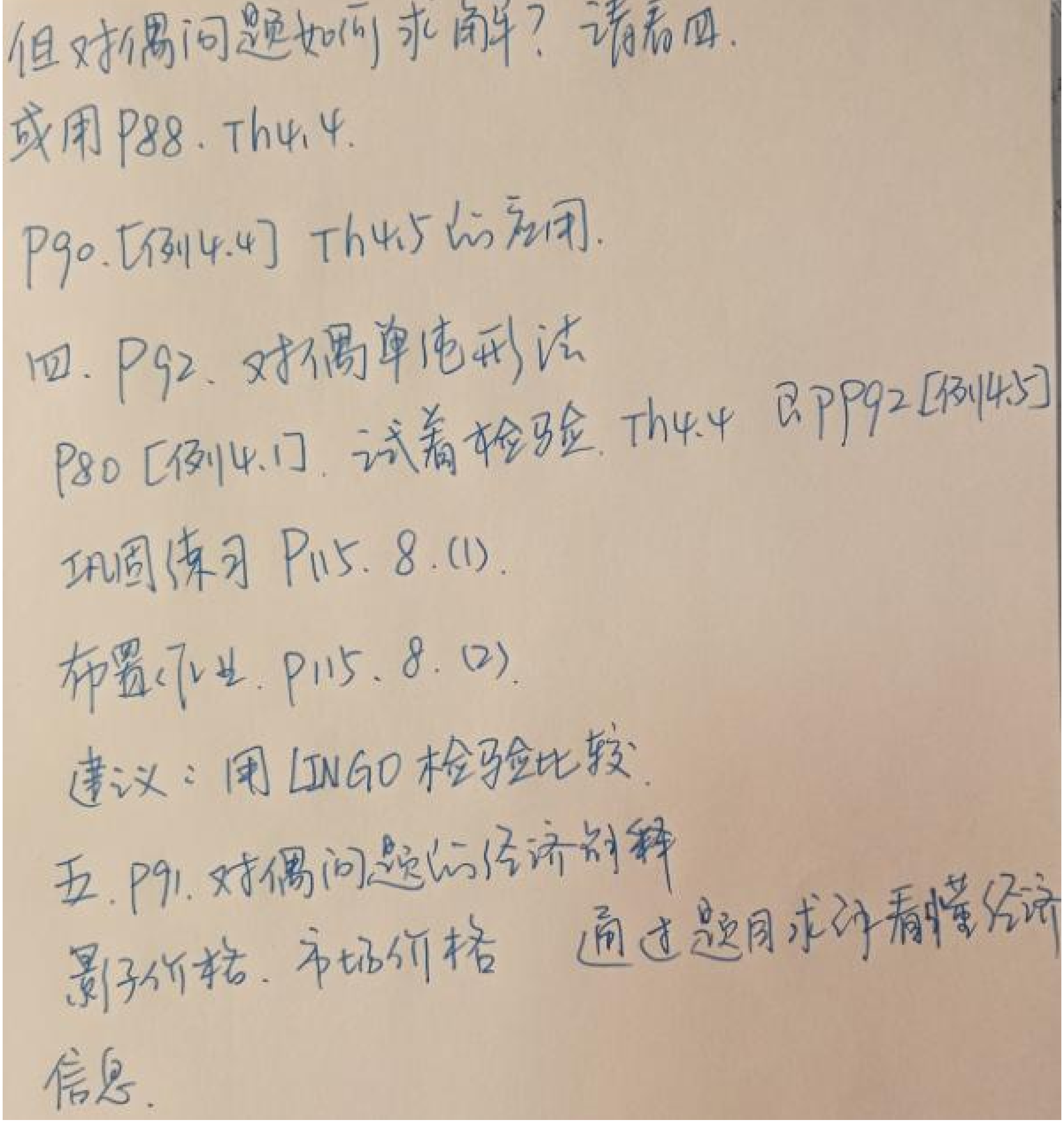
巩固练习 P112. 习题1. (1). (2).

三. 为何要学习对偶理论

P86-89 Th4.1～Th4.5

其中 Th4.1. 4.2. 4.4. 4.5 为重点. 又以 Th4.4 为最重点.

P80. [例4.1]. 单纯形法. 图解法. LINGO 均可求解



但对偶问题如何求解？请看四.

或用P88. Th4.4.

P90.[例4.4] Th4.5的应用.

四. P92. 对偶单纯形法

P80 [例4.1]. 试着检验. Th4.4 即P92 [例4.5]

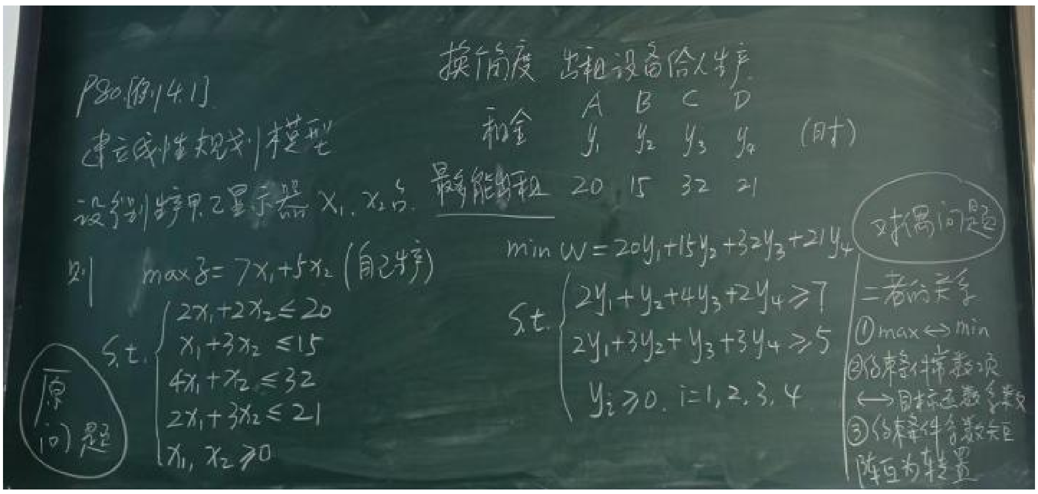
巩固练习 P115. 8.(1).

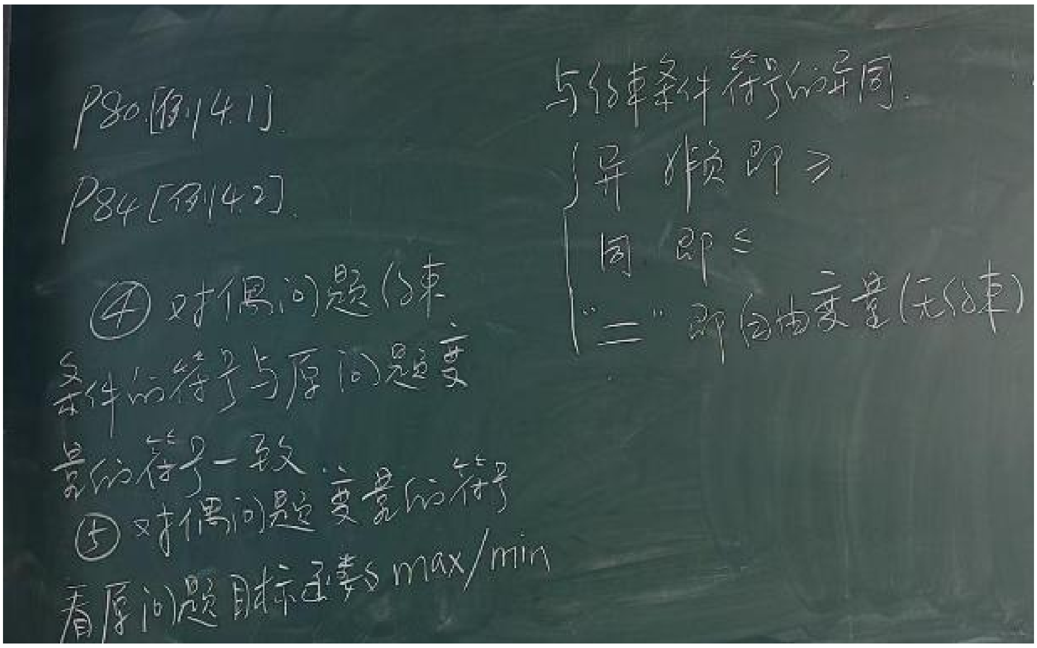
布置作业. P115. 8.(2).

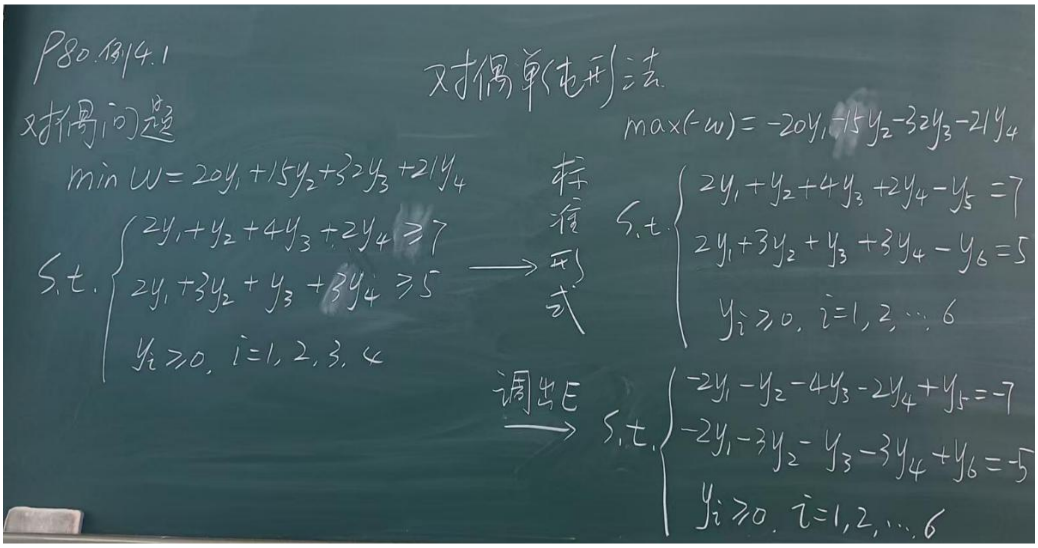
建议：用LINGO检验比较.

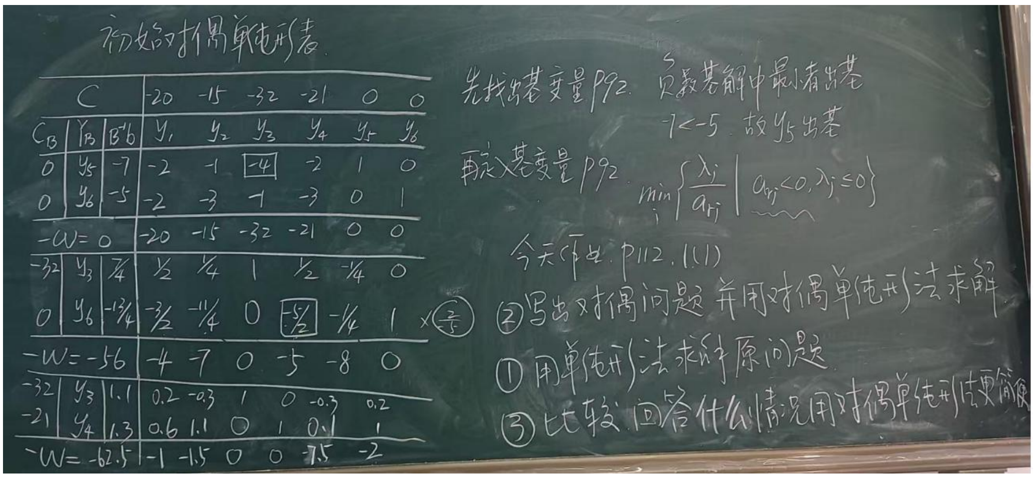
五. P91. 对偶问题的经济解释

影子价格. 市场价格　通过题目求解看懂经济信息.









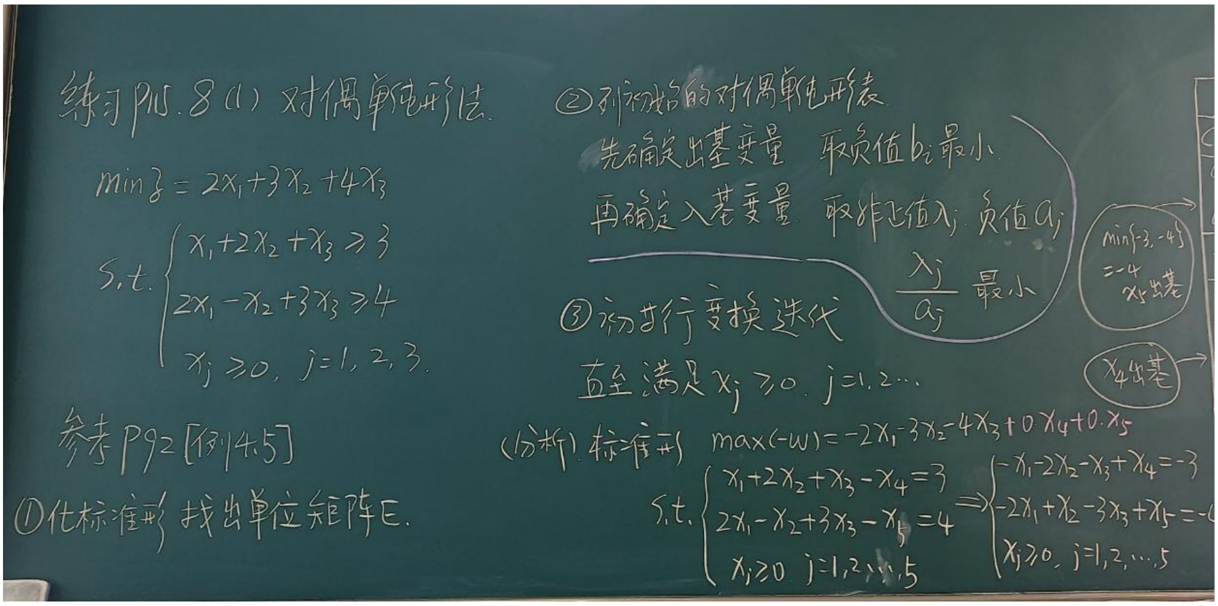
复习思考题、作业题：

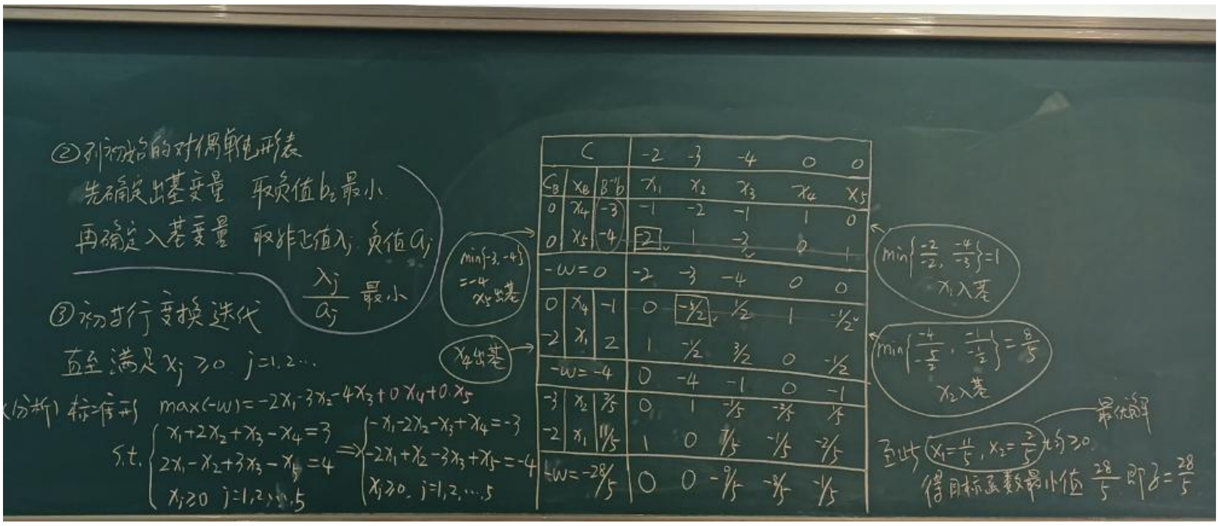
P112 第 1 题(1)(2)、P115 第 8 题(2)

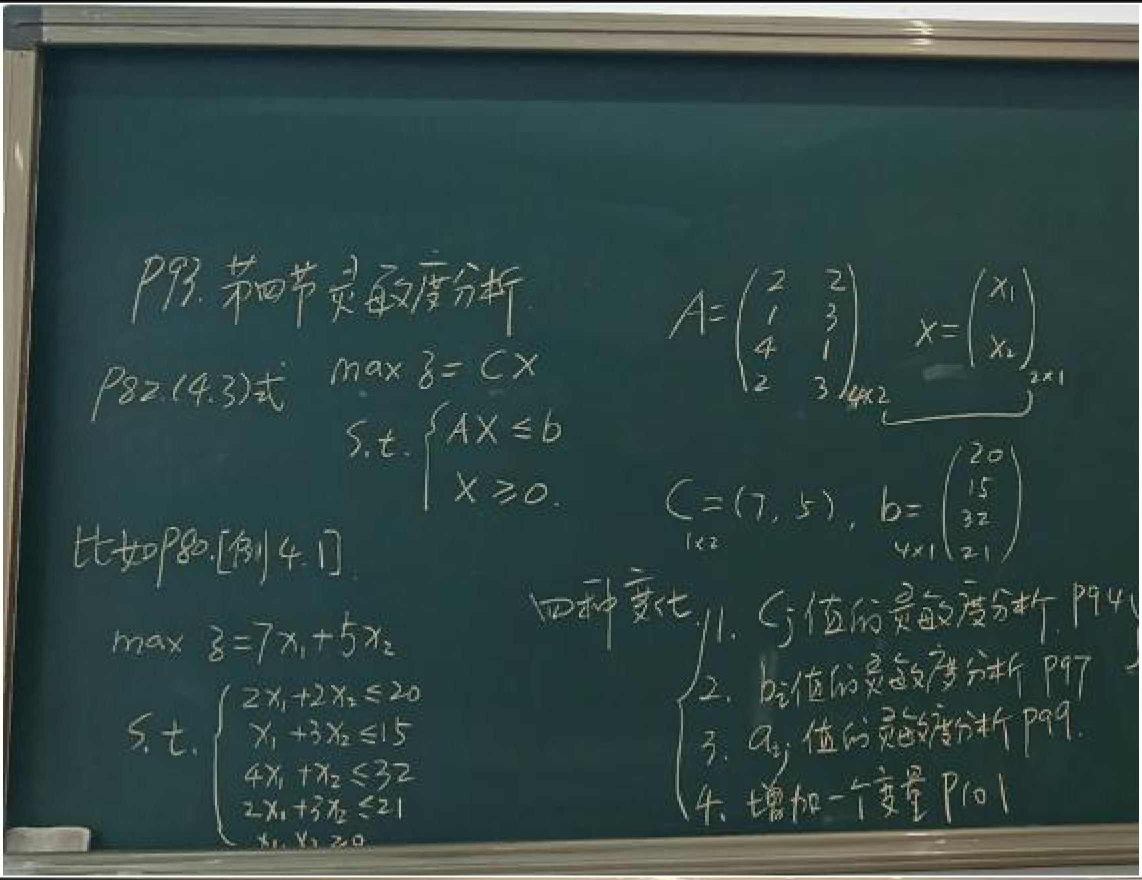
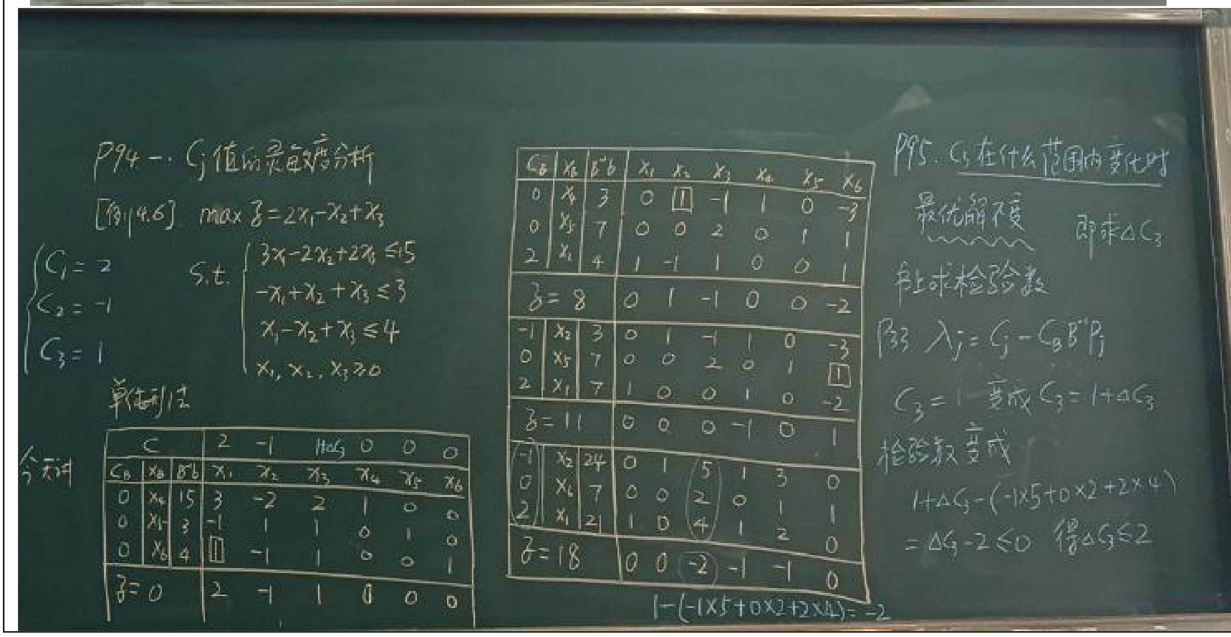
<table>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点
§4 灵敏度分析
§5 参数线性规划</td></tr>
<tr><td>教学后记</td><td colspan="4">本次课的讲授主要抓住对偶问题的提出，如何建立对偶问题，并使用对偶单纯形法求解，对偶理论的 5 个定理难度较大，且课时有限，不专门去一条条讲解，重点讲同个线性规划的对偶问题是唯一的、强对偶性，其余在解题过程涉及再适时补充。从课堂练习的情况上看，同学们对如何建立对偶问题的过程比较模糊，尤其是对偶问题约束条件的符号和决策变量的符号如何确定，还存在一点麻烦，通过巡堂发现问题，及时板书，总结出原问题和对偶问题的关系①②③④⑤。对比课本 P83-84 烧脑的规则，同学们反映黑板的五条经验总结明显浅显易懂。再布置练习时，同学们就轻松掌握了。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 7 周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第 7 次</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="4">第四章 对偶理论
§4 灵敏度分析
§5 参数线性规划</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td>理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学时数</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>教学目的要求</td><td colspan="4">1. 理解灵敏度分析的基本原理，包括对目标函数系数和约束条件右端项变化的分析。
2. 掌握进行灵敏度分析的方法，例如使用单纯形法的最终表格来计算允许的变化范围。
3. 能够应用灵敏度分析的结果，解释影子价格、减少成本等概念的经济意义。
4. 理解参数线性规划的概念，能够处理含参数的线性规划问题，确定参数变化时的最优解变化规律。
5. 能够划分参数的临界值，并描述各个区间内的最优解情况。
6. 结合实际问题，如生产计划、资源分配等，进行参数变化的影响分析，制定相应的策略。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="4">底线思维与风险意识：分析参数波动对解的影响，类比经济政策调整需预</td></tr>
</table>

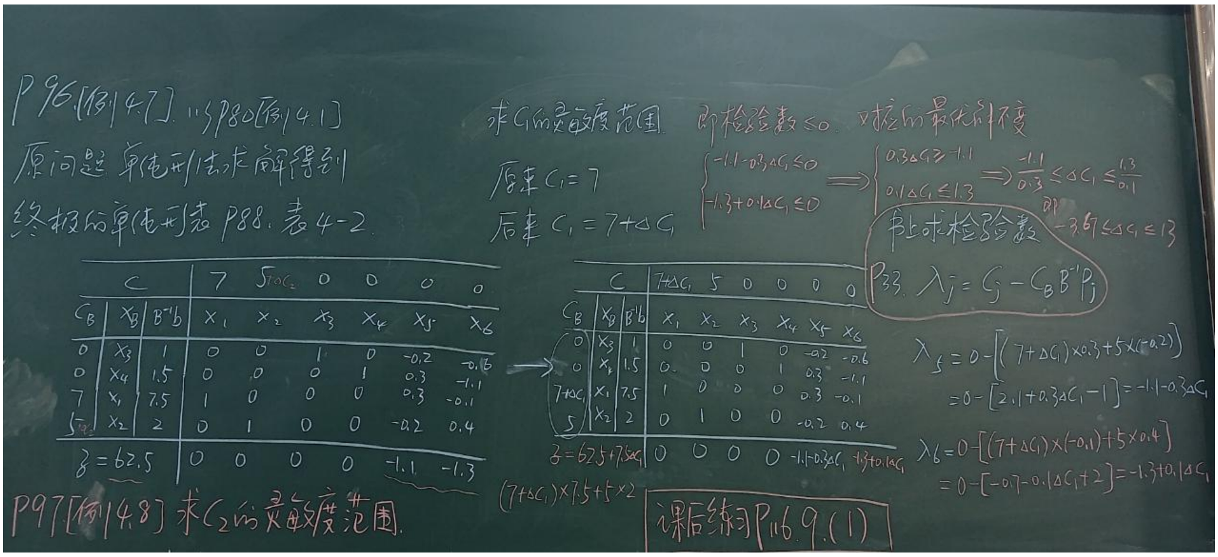
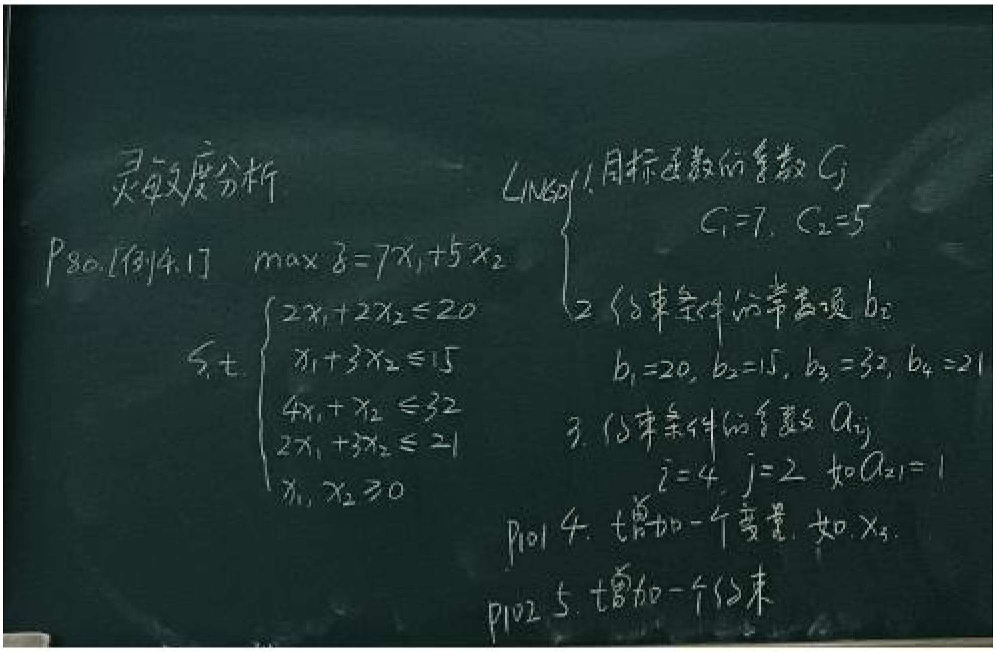
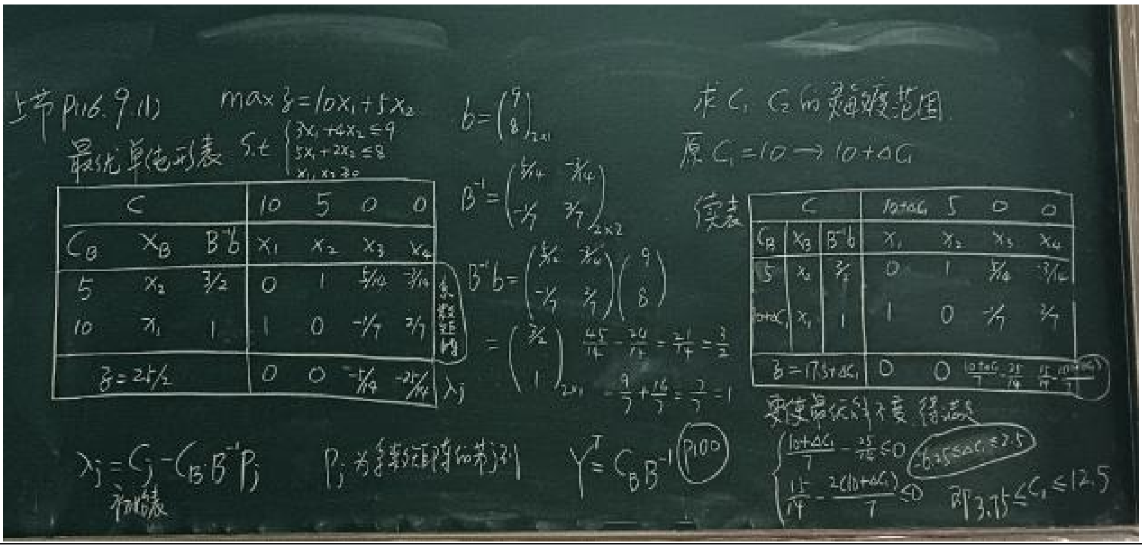
	判风险（如国际粮价波动下的储备策略）； 动态适应能力：最优解随条件变化的敏感性，呼应“与时俱进”的改革理念，如疫情中动态防控政策的科学决策。
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：使用单纯形法的最终表格来计算允许的变化范围。 难点：应用灵敏度分析的结果，解释影子价格、减少成本等概念的经济意义。

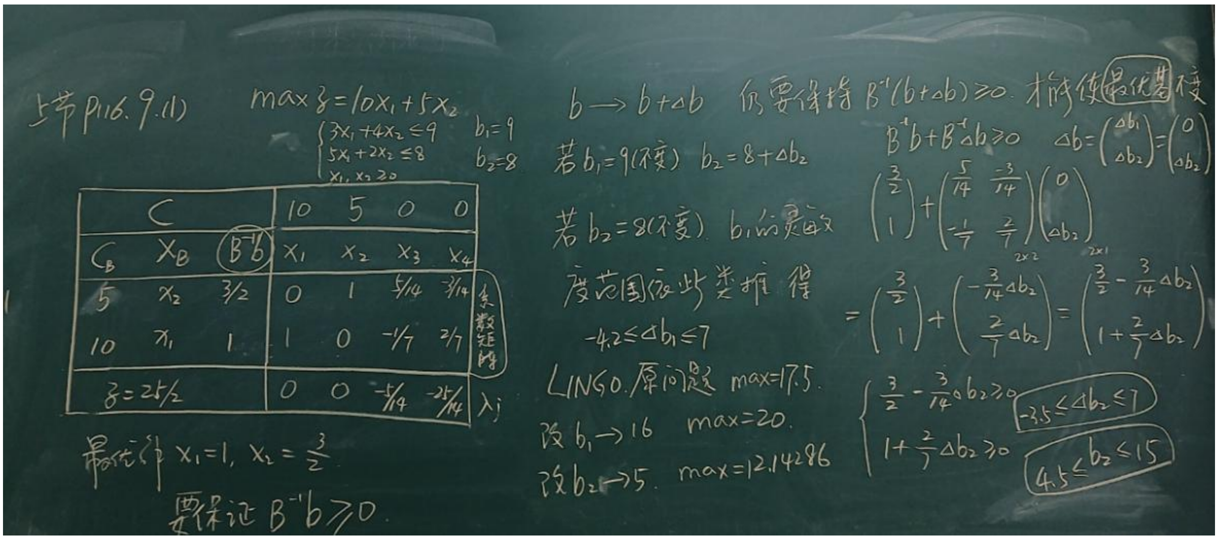
教学步骤及内容：

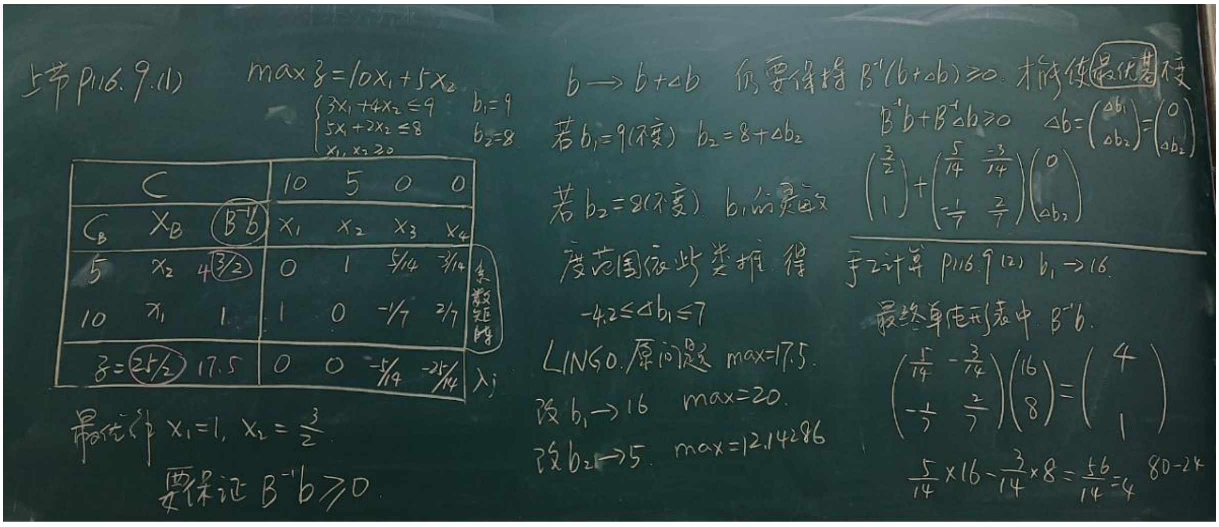


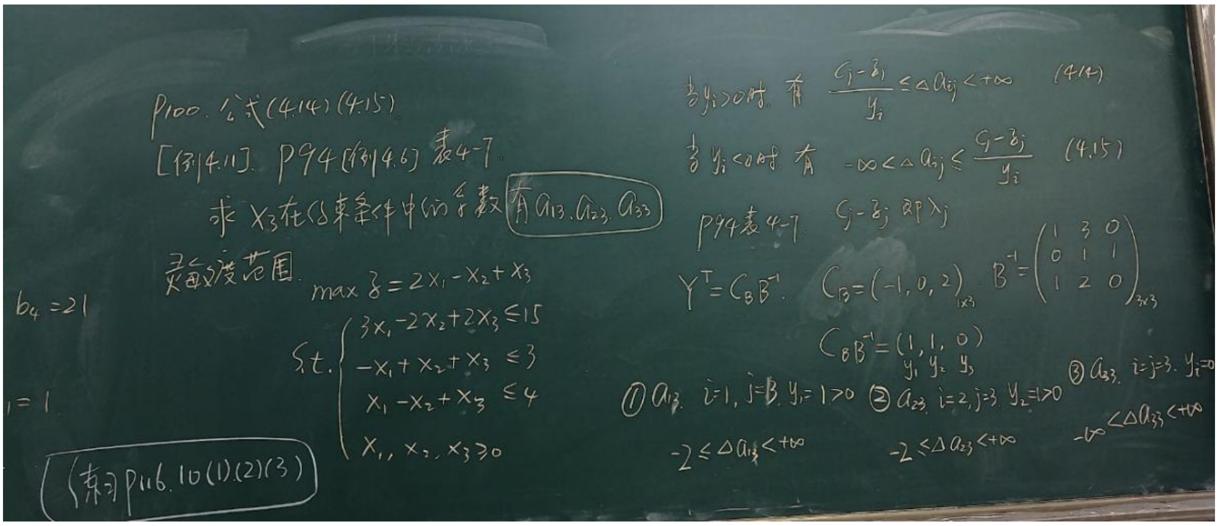



P93. 第四节 灵敏度分析
P82.(4.3)式 max z = CX
s.t. AX ≤ b
X ≥ 0.
A = (2 2; 1 3; 4 1; 2 3) 4×2
X = (x1; x2) 2×1
C = (7, 5) 1×2
b = (20; 15; 32; 21) 4×1
比如P80.[例4.1]
max z = 7x1 + 5x2
s.t. 2x1 + 2x2 ≤ 20
x1 + 3x2 ≤ 15
4x1 + x2 ≤ 32
2x1 + 3x2 ≤ 21
四种变化
1. cj值的灵敏度分析 P94
2. bi值的灵敏度分析 P97
3. aij值的灵敏度分析 P99.
4. 增加一个变量 P101

P94 一. cj值的灵敏度分析
[例4.6]. max z = 2x1 − x2 + x3
c1 = 2
c2 = −1
c3 = 1
s.t. 3x1 − 2x2 + 2x3 ≤ 15
−x1 + x2 + x3 ≤ 3
x1 − x2 + x3 ≤ 4
x1, x2, x3 ≥ 0
单纯形法
分析
C 2 −1 1+Δc3 0 0 0
CB XB B⁻¹b x1 x2 x3 x4 x5 x6
0 x4 15 3 −2 2 1 0 0
0 x5 3 −1 1 1 0 1 0
0 x6 4 1 −1 1 0 0 1
z=0 2 −1 1 0 0 0
CB XB B⁻¹b x1 x2 x3 x4 x5 x6
0 x4 3 0 1 −1 1 0 −3
0 x5 7 0 0 2 0 1 1
2 x1 4 1 −1 1 0 0 1
z=8 0 1 −1 0 0 −2
−1 x2 3 0 1 −1 1 0 −3
0 x5 7 0 0 2 0 1 1
2 x1 7 1 0 0 1 0 −2
z=11 0 0 0 −1 0 1
−1 x2 24 0 1 5 1 3 0
0 x6 7 0 0 2 0 1 1
2 x1 21 1 0 4 1 2 0
z=18 0 0 −2 −1 −1 0
1−(−1×5+0×2+2×4) = −2
P95. c3在什么范围内变化时
最优解不变 即求Δc3
书上求检验数
P33 λj = cj − CB B⁻¹ Pj
c3 = 1 变成 c3 = 1+Δc3
检验数变成
1+Δc3 − (−1×5+0×2+2×4)
= Δc3 − 2 ≤ 0 得Δc3 ≤ 2


P96.[例4.7] 以P80[例4.1]
原问题 单纯形法求解得到
终极的单纯形表 P88. 表4-2
求C1的灵敏度范围 即检验数≤0. 对应的最优解不变
原来 C1=7
后来 C1=7+ΔC1
书上求检验数
P33. λj = Cj - CB B⁻¹ Pj
z=62.5
P97[例4.8] 求C2的灵敏度范围
课后练习 P116 9.(1)

灵敏度分析
P80.[例4.1] max z=7x1+5x2
s.t. 2x1+2x2≤20
x1+3x2≤15
4x1+x2≤32
2x1+3x2≤21
x1, x2≥0
LINGO
1. 目标函数的系数 Cj
C1=7. C2=5
2. 约束条件的常数项 bi
b1=20. b2=15. b3=32. b4=21
3. 约束条件的系数 aij
i=4. j=2 如a21=1
P101 4. 增加一个变量. 如 x3
P102 5. 增加一个约束

上节 P116. 9.(1) max z=10x1+5x2
最优单纯形表
求C1 C2的灵敏度范围
原 C1=10 → 10+ΔC1
续表
z=17.5+ΔC1
λj = Cj - CB B⁻¹ Pj
Y^T = CB B⁻¹
P100
即 3.75≤C1≤12.5







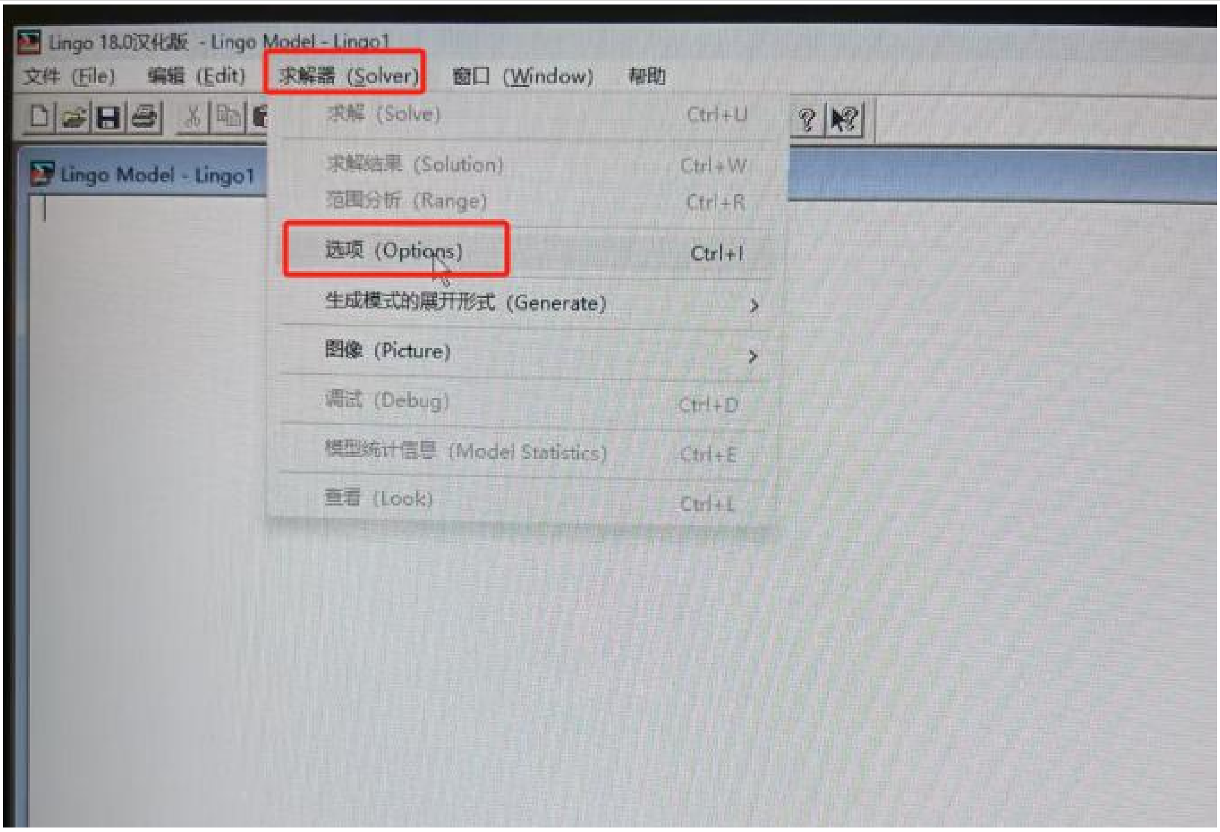
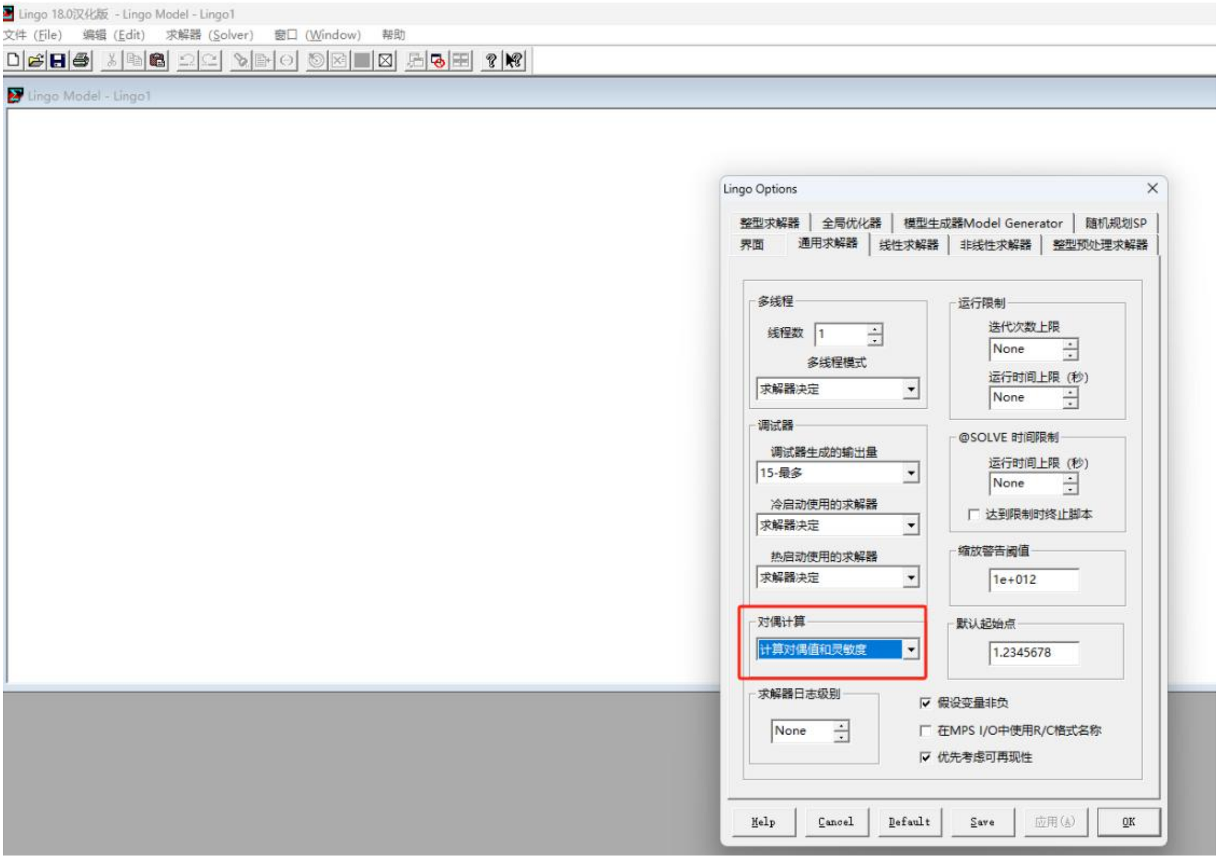
复习思考题、作业题：

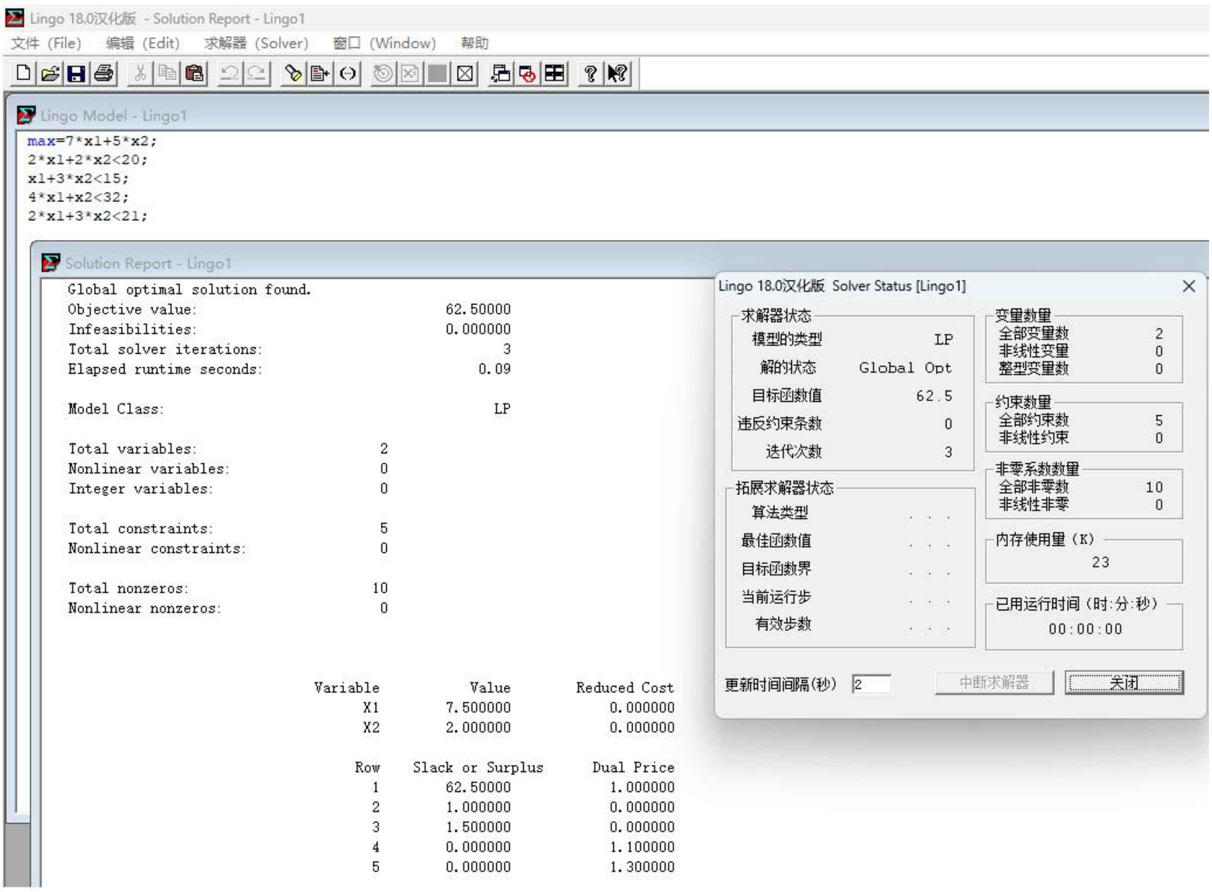
P116 第 9 题

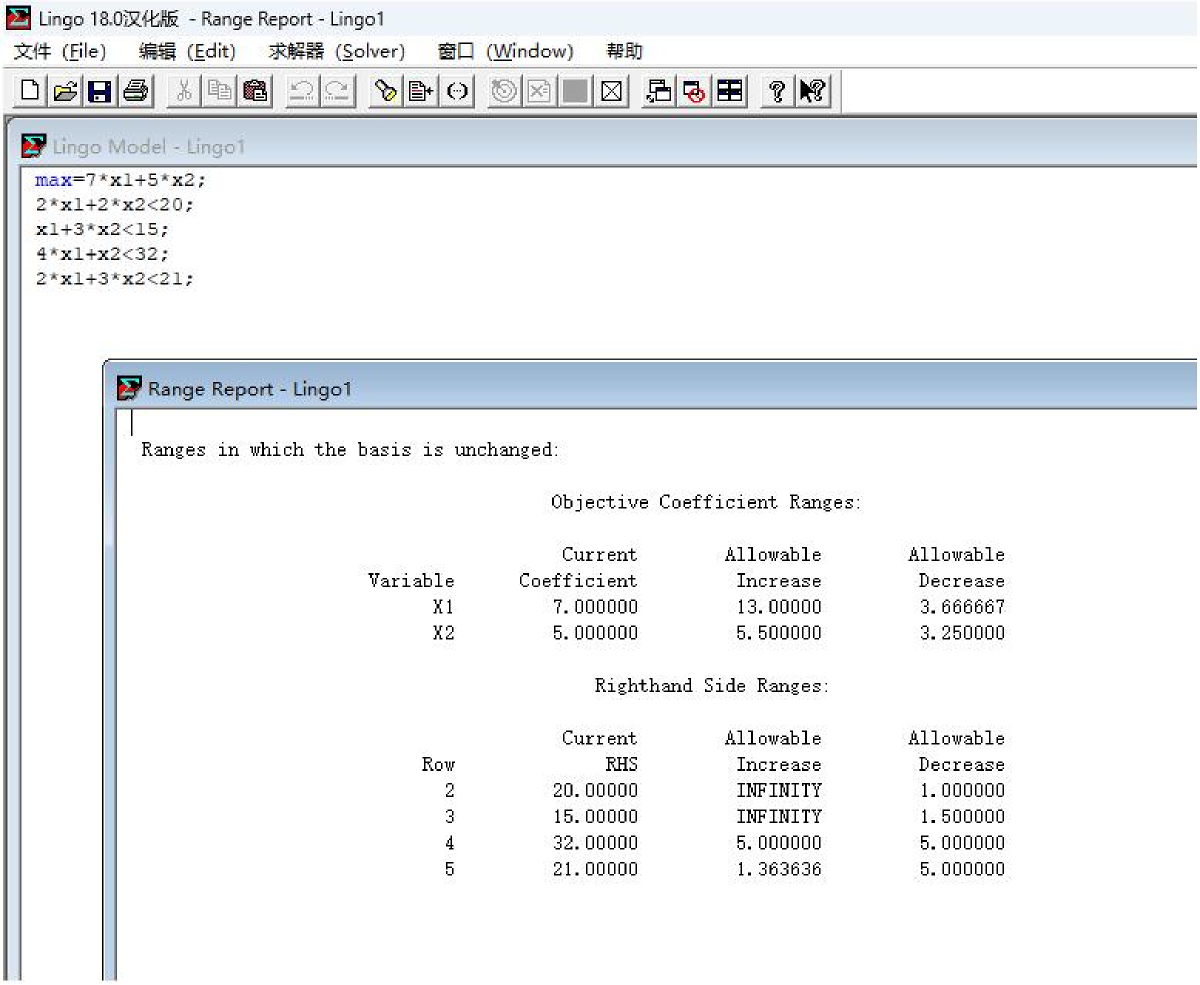
<table>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点
§6 应用 LINGO 软件求解灵敏度
第四章习题课</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="4">通过一道练习题复习上周的对偶单纯形法，也为本节课的灵敏度分析的单纯形表的计算做铺垫。同学们在练习对偶单纯形法时概念有点混淆，理解成了先写出对偶问题，再用单纯形法求解，我及时纠正。在讲授新课表，我先抛出一个问题：目标函数的系数稍有变化，是否就会导致最优解改变。同学们不假思索就回答是。学习并掌握了目标函数系数（c_j）的变化对最优解的影响机制之后，同学们恍然大悟——数学不能鲁莽，数学需要证据。这正是对灵敏度分析与参数线性规划学习本质的深刻提炼。这一认知的觉醒，体现了从“模糊经验”到“量化逻辑”的思维升级。希望同学们在未来面对复杂问题时，既能保持大胆假设的勇气，更拥有小心求证的能力——让数学的“证据”成为照亮决策迷雾的灯塔。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 8 周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 8 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">§6 应用 LINGO 软件求解灵敏度
第四章习题课</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">1. 掌握如何应用 LINGO 软件求解灵敏度
2. 比较手工方法求解灵敏度与 LINGO 软件求解灵敏度的异同及适用范围</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="5">实践担当：通过企业成本优化、资源调度案例，强化用专业服务社会需求的责任感；
协作攻坚：复杂问题求解需跨学科协作，类比“东数西算”工程中的多方协同，弘扬集体主义精神。</td></tr>
</table>

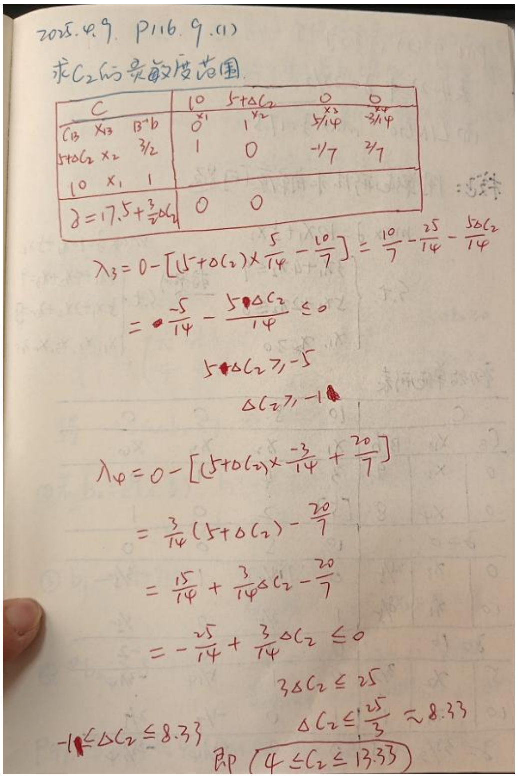
<table>
<tr><td></td><td>“东数西算”工程，是把东部地区经济活动产生的数据和需求放到西部地区计算和处理，对数据中心在布局、网络、电力、能耗、算力、数据等方面进行统筹规划的重大工程，比如人工智能模型训练推理、机器学习等业务场景，可以通过“东数西算”的方式让东部业务向西部风光水电丰富的区域迁移，实现东西部协同发展。加快推动“东数西算”工程建设，将有效激发数据要素创新活力，加速数字产业化和产业数字化进程，催生新技术、新产业、新业态、新模式，支撑经济高质量发展。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td>讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教学重点难点</td><td>重点：应用 LINGO 软件求解灵敏度
难点：LINGO 软件求解灵敏度的注意事项及适用范围</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学步骤及内容：
1.阅读课本 P111，概括应用 LINGO 软件求解灵敏度的方法
P111. 第六节 应用LINGO软件求解灵敏度
1. 先设置.
求解器→选项→通用求解器→
对偶计算→计算对偶值和灵敏度→应用
2. 先求解. 再关闭
3. 运用 Rang 窗口.</td></tr>
</table>


Lingo 18.0汉化版 - Lingo Model - Lingo1
文件 (File)
编辑 (Edit)
求解器 (Solver)
窗口 (Window)
帮助
Lingo Model - Lingo1
求解 (Solve) Ctrl+U
求解结果 (Solution) Ctrl+W
范围分析 (Range) Ctrl+R
选项 (Options) Ctrl+I
生成模式的展开形式 (Generate)
图像 (Picture)
调试 (Debug) Ctrl+D
模型统计信息 (Model Statistics) Ctrl+E
查看 (Look) Ctrl+L

Lingo 18.0汉化版 - Lingo Model - Lingo1
文件 (File)
编辑 (Edit)
求解器 (Solver)
窗口 (Window)
帮助
Lingo Model - Lingo1
Lingo Options
整型求解器
全局优化器
模型生成器Model Generator
随机规划SP
界面
通用求解器
线性求解器
非线性求解器
整型预处理求解器
多线程
线程数
1
多线程模式
求解器决定
运行限制
迭代次数上限
None
运行时间上限 (秒)
None
调试器
调试器生成的输出量
15-最多
冷启动使用的求解器
求解器决定
热启动使用的求解器
求解器决定
@SOLVE 时间限制
运行时间上限 (秒)
None
达到限制时终止脚本
缩放警告阈值
1e+012
对偶计算
计算对偶值和灵敏度
默认起始点
1.2345678
求解器日志级别
None
假设变量非负
在MPS I/O中使用R/C格式名称
优先考虑可再现性
Help
Cancel
Default
Save
应用(A)
OK


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=7*x1+5*x2;
2*x1+2*x2<20;
x1+3*x2<15;
4*x1+x2<32;
2*x1+3*x2<21;
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 62.50000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 3
Elapsed runtime seconds: 0.09
Model Class: LP
Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 5
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 10
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X1 7.500000 0.000000
X2 2.000000 0.000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 62.50000 1.000000
2 1.000000 0.000000
3 1.500000 0.000000
4 0.000000 1.100000
5 0.000000 1.300000
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]
求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 62.5
违反约束条数 0
迭代次数 3
拓展求解器状态
算法类型
最佳函数值
目标函数界
当前运行步
有效步数
变量数量
全部变量数 2
非线性变量 0
整型变量数 0
约束数量
全部约束数 5
非线性约束 0
非零系数数量
全部非零数 10
非线性非零 0
内存使用量 (K)
23
已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00
更新时间间隔(秒) 2
中断求解器
关闭


Lingo 18.0汉化版 - Range Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=7*x1+5*x2;
2*x1+2*x2<20;
x1+3*x2<15;
4*x1+x2<32;
2*x1+3*x2<21;
Range Report - Lingo1
Ranges in which the basis is unchanged:
Objective Coefficient Ranges:
Variable Current Coefficient Allowable Increase Allowable Decrease
X1 7.000000 13.00000 3.666667
X2 5.000000 5.500000 3.250000
Righthand Side Ranges:
Row Current RHS Allowable Increase Allowable Decrease
2 20.00000 INFINITY 1.000000
3 15.00000 INFINITY 1.500000
4 32.00000 5.000000 5.000000
5 21.00000 1.363636 5.000000

2.评讲 P116 第 9 题


2025.4.9. P116. 9.(1)
求C2的灵敏度范围

P116. 9.(2) 待校正

表4-23 中 $z=25/2$.

而 LINGO. $\max z=17.5$

校正：用单纯形法求解原问题

$$\max z=10x_1+5x_2$$
$$s.t.\begin{cases}3x_1+4x_2\le 9\\5x_1+2x_2\le 8\\x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}\xrightarrow{\text{标准型}}\max z=10x_1+5x_2\quad s.t.\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=9\\5x_1+2x_2+x_4=8\\x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

初始单纯形表

C			10	5	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	9	3	4	1	0
0	x_4	8	[5]	2	0	1
$z=0$			10	5	0	0
0	x_3	21/5	0	[14/5]	1	-3/5
10	x_1	8/5	1	2/5	0	1/5
$z=16$			0	1	0	-2
5	x_2	3/2	0	1	5/14	-3/14
10	x_1	1	1	0	-1/7	2/7
$z=35/2=17.5$			0	0	-5/14	-25/14

(2). 当资源 b_1, b_2 其中一个保持不变时，另一个在什么范围内变化最优基保持不变？若 b_1 增加7个单位，最优解是否发生变化？如发生变化新的最优解是什么？利润如何变化？若 b_2 减少3个单位呢？

(分析). 参考 P98. [例4.10]

① 若 $b_1=9$ (不变), $b_2=8+\Delta b_2$

$$B^{-1}b+B^{-1}\Delta b \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad 即 \begin{cases} \frac{3}{2}-\frac{3}{14}\Delta b_2 \geq 0 \\ 1+\frac{2}{7}\Delta b_2 \geq 0 \end{cases}$$

得 $-3.5 \leq \Delta b_2 \leq 7$ 或 $4.5 \leq b_2 \leq 15$

② 若 $b_2=8$ (不变), b_1 的灵敏度范围以此类推，得

$$-4.2 \leq \Delta b_1 \leq 7 \quad 或 \quad 3.8 \leq b_2 \leq 15$$

③ $b_1 \longrightarrow 9+7=16$ LINGO 得 $\max z=20$
最优解 $x_1=0$ $x_2=4$

④ $b_2 \rightarrow 8-3=5$ LINGO 得 $\max z=12.14286$
最优解 $x_1=0.142857$ $x_2=2.142857$

P97. 当资源 b_i 发生变化时，最优解一定会发生变化.

(3) 当问题的目标函数变为 $\max z = 12x_1 + 4x_2$ 时最优解的变化.

(分析).

	C		12	4	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
12	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	5/14	−3/14
4	x_1	1	[1]	0	−1/7	2/7
	$z=22$		8	−8	$\frac{-26}{7}$	$\frac{10}{7}$

$\Delta C_1 = 12 - 10 = 2$ 在 C_1 的灵敏度范围 $-6.25 \le \Delta C_1 \le 2.5$ 内

$\Delta C_2 = 4 - 5 = -1$ 在 C_2 的灵敏度范围 $-1 \le \Delta C_2 \le 8.33$

(见前面几页笔记)

C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
	x_2					
4	x_1					

显然做不下去了.

回归到初始单纯形表重做

C			12	4	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	9	3	4	1	0
0	x_4	8	[5]	2	0	1
$z=0$			12	4	0	0
0	x_3	21/5	0	14/5	1	-3/5
12	x_1	8/5	1	2/5	0	1/5
$z=96/5=19.2$			0	-4/5	0	-12/5

此时最优解 $x_1=\frac{8}{5}$，$x_2=0$.

目标函数最大值 $z=19.2$

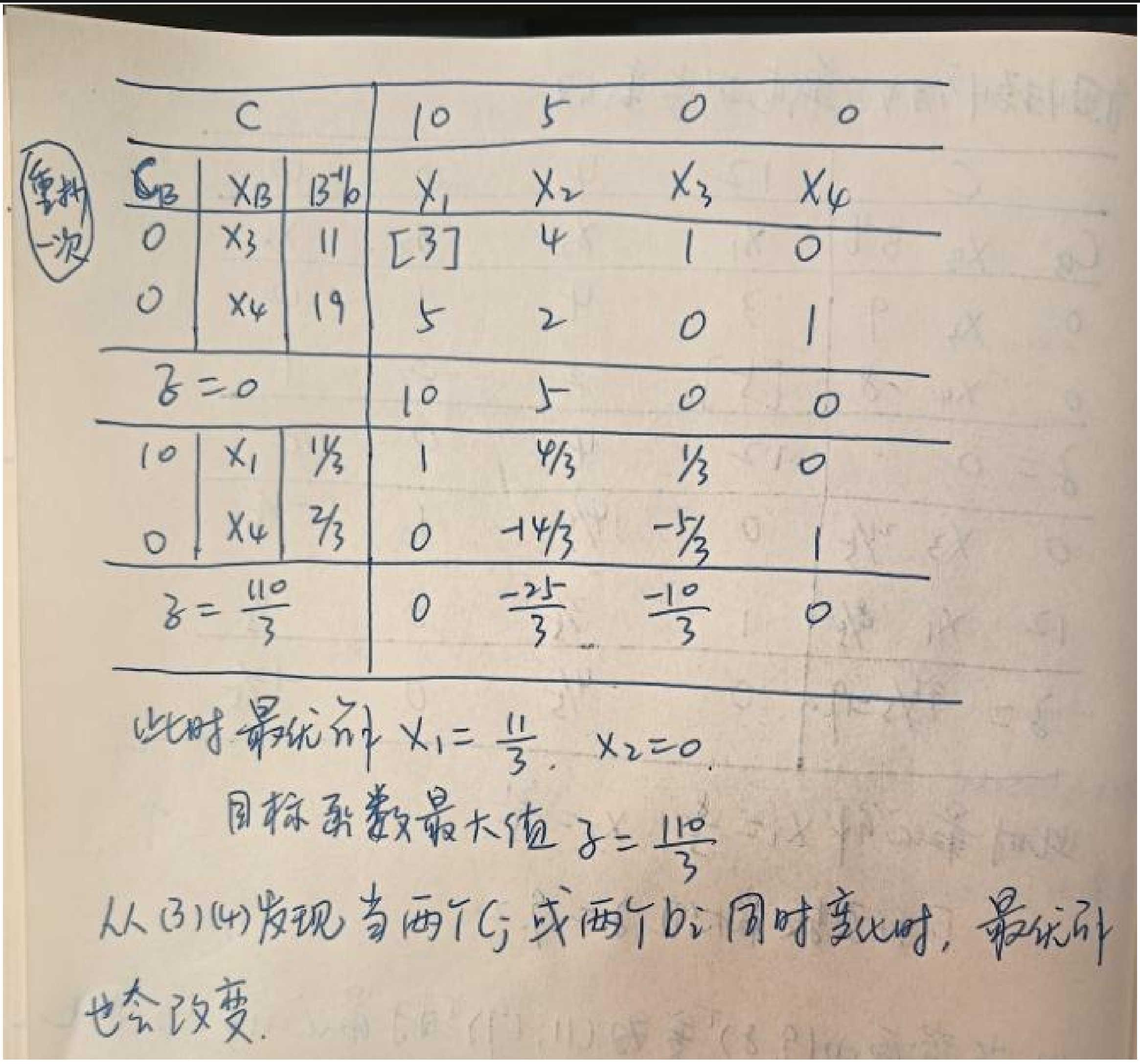
(4). 当资源由 $(9,8)^T$ 变为 $(11,19)^T$ 时最优解的变化

(分析) 看 $B^{-1}(b+\Delta b)\geq 0$

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{14} & \frac{-3}{14}\\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\ \frac{27}{7}\end{pmatrix}$$ 不再满足非负.

回归到初始单纯形表重做.

C			10	5	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
			[3]	4	1	0
0	x_3	11		2	0	1
0	x_4	19	5	5	0	0
$z=0$			10			



重新一次

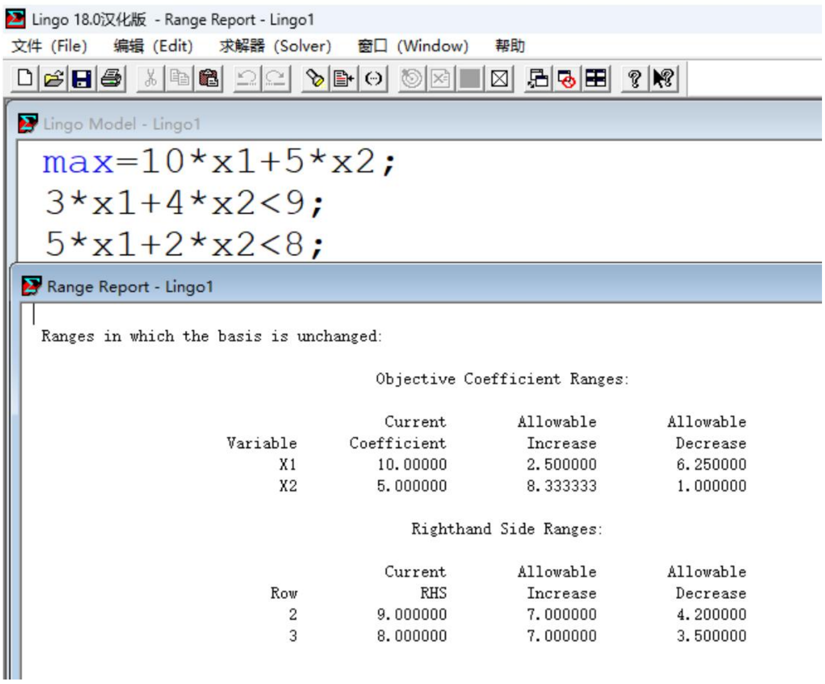
C			10	5	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	11	[3]	4	1	0
0	x_4	19	5	2	0	1
$z=0$			10	5	0	0
10	x_1	$\frac{11}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_4	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1
$z=\frac{110}{3}$			0	$-\frac{25}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0

此时最优解 $x_1=\frac{11}{3}$, $x_2=0$.

目标函数最大值 $z=\frac{110}{3}$

从(3)(4)发现当两个c_j或两个b_i同时变化时，最优解也会改变.

3. 应用 LINGO 软件验证 P116 第 9 题。



Lingo 18.0汉化版 - Range Report - Lingo1

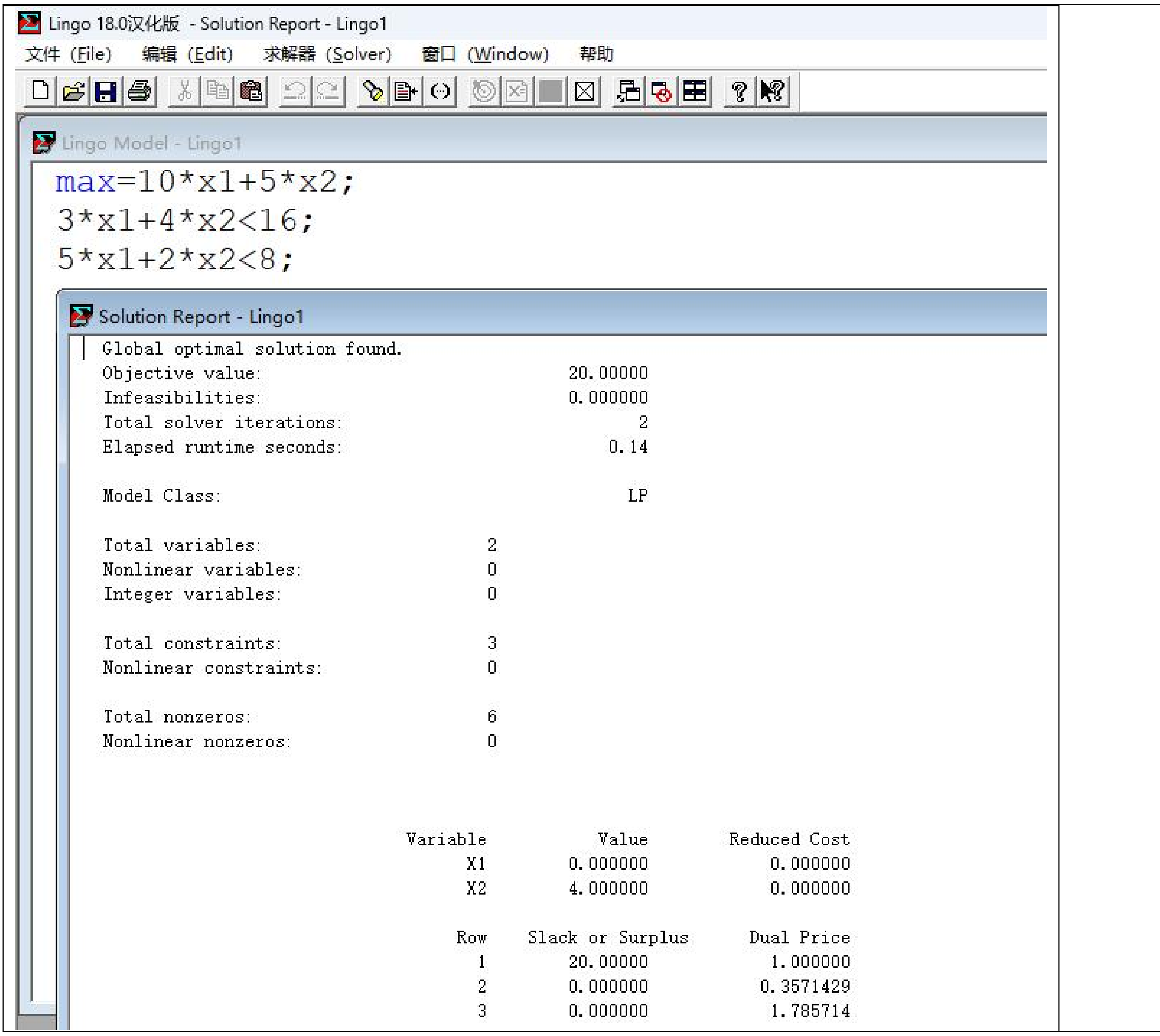
文件 (File)　编辑 (Edit)　求解器 (Solver)　窗口 (Window)　帮助

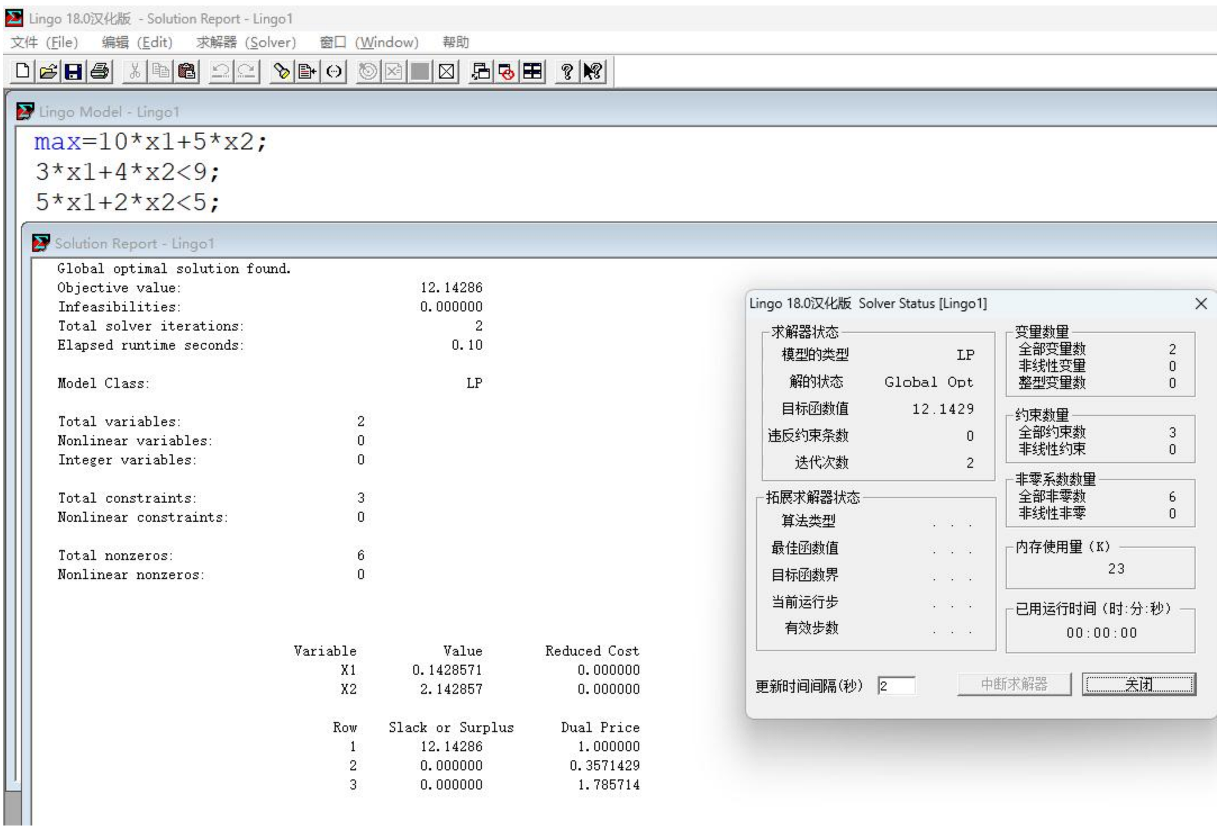
Lingo Model - Lingo1

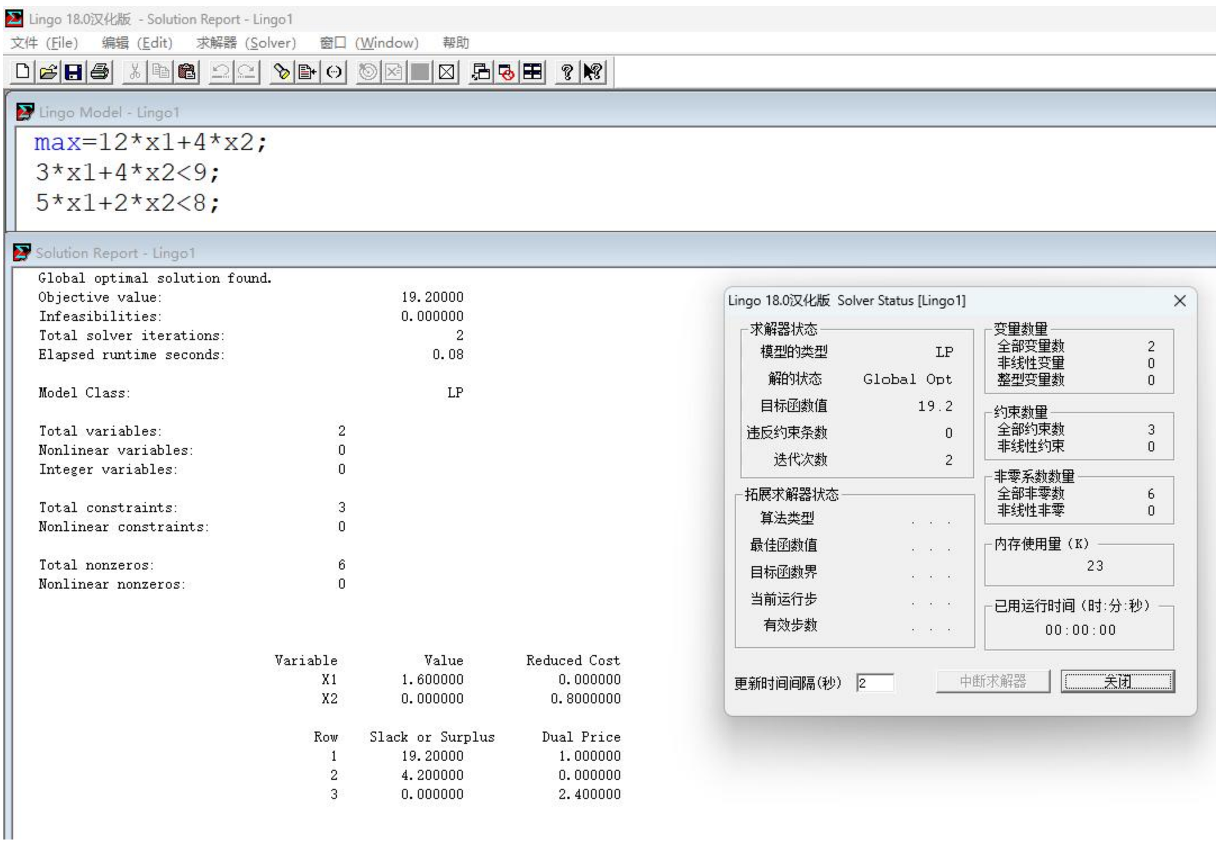
```
max=10*x1+5*x2;
3*x1+4*x2<9;
5*x1+2*x2<8;
```

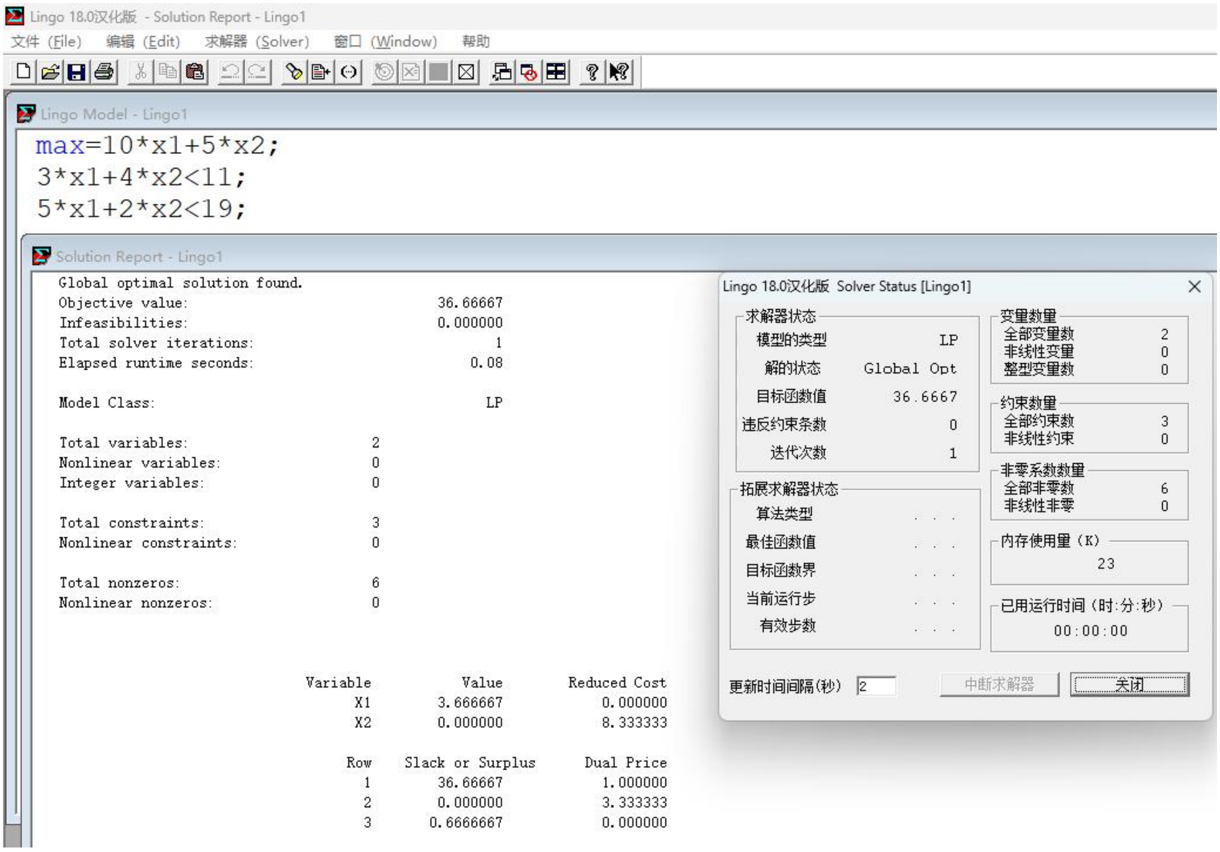
Range Report - Lingo1

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                          Objective Coefficient Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
      Variable    Coefficient         Increase         Decrease
            X1       10.00000         2.500000         6.250000
            X2       5.000000         8.333333         1.000000

                              Righthand Side Ranges:

                      Current        Allowable        Allowable
           Row            RHS         Increase         Decrease
             2       9.000000         7.000000         4.200000
             3       8.000000         7.000000         3.500000
```


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=10*x1+5*x2;
3*x1+4*x2<16;
5*x1+2*x2<8;
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 20.00000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 0.14
Model Class: LP
Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 6
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X1 0.000000 0.000000
X2 4.000000 0.000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 20.00000 1.000000
2 0.000000 0.3571429
3 0.000000 1.785714


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=10*x1+5*x2;
3*x1+4*x2<9;
5*x1+2*x2<5;
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 12.14286
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 0.10
Model Class: LP
Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 6
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X1 0.1428571 0.000000
X2 2.142857 0.000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 12.14286 1.000000
2 0.000000 0.3571429
3 0.000000 1.785714
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]
求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 12.1429
违反约束条数 0
迭代次数 2
拓展求解器状态
算法类型
最佳函数值
目标函数界
当前运行步
有效步数
变量数量
全部变量数 2
非线性变量 0
整型变量数 0
约束数量
全部约束数 3
非线性约束 0
非零系数数量
全部非零数 6
非线性非零 0
内存使用量 (K)
23
已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00
更新时间间隔(秒) 2
中断求解器
关闭


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=12*x1+4*x2;
3*x1+4*x2<9;
5*x1+2*x2<8;
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 19.20000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 0.08
Model Class: LP
Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 6
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X1 1.600000 0.000000
X2 0.000000 0.8000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 19.20000 1.000000
2 4.200000 0.000000
3 0.000000 2.400000
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]
求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 19.2
违反约束条数 0
迭代次数 2
拓展求解器状态
算法类型
最佳函数值
目标函数界
当前运行步
有效步数
变量数量
全部变量数 2
非线性变量 0
整型变量数 0
约束数量
全部约束数 3
非线性约束 0
非零系数数量
全部非零数 6
非线性非零 0
内存使用量 (K)
23
已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00
更新时间间隔(秒) 2
中断求解器
关闭



复习思考题、作业题：

P116 第 10 题

下次课预习要点

第五章运输问题

§1 运输问题的数学模型及其特点

§2 表上作业法

教 学 后 记	至此，把灵敏度分析做个小结，方便学习。

△总体灵敏度分析

△1. c_j值　P94

① c_j为非基变量系数　只算λ_j即可　令$\lambda_j\le0$.

② c_j为基变量系数.　要算除基变量外的所有变量的检验数. 令其≤0. 计基础

△2. b_i值　P97

$B^{-1}(b_i+\Delta b_i)\geq0$　　B^{-1}为除原问题中变量外的(最终单纯形表中看)系数矩阵

3. a_{ij}值　P99

P100. 公式(4.14). (4.15).　$Y^T=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$.

4. 增加一个变量 P101

5. 增加一个约束 P102.

6. 多个同时变化.

参考 P80 [例4.1] 对原问题作灵敏度分析

P94 [例4.6]

P116. 9. 10.

授课时间	第 9 周	课　次	第 9 次	
章　节 名　称	第五章运输问题 §1 运输问题的数学模型及其特点 §2 表上作业法			
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）		教学 时数	3

教　学 目　的 要　求	1.了解运输问题的数学模型及其特点； 2.理解表上作业法的整理流程； 3.掌握确定初始基的西北角法和最小元素法，求检验数的闭回路法； 4.会完整地使用表上作业法求解运输问题的最优解。
思政元素	1.全局统筹意识：模型强调资源供需平衡，类比国家“全国统一大市场”建设，培养服务宏观战略的系统思维； 2.公平与效率观：产销平衡约束体现“先富带后富”理念，如“西气东输”工程协调区域发展。 3.精益求精态度：最小元素法、伏格尔法的严谨步骤呼应制造业精密管理，弘扬工匠精神； 4.规则与创新平衡：检验数优化需遵守迭代规则，启发“依法创新”理念，如物流算法兼顾合规与效率。
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：确定初始基的西北角法和最小元素法，求检验数的闭回路法 难点：表上作业法的整理流程
教学步骤及内容：	

第五章 运输问题 P119

复习P5-8.[例3.3] 物流配送中心选址问题

LINGO求解

P8.[例1.2] 寻找运费最低的调运方案

LINGO求解

本章介绍一种比单纯形法更简便、直观和高效的解法

第一节 运输问题的数学模型及其特点

一、运输问题的数学模型

P119.[例5.1] 模型I

P120.中间部分

线性规划模型 $i=A,B$，$j=C,D,E$ $m=2,n=3$

$$\min z = 20x_{AC}+25x_{AD}+30x_{AE}+22x_{BC}+15x_{BD}+12x_{BE}$$

系数矩阵：如 $x_{AC}=x_{11}$

$$s.t.\begin{cases} x_{AC}+x_{AD}+x_{AE}=20 \\ x_{BC}+x_{BD}+x_{BE}=30 \\ x_{AC}+x_{BC}=10 \\ x_{AD}+x_{BD}=15 \\ x_{AE}+x_{BE}=25 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ 2\text{行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ 3\text{行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

二. 模型特点

(1) 约束条件系数矩阵中的元素只有0和1.

(2) 约束条件系数矩阵中的每一列只有两个非零元素，分别为前 m 个约束中的一个变量和后 n 个约束中的一个变量，即如上页右下角所示。

(3) 所有的约束条件都是等式

P121. Th5.1 模型T有最优解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

P121. Th5.2 模型T中约束方程系数矩阵的秩为 $m+n-1$.

练习：证明上面的系数矩阵的秩为 $2+3-1=4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5\times 6} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&-1&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&-1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5-r_4}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

易见秩为4.

P122. Th5.3 如果一个运输问题的所有供应量和所有需求量都是整数，那么它的每一个基本可行解中的所有变量也都是整数.

第二节 表上作业法

P122

运输问题模型的系数矩阵中无现成的单位矩阵. 但可以不必引进人工变量，就能直接求出它的初始基本可行解.

一、初始基本可行解的求法

P124

(一) 西北角法（左上角法）

[例5.2] 根据表5-5，利用西北角法求初始基本可行解.

表5-5 运输问题

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 3 x_{11}	11 4 x_{12}	3 × x_{13}	10 × x_{14}	7
A_2	1 × x_{21}	9 2 x_{22}	2 2 x_{23}	8 × x_{24}	4
A_3	7 × x_{31}	4 × x_{32}	10 3 x_{33}	5 6 x_{34}	9
销量	3	6	5	6	

初始基本可行解中基变量的个数应为6个. 上述画圈的单元格恰好为6个.

该初始基本可行解为 $x_{11}=3$, $x_{12}=4$, $x_{22}=2$

$x_{23}=2$, $x_{33}=3$, $x_{34}=6$

目标值 $f=3\times3+4\times11+2\times9+2\times2+3\times10+6\times5=135$

练习.P152. 3. 用西北角法求表5-46中运输问题的初始基本可行解.

产地	销地 1	2	3	4	5	产量
1	20	×	×	×	×	20
2	5	40	10	×	×	55
3	×	×	40	25	×	65
4	×	×	×	5	25	30
5	×	×	×	×	10	10
销量	25	40	50	30	35	

初始基本可行解为 $x_{11}=20$, $x_{21}=5$, $x_{22}=40$, $x_{23}=10$, $x_{33}=40$, $x_{34}=25$, $x_{44}=5$, $x_{45}=25$, $x_{55}=10$

$f=20\times10+5\times6+40\times15+10\times9+40\times3+25\times14+5\times20+25\times8+10\times16=1850$

P152. 5. 用西北角法求表5-47中运输问题的初始基本可行解.

产地	销地 1	2	3	4	产量
1	9	3	×	×	12
2	×	5	4	×	9
3	×	×	1	7	8
销量	9	8	5	7	

初始基本可行解为: $x_{11}=9$, $x_{12}=3$, $x_{22}=5$, $x_{23}=4$, $x_{33}=1$, $x_{34}=7$

$f=170$.

P126.（二）最小元素法

西北角法没有考虑单位运价的影响，不合理。

最小元素法按单位运价的大小顺序确定运量。

P126.［例5.3］

产地	销地 B1		销地 B2		销地 B3		销地 B4		产量
	运量	运价	运量	运价	运量	运价	运量	运价	
A1	×	3	×	11	4	3	3	10	7
A2	3	1	×	9	1	2	×	8	4
A3	×	7	6	4	×	10	3	5	9
销量	3		6		5		6		

初始基本可行解为 $x_{13}=4$，$x_{14}=3$，$x_{21}=3$，$x_{23}=$

$x_{32}=6$，$x_{34}=3$

目标值 $f=4\times3+3\times10+3\times1+1\times2+6\times4+3\times5=$

练习：P152. 3. 最小元素法

产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5	产量
1	×	×	×	20	×	20
2	×	10	×	10	35	55
3	25	20	20	×	×	65
4	×	×	30	×	×	30
5	×	10	×	×	×	10
销量	25	40	50	30	35	

初始基本可行解为：

$X_{14}=20$, $X_{22}=10$, $X_{24}=10$, $X_{25}=35$.

$X_{31}=25$, $X_{32}=20$, $X_{33}=20$ $X_{43}=30$

$X_{52}=10$

目标值 $f=20\times6+10\times15+10\times12+35\times15$

$+25\times3+20\times6+20\times3+30\times2$

$+10\times7$

$=1300$

P152. 5. 最小元素法

产地	销地				产量
	1	2	3	4	
1	×	8	—×	4	12
2	4	×	5	×	9
3	— 5	×	×	3	8
销量	9	8	5	7	

初始基本可行解为：$X_{12}=8$, $X_{14}=4$, $X_{21}=4$, $X_{23}=5$.

$X_{31}=5$, $X_{34}=3$

目标值 $f=8\times2+4\times6+4\times9+5\times5+5\times日+3\times7$

$=122+?$ 无法找到可行解

Deepseek：最小元素法遇到运输表不完全怎么办？

如

产地	销地 B_1	销地 B_2	产量
A_1	—	3	3
A_2	4	1	7
销量	5	5	

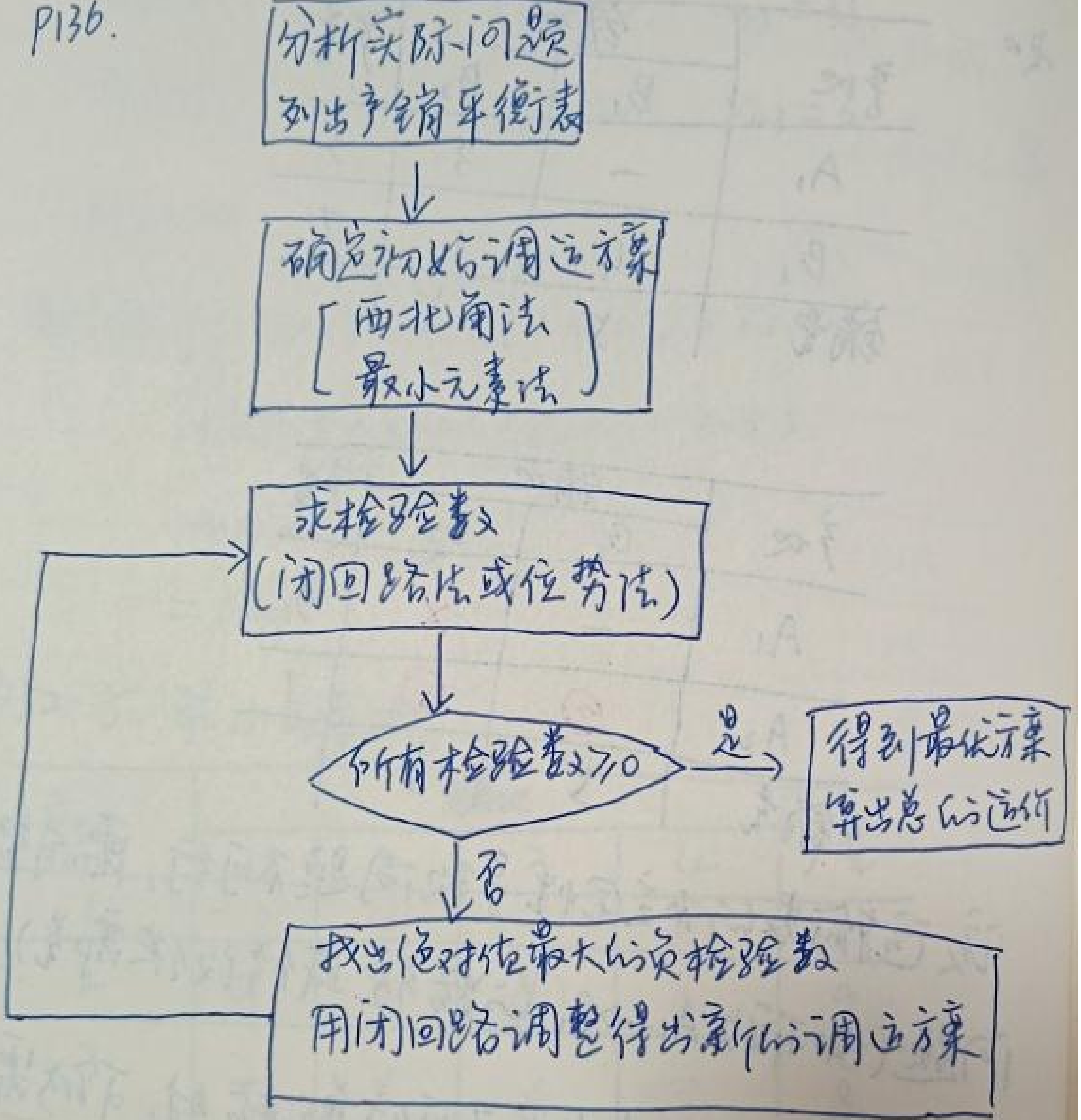
产地	销地 B_1	销地 B_2	产量
A_1	—	×	3
A_2	2	5	7
销量	5	5	

该运输表的不完全性导致问题不可行，需调整原问题（如开放 $A_1 \to B_1$ 的路径或修改供需量）.

另外，当运输表存在不可行单元格时，可能需要使用其他方法，比如伏格尔法（Vogel's method）.

总结 表上作业法思路.

P136.



P127.(三)伏格尔法
P129.(四)罗素法 } (了解)

P122. 表5-2 运输表(一).

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ 为调运费用

在运输表中找到m+n-1个单元格作为基本可行解.

P123. Def 5.1 闭回路

闭回路的顶点、边.

闭回路具有如下特点:

(1) 每个顶点都是转角

(2) 每行或每列若包含顶点,则必有两个.

(3) 顶点间的连线都是水平的或垂直的

P124. Th5.4 运输问题的m+n-1个变量 $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \cdots, x_{i_sj_s}$ 构成基变量的充要条件是:该组变量不构成闭回路.

要判断运输表中的m+n-1个变量是否是一组基变量,只需检查这组变量是否含有闭回路即可.

表上作业法的计算步骤:
①初始基本可行解的求法 ②最优解的判定 ③基本可行解的转换(迭代)

P131. 二. 最优解的判定

若全部检验数都大于等于0，则此基本可行解就是最优解.

P131.(一)闭回路法

P131. Th5.5 设变量集合 $\{x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}, x_{i_2j_3}, \cdots, x_{i_sj_s}x_{i_sj_1}\}$，$s=m+n-1$ 为运输问题的一组基变量，y 是一个非基变量，则存在唯一的闭回路，使非基变量 y 成为其中一个顶点，其余顶点由基变量中的一部分构成.

P132 非基变量 x_{ij} 的检验数 λ_{ij} 按下式计算.

$$\lambda_{ij} = \text{奇点运价之和} - \text{偶点运价之和}$$

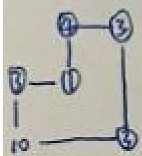
即奇偶奇偶…
+ − + −

P132 表5-17 非基变量的检验数

$$\lambda_{12} = (C_{12}+C_{34}) - (C_{14}+C_{32})$$
$$= (11+5) - (10+4) = 2$$

$$\lambda_{22} = C_{22} - C_{23} + C_{13} - C_{14} + C_{34} - C_{32} = 9-2+3-10+5-4 = 1$$

$$\lambda_{24} = (C_{24}+C_{13}) - (C_{23}+C_{14}) = (8+3) - (2+10) = -1$$



$$\lambda_{31} = (C_{31} - C_{21} + C_{23} - C_{13} + C_{14} - C_{34}) = 7-1+2-3+10-5 = 10$$

$$= (10+10) - (3+5) = 12$$

$$\lambda_{33} = (C_{23}+C_{14}) - (C_{13}+C_{34})$$

P133. (二) 位势法 (待)

续上. P132. 表5-17 $\lambda_{24}=-1<0$. 继续迭代

P135. 三. 迭代

1. 选择一个检验数为负的非基变量作为入基变量

以该入基变量为起点寻找闭回路.

在闭回路中的偶点中确定出基变量.

并以该出基变量的运量值作为调整量.

回路中所有奇点加上调整量

偶点减去调整量 (奇加偶减)

2. 选择闭回路中所有偶点运量最小的基变量作为出基变量.

P136. 表5-21. 非基变量的运量为0.

继续用闭回路法计算非基变量的检验数.

$\lambda_{11}=C_{11}-C_{14}+C_{24}-C_{21}=3-10+8-1=0$

$\lambda_{12}=C_{12}-C_{14}+C_{34}-C_{32}=11-10+5-4=2$

$\lambda_{22} = C_{22} - C_{24} + C_{34} - C_{32} = 9 - 8 + 5 - 4 = 2$

$\lambda_{23} = C_{23} - C_{24} + C_{14} - C_{13} = 2 - 8 + 10 - 3 = 1$

$\lambda_{31} = C_{31} - C_{34} + C_{24} - C_{21} = 7 - 5 + 8 - 1 = 9$

$\lambda_{33} = C_{33} - C_{34} + C_{14} - C_{13} = 10 - 5 + 10 - 3 = 12$

至此，所有非基变量的检验均≥0，达到最优。

最优解为 $x_{13}=5$，$x_{14}=2$，$x_{21}=3$，$x_{24}=1$

$x_{32}=6$，$x_{34}=3$。

目标函数值 $f = 5\times3 + 2\times10 + 3\times1 + 1\times8 + 6\times4 + 3\times5$

$= 85$

表上作业法实际上就是单纯形法在运输问题中的应用。

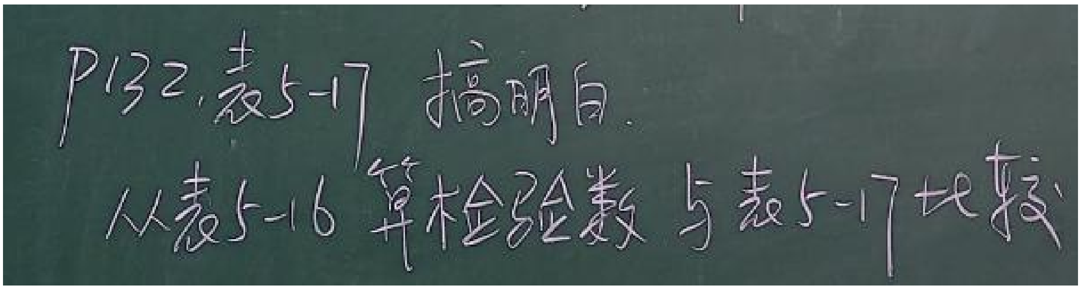
单纯形法要根据最小比值原则确定出基变量，而运输问题仅仅比较闭回路中偶点运量的大小

以上过程为 P124 [例5.2] 的完整过程：① 初始基 ② 检验 ③ 迭代

疑问：P135. 入基变量的选择

P137. 四.退化问题（待）.

复习思考题、作业题：



下次课预习要点

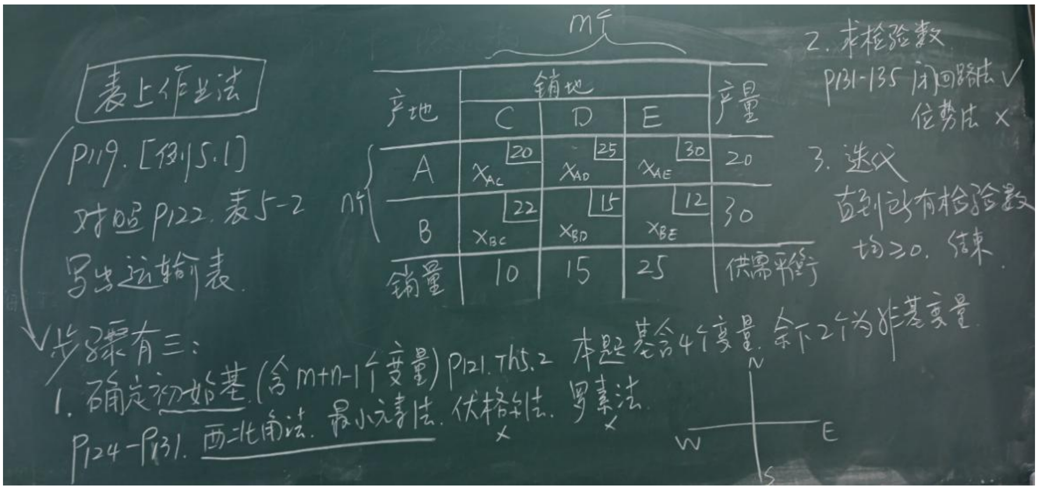
§3 产销不平衡的运输问题

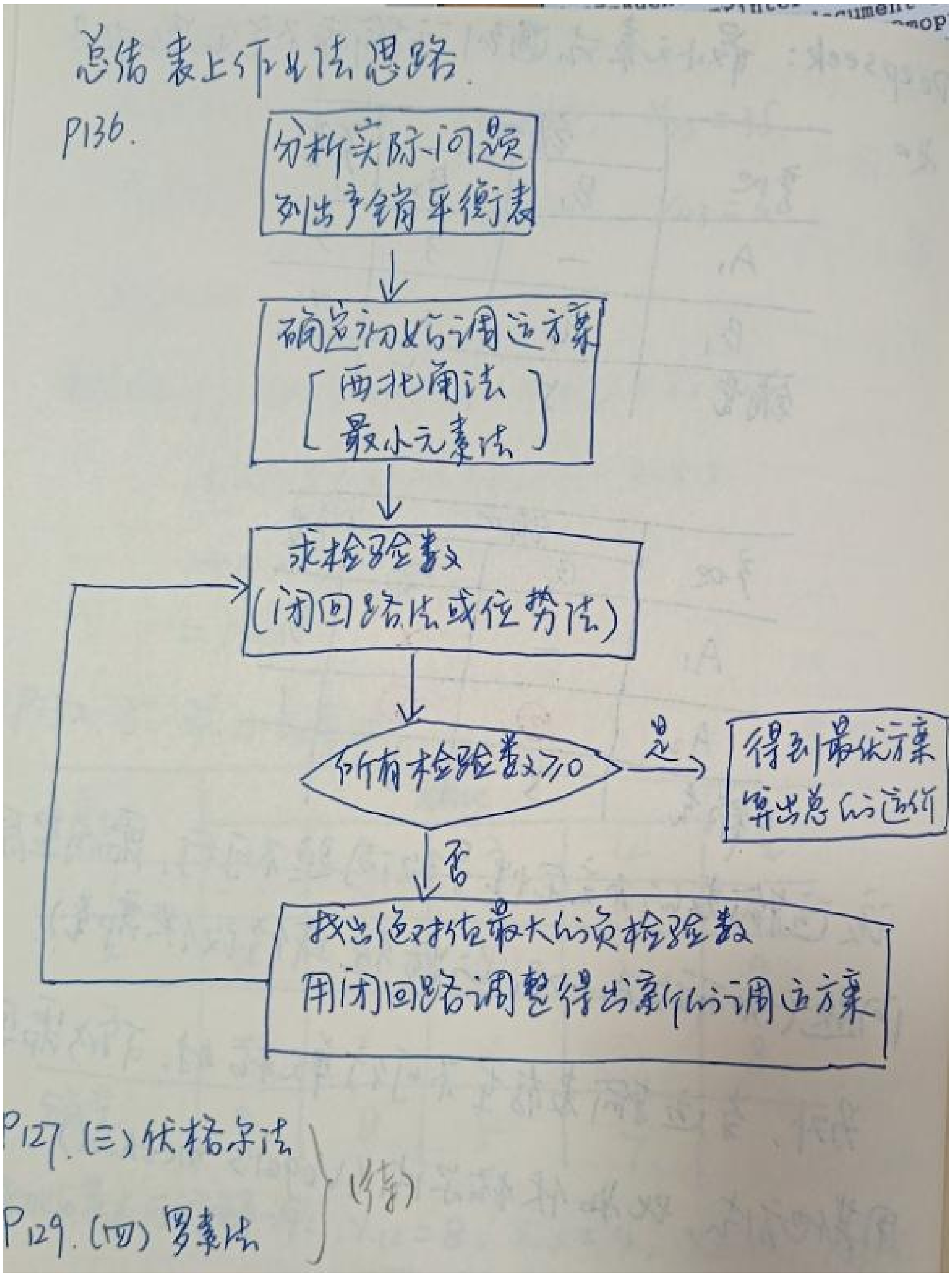
§4 特殊条件运输问题

教学后记

本次课程内容丰富、信息量庞大，需条理清晰地梳理思路，明确教学重点，合理取舍讲解内容。例如，可先向学生系统介绍表上作业法的整体流程，再针对每个步骤，精选一两种核心方法进行深入剖析，确保讲解透彻、易懂，并辅以即时课堂练习加以巩固。同时，注重营造积极向上的课堂氛围，及时给予学生正向激励，鼓励他们勤奋刻苦、勇攀学术高峰。

梳理如下：



<table>
<tr><td></td><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 10 周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 10 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">第五章 运输问题
§3 产销不平衡的运输问题
§4 特殊条件运输问题</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
</table>

教　学 目　的 要　求	1、理解产销不平衡问题的基本形式（产大于销或销大于产）。 2、掌握将产销不平衡问题转化为平衡问题的方法（引入虚设产地或销地）。 3、能够应用表上作业法（如西北角法、最小元素法）求解转化后的平衡运输问题。 4、理解虚设点的经济意义及其在模型中的作用（如库存、缺货成本等）。 5、了解特殊条件的运输问题及其求解方法。
思政元素	通过运输问题优化模型，让学生体会“物流强国”对国家经济安全的意义，激发服务国家战略的使命感。
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：将产销不平衡问题转化为平衡问题的方法 难点：应用表上作业法（如西北角法、最小元素法）求解转化后的平衡运输问题。

教学步骤及内容：

1、讲解课本 P153 第 6 题，复习上节课所学的表上作业法。

作业. P153.

6. 用表上作业法求表5-48给出的运输问题的最优解.

表5-48 运输表(九)

产地	销地 1	2	3	4	产量
1	10	6	7	12	4
2	16	0	5	9	9
3	5	4	10	10	4
销量	5	2	4	6	

P126. 最小元素法.

产地	销地 1	2	3	4	产量
1	× (10)	× (6)	4 (7)	× (12)	4
2	1 (16)	2 (0)	× (5)	6 (9)	9
3	4 (5)	× (4)	× (10)	× (10)	4
销量	5	2	4	6	

初始基只含5个变量 ≠ $m+n-1$ (答) P137-138

$3+4-1=6$ 退化问题

换西北角法.确定初始基.

产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	产量
1	4 [10]	× [6]	× [7]	× [12]	4
2	1 [16]	2 [0]	4 [5]	2 [9]	9
3	× [5]	× [4]	× [10]	4 [10]	4
销量	5	2	4	6	

初始可行解 $x_{11}=4$, $x_{21}=1$, $x_{22}=2$, $x_{23}=4$.

$x_{24}=2$, $x_{34}=4$

目标值 $f=4\times10+1\times16+2\times0+4\times5+2\times9+4\times10=134$.

求非基变量的检验数.

$\lambda_{12}=6-0+16-10=12$, $\lambda_{13}=7-5+16-10=8$.

$\lambda_{14}=12-9+16-10=9$, $\lambda_{31}=5-16+9-10=-12<0$

$\lambda_{32}=4-0+9-10=3$, $\lambda_{33}=10-5+9-10=4$

故 x_{31} 入基. 寻找闭回路

$$\begin{array}{ccc} x_{21} & — & x_{24} \\ | & & | \\ x_{31} & — & x_{34} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 0 & — & 3 \\ | & & | \\ 1 & — & 3 \end{array}$$

P135. 偶点有 x_{2}[illegible]. x_{34}. . $\min\{1,4\}=1$. 调整量

即 x_{21} 出基.

产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	产量
1	④ $\boxed{10}$	0 $\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	4
2	$\boxed{16}$	② $\boxed{0}$	④ $\boxed{5}$	③ $\boxed{9}$	9
3	① $\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	③ $\boxed{10}$	4
销量	5	2	4	6	

$\lambda_{12}=6-10+5-10+9-0=0$

$\lambda_{13}=7-10+5-10+9-5=-4<0$

$\lambda_{14}=12-10+5-10=-3<0$

$\lambda_{21}=16-5+10-9=12$

$\lambda_{32}=4-0+9-10=3$ $\quad \min\{-4,-3\}=-4$

$\lambda_{33}=10-5+9-10=4$ $\quad X_{13}$入基

闭回路

$$\begin{tikzcd}
X_{11} \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & X_{13} \arrow[d, dash] & & & 0 \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & ③ \arrow[d, dash] & \\
& X_{23} \arrow[r, dash] & X_{24} \arrow[d, dash] \arrow[r] & {} & & 0 \arrow[r, dash] & ⑥ \arrow[d, dash] \\
X_{31} \arrow[rr, dash] & & X_{34} & & ④ \arrow[rr, dash] & & 0
\end{tikzcd}$$

偶点 X_{11}, X_{34}, X_{23} $\quad \min\{4,3,4\}=3$ 调整量

X_{34}出基

2、§3 产销不平衡的运输问题

产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	产量
1	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{12}$ 1	4
2	$\boxed{16}$ 8	$\boxed{0}$ 2	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{9}$ 6	9
3	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{10}$ 8	$\boxed{10}$ 4	4
销量	5	2	4	6	

$\lambda_{12} = 6-7+5-0=4$

$\lambda_{14} = 12-7+5-9=1$

$\lambda_{21} = 16-10+7-5=8$

$\lambda_{32} = 4-5+10-7+5-0=7$

$\lambda_{33} = 10-5+10-7=8$

$\lambda_{34} = 10-5+10-7+5-9=4$

最优解 $x_{11}=1$, $x_{13}=3$, $x_{22}=2$, $x_{23}=1$, $x_{24}=6$, $x_{31}=4$, 目标值 $f=1\times10+3\times7+2\times0+1\times5+6\times9+4\times5=110$.

2、§3 产销不平衡的运输问题

P139. 第三节 产销不平衡的运输问题

一. 产大于销

可增加一个虚设的销地

P154. 9. 求表5-51所示运输问题的最优解

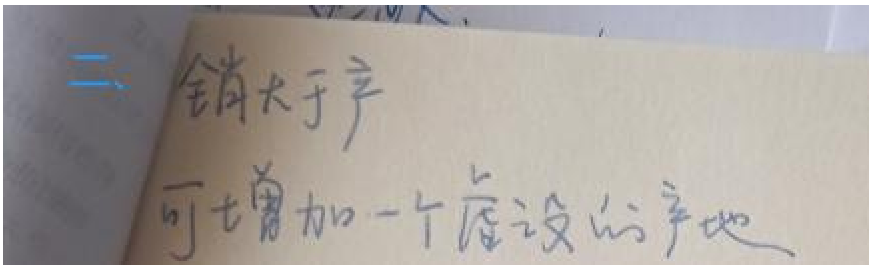
表5-51 运输表(十二)

产地	销地 1	销地 2	销地 3	产量
1	5	1	6	18
2	2	4	2	12
3	3	7	6	6
销量	10	9	7	

↓

增加虚设销地4

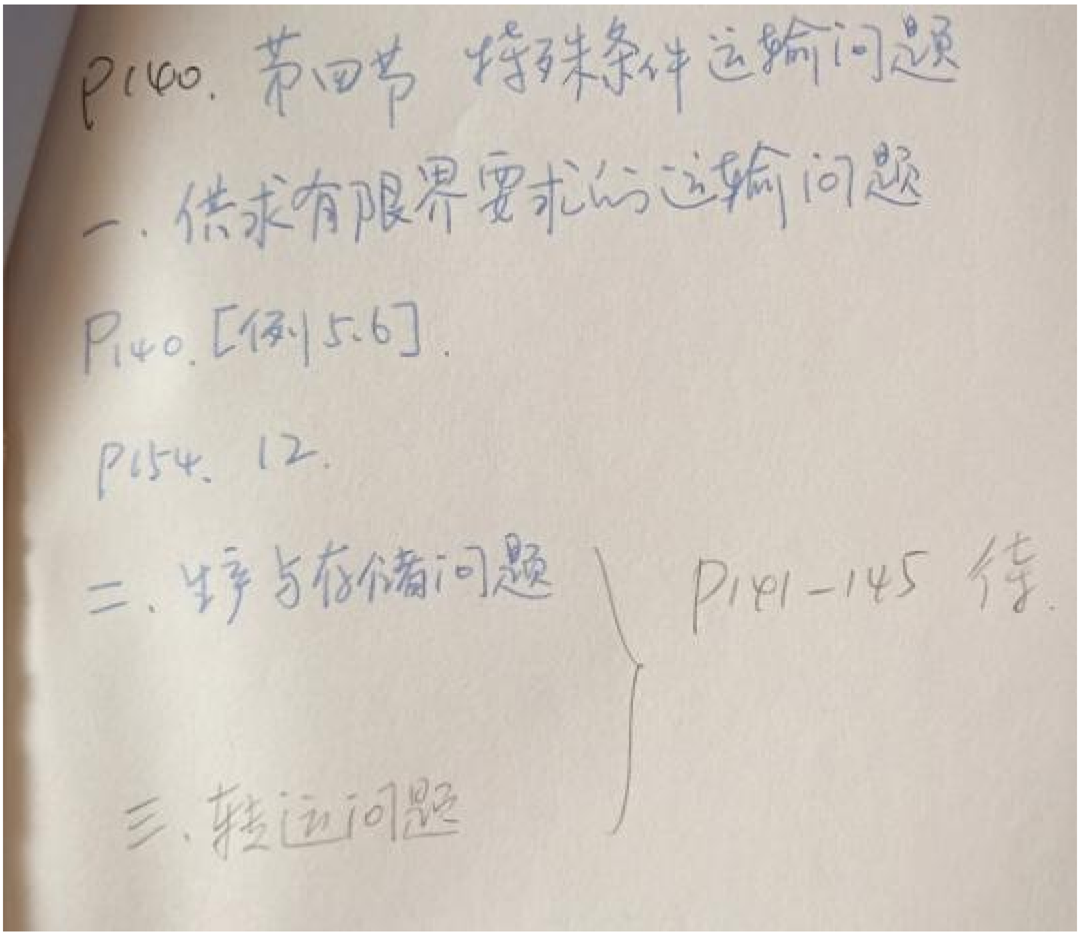
产地	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	产量
1	5	1	6	0	18
2	2	4	2	0	12
3	3	7	6	0	6
销量	10	9	7	10	



二、销大于产

可增加一个虚设的产地

3、§4 特殊条件运输问题



P140. 第四节 特殊条件运输问题

一、供求有限界要求的运输问题

P140. [例5.6].

P154. 12.

二、生产与存储问题 P141-145 停.

三、转运问题

第四节　特殊条件运输问题

一、供求有限界要求的运输问题

【例 5.6】 有三个原油产地 A_1、A_2 和 A_3，负责向三个炼油厂 B_1、B_2 和 B_3 运输原油，原油的供应量、需求量与单位运价（单位：元）如表 5-24 所示。三个炼油厂的需求量分为最低需求量和最高需求量两种，最低需求量必须满足，最低需求量到最高需求量之间的需求量若不能被满足，就会造成经济损失。其中，B_1 的需求必须被满足（最低需求量和最高需求量相等），B_2 和 B_3 没有被满足的需求的单位损失分别为 3 元和 2 元。试求最优调运方案，使总成本（运费和损失）最低。

表 5-24　原油运输表

产地	销地			供应量/吨
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	1	7	200
A_2	6	4	6	800
A_3	3	2	5	150
最低需求量/吨	600	120	300	
最高需求量/吨	600	200	430	

解：由于 B_2 的最高需求量与最低需求量不相等，B_2 的最低需求量必须被满足，剩余那部分需求量可能全部被满足，也可能部分被满足或都不被满足，所以应将 B_2 看作两个销地 B_{21} 和 B_{22}，其中 B_{21} 的需求量为 B_2 的最低需求量，B_{22} 的需求量为 B_2 的最高需求量与最低需求量的差值。对 B_3 做同样处理，使其变为两个销地 B_{31} 和 B_{32}。这样就变为 3 个产地、5 个销地的运输问题，且总供应量为 1150 吨，总需求量为 1230 吨，供不应求，因此增加虚产地 A_4，供应量为 80 吨。与前面虚设的产地向各销地运输的单位运价都为 0 不同，由于各销地的最低需求量必须被满足，因此不能由虚产地 A_4 供应，只能由实际的产地供应，这样 A_4 向销地 B_1、B_{21} 和 B_{31} 运输的单位运价应为 M，即一个很高的运价。A_4 向销地 B_{22} 和 B_{32} 运输的单位运价应为单位损失费用 3 元和 2 元。于是，我们得到一个产销平衡的运输模型，如表 5-25 所示。

表 5-25 产销平衡的运输模型

产地	销地					供应量/吨
	B_1	B_{21}	B_{22}	B_{31}	B_{32}	
A_1	5	1	1	7	7	200
A_2	6	4	4	6	6	800
A_3	3	2	2	5	5	150
A_4	M	M	3	M	2	80
需求量/吨	600	120	80	300	130	

应用表上作业法求解，得到最优调运方案，如表 5-26 所示。

表 5-26 最优调运方案（一）

产地	销地					供应量/吨
	B_1	B_{21}	B_{22}	B_{31}	B_{32}	
A_1		120	80			200
A_2	450			300	50	800
A_3	150					150
A_4					80	80
需求量/吨	600	120	80	300	130	

从最优调运方案中可以看出，B_2 的最高需求量 200 吨都被满足了，而 B_3 的需求只满足了 350 吨，比其最高需求相差 80 吨，因此损失费用为 160 元。总运费为 5450 元，总成本为 5610 元。

$450\times6+150\times3+120\times1+80\times1+300\times6+50\times6$

$5450+160$

二、生产与存储问题

某些生产问题，由于生产能力和需求之间的不同，会出现产品的存储。例如，需求旺季时生产能力无法满足需求，于是企业会在淡季时多生产一些产品，存储到旺季。这类涉及生产与存储的问题大多可以通过运输问题来解决。

复习思考题、作业题：

P154 第 9、10 题。

<table>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点
§5 应用 LINGO 软件求解运输问题
第五章习题课</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="5">1、通过案例对比（如平衡→不平衡、普通→特殊条件）强化转化思想。
2、结合实际问题（如物流调度中的禁运区域、电商中转仓）增强学生的应用能力。
3、对难点问题设计分步练习，例如先处理单一特殊条件，再逐步增加复杂度。
4、在产销不平衡运输问题中强化思政目标，树立全局观念与资源优化意识。例如：通过将产销不平衡问题转化为平衡问题（引入虚设点），引导学生理解“局部服从整体”的系统思维，体现国家倡导的“资源节约型社会”理念。强化社会责任感，例如：分析疫情期间医疗物资运输的产销不平衡问题，在虚设点运价设定中，若运价代表“缺货成本”或“库存成本”，可引申到企业对社会需求的响应责任（如疫情期间物资运输的优先级），强调企业需兼顾经济效益与社会效益。
　　通过以上设计，学生不仅能掌握运输问题的建模与求解方法，还能在专业学习中自然形成大局观、创新意识、法治观念和社会责任感，实现知识传授与价值引领的深度融合。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 11 周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 11 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">§5 应用 LINGO 软件求解运输问题
第五章习题课</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">1、巩固掌握利用表上作业法求解运输问题的过程步骤；
2、熟悉借助 LINGO 软件编程实现对运输问题的求解；</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="5">通过让学生在笔记本电脑上把代码敲一遍，运行，查找 Bug，修正，加强学生对该程序的了解，培养学生的耐心，锻炼学生的抗挫能力。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="5">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学</td><td colspan="5">重点：巩固掌握利用表上作业法求解运输问题的过程步骤</td></tr>
</table>

重　点 难　点	难点：借助 LINGO 软件编程实现对运输问题的求解，查找过程的 Bug 并修正

教学步骤及内容：

1、求解运输问题

运费单价 销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（吨）
A_1	20	16	24	300
A_2	10	10	8	500
A_3	80	18	10	100
销量（吨）	200	400	300	900 900

2025.4.30 练习 求产销平衡的运输问题

运费单价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	产量(吨)
A_1	20	16	24	300
A_2	10	10	8	500
A_3	80	18	10	100
销量(吨)	200	400	300	900 / 900

解：用西北角法求初始基.

产地	销地 B_1	B_2	B_3	产量
A_1	$\boxed{20}$ 200	$\boxed{16}$ 100	$\boxed{24}$ ×	300
A_2	$\boxed{10}$ ×	$\boxed{10}$ 300	$\boxed{8}$ 200	500
A_3	$\boxed{80}$ ×	$\boxed{18}$ ×	$\boxed{10}$ 100	100
销量	200	400	300	

$X_{11}=200$, $X_{12}=100$, $X_{22}=300$, $X_{23}=200$, $X_{33}=100$.

目标值 $f=200\times20+100\times16+300\times10+200\times8+100\times10=11200$

求非基变量的检验数.

$\lambda_{13} = 24-8+10-16 = 10$

$\lambda_{21} = 10-10+16-20 = -4$

$\lambda_{31} = 80-10+8-10+16-20 = 64$

$\lambda_{32} = 18-10+8-10 = 6$

只有 $\lambda_{21} = -4 < 0$. 故 x_{21} 入基.

寻找含 x_{21} 的闭回路.

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & — & x_{12} \\ | & & | \\ x_{21} & — & x_{22} \end{array}$$

偶点 x_{11}, x_{22}.

$\min\{200, 300\} = 200$. 奇加偶减

$$\begin{array}{ccc} 0 & — & 300 \\ | & & | \\ 200 & — & 100 \end{array}$$

x_{11} 出基.

产地	销地 B1	销地 B2	销地 B3	产量
A1	20 ×	16 300	24 ×	300
A2	10 200	10 100	8 200	500
A3	80 ×	18 ×	10 100	100
销量	200	400	300	

求非基变量的检验数.

$\lambda_{11}=20-10+10-16=4$

$\lambda_{13}=24-16+10-8=10$

$\lambda_{31}=80-10+8-10=68$

$\lambda_{32}=18-10+8-10=6$

此时所有非基变量的检验数均大于0.

故得最优解 $x_{12}=300$，$x_{21}=200$，$x_{22}=100$，

$x_{23}=200$，$x_{33}=100$

目标函数最优值 $f=300\times16+200\times10+100\times10$

$+200\times8+100\times10=10400$

2、应用 LINGO 软件求解运输问题

第五节　应用LINGO软件求解运输问题

LINGO 软件的最大优势是可以通过内置建模语言来描述实际问题，然后借助于 LINGO 求解器求解。前面我们求解线性规划问题时，采用的是标量变量法，就是将每个变量、每个约束条件和目标函数都逐一列出。但对像运输问题这样的线性规划模型，由于变量和约束条件非常多，采用标量变量法会非常麻烦。因此 LINGO 为我们提供了编程语言，用 LINGO 内置函数编写的程序与标准的数学符号非常相似，这样就可以用一个简单的语句表达一系列类似的约束，从而可以简捷快速地表示较大规模的数学规划问题。

我们以下述运输问题为例，具体讲解 LINGO 编程的方法。

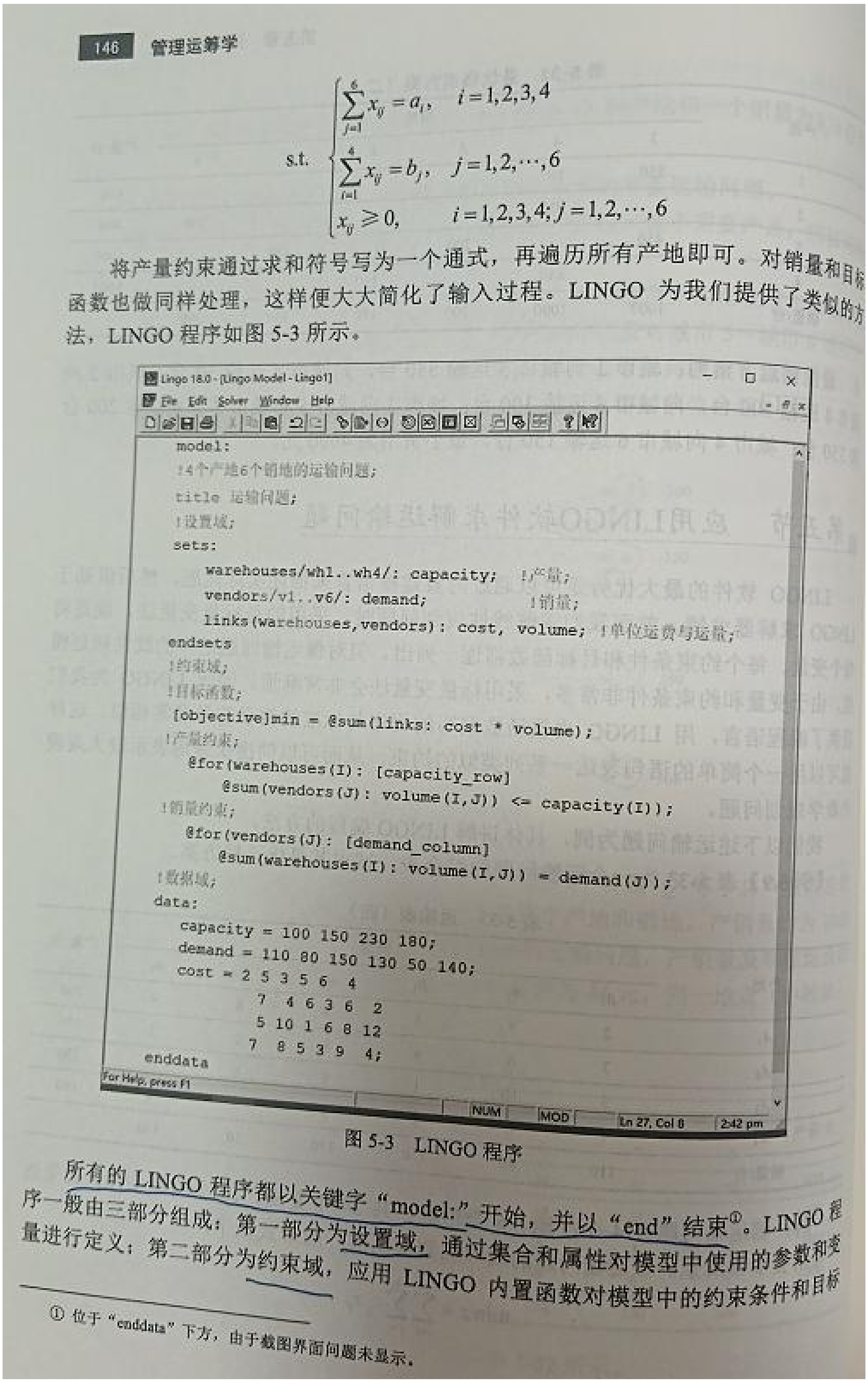
【例 5.9】表 5-33 为一个运输问题的综合表，试求其最优运输方案。

表 5-33　运输表（四）

产地	销地						产量/台
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	2	5	3	5	6	4	100
A_2	7	4	6	3	6	2	150
A_3	5	10	1	6	8	12	230
A_4	7	8	5	3	9	4	180
销量/台	110	80	150	130	50	140	

解：该运输问题有 4 个产地、6 个销地，共 24 个变量，10 个约束条件，如果逐一写出会非常麻烦。该运输问题的线性规划模型的一般形式如下：

$$\min z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}c_{ij}x_{ij}$$



$$
\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{6} x_{ij}=a_i, & i=1,2,3,4\\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij}=b_j, & j=1,2,\cdots,6\\ x_{ij}\geqslant 0, & i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,6\end{cases}
$$

将产量约束通过求和符号写为一个通式，再遍历所有产地即可。对销量和目标函数也做同样处理，这样便大大简化了输入过程。LINGO 为我们提供了类似的方法，LINGO 程序如图 5-3 所示。

Lingo 18.0 - [Lingo Model - Lingo1]

File Edit Solver Window Help

```
model:
!4个产地6个销地的运输问题;
title 运输问题;
!设置域;
sets:
   warehouses/wh1..wh4/: capacity;  !产量;
   vendors/v1..v6/: demand;          !销量;
   links(warehouses,vendors): cost, volume; !单位运费与运量;
endsets
!约束域;
!目标函数;
[objective]min = @sum(links: cost * volume);
!产量约束;
  @for(warehouses(I): [capacity_row]
     @sum(vendors(J): volume(I,J)) <= capacity(I));
!销量约束;
  @for(vendors(J): [demand_column]
     @sum(warehouses(I): volume(I,J)) = demand(J));
!数据域;
data:
  capacity = 100 150 230 180;
  demand = 110 80 150 130 50 140;
  cost = 2 5 3 5 6 4
         7 4 6 3 6 2
         5 10 1 6 8 12
         7 8 5 3 9 4;
enddata
```

For Help, press F1 NUM MOD Ln 27, Col 8 2:42 pm

图 5-3 LINGO 程序

所有的 LINGO 程序都以关键字“model:”开始，并以“end”结束①。LINGO 程序一般由三部分组成：第一部分为设置域，通过集合和属性对模型中使用的参数和变量进行定义；第二部分为约束域，应用 LINGO 内置函数对模型中的约束条件和目标

① 位于“enddata”下方，由于截图界面问题未显示。

讲解 LINGO 软件求解运输问题的程序：设置域、约束域和数据域，让学生在笔记本电脑上把该页代码敲一遍，运行，查找 Bug，修正，然后用经过校验的代码求解类似题目，例如前面的练习题(本节课开头)和上节课做过的课后习题 P153 第 6 题。

①练习题(本节课开头)

运费单价 \ 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	产量（吨）
A_1	20	16	24	300
A_2	10	10	8	500
A_3	80	18	10	100
销量(吨)	200	400	300	900 / 900

程序：

```
model:
!3 个产地 3 个销地的运输问题;
title 运输问题;
!设置域;
sets:
warehouses/wh1..wh3/:capacity;!产量;
vendors/v1..v3/:demand;!销量;
links(warehouses,vendors):cost,volume;!单位运费与运量;
endsets
!约束域;
!目标函数;
[objective]min=@sum(links:cost*volume);
!产量约束;
@for(warehouses(I):[capacity_row]
@sum(vendors(J):volume(I,J))<=capacity(I));
!销量约束;
@for(vendors(J):[demand_column]
@sum(warehouses(I):volume(I,J))=demand(J));
!数据域;
```

data:

capacity=300 500 100;

demand=200 400 300;

cost=20 16 24

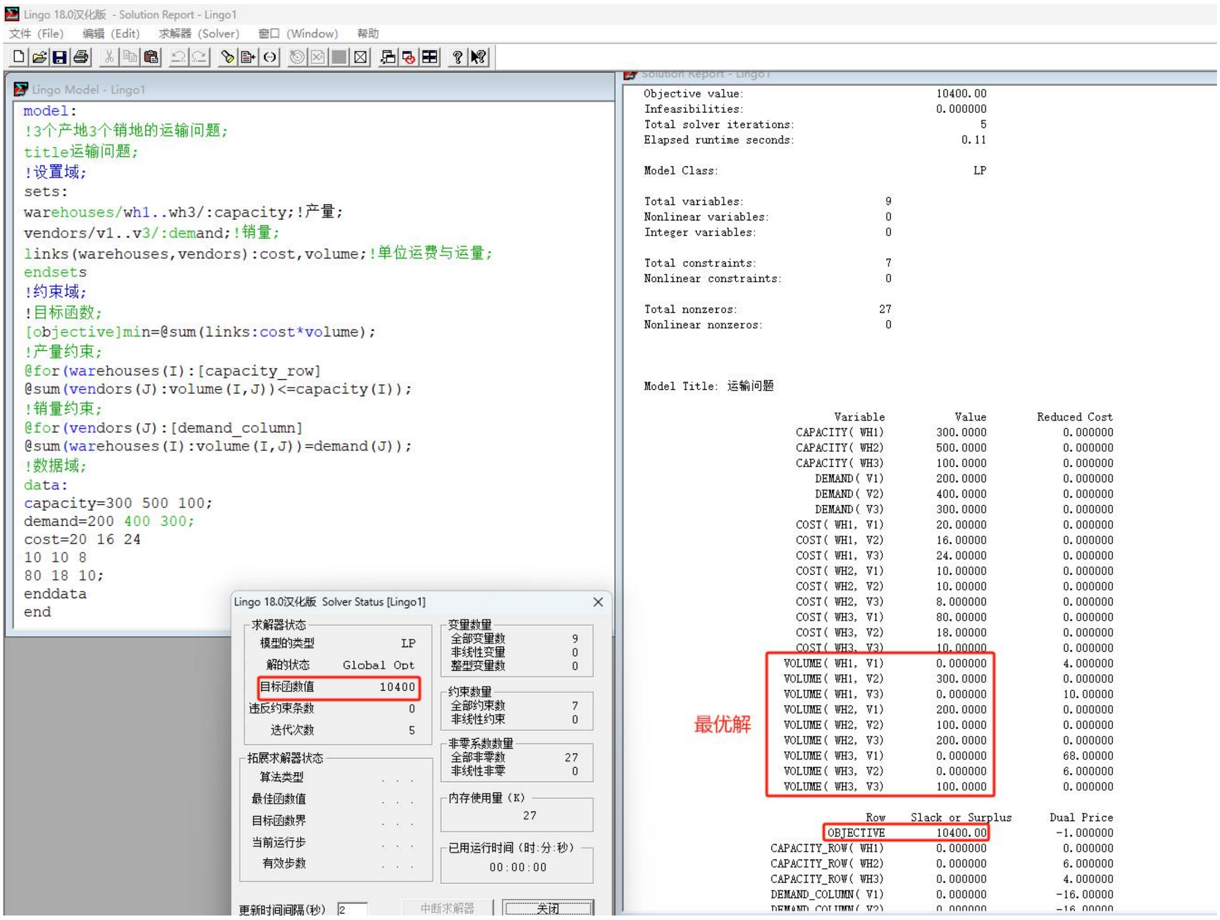
10 10 8

80 18 10;

enddata

end

运行结果截图：



②P153 第 6 题

6. 用表上作业法求表 5-48 给出的运输问题的最优解。

表 5-48　运输表（九）

产地	销地				产量
	1	2	3	4	
1	10	6	7	12	4
2	16	0	5	9	9
3	5	4	10	10	4
销量	5	2	4	6	

程序：

```
model:
!3 个产地 4 个销地的运输问题;
title 运输问题;
!设置域;
sets:
warehouses/wh1..wh3/:capacity;!产量;
vendors/v1..v4/:demand;!销量;
links(warehouses,vendors):cost,volume;!单位运费与运量;
endsets
!约束域;
!目标函数;
[objective]min=@sum(links:cost*volume);
!产量约束;
@for(warehouses(I):[capacity_row]
@sum(vendors(J):volume(I,J))<=capacity(I));
!销量约束;
@for(vendors(J):[demand_column]
@sum(warehouses(I):volume(I,J))=demand(J));
!数据域;
data:
```

capacity=4 9 4;

demand=5 2 4 6;

cost=10 6 7 12

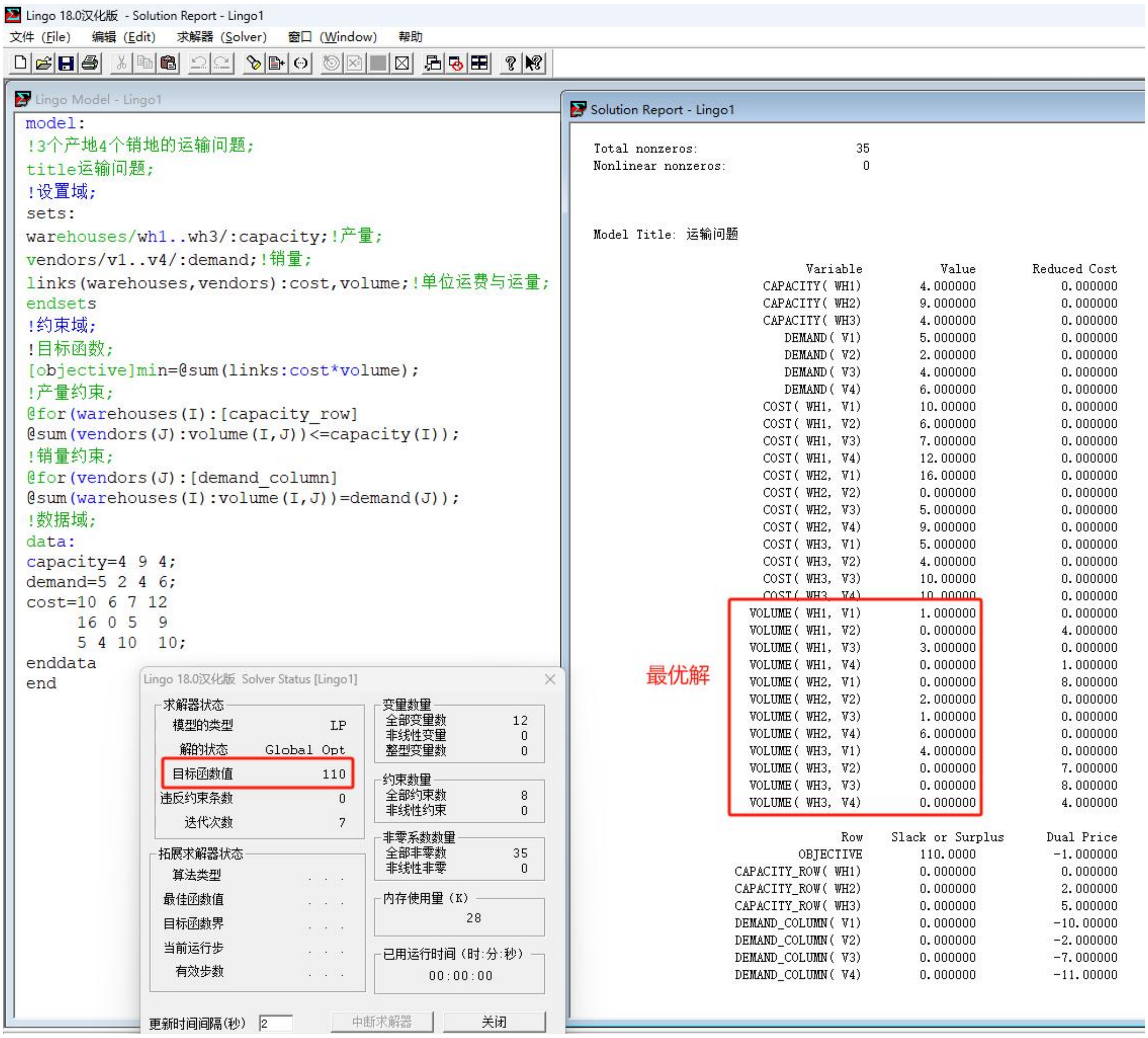
16 0 5 9

5 4 10 10;

enddata

end

运行结果截图：



复习思考题、作业题：

1、求解运输问题：

运费单价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	10	16	32	15
A_2	14	22	40	7
A_3	22	24	34	16
销量	12	8	20	

2、查找下面代码的 Bug。

```
model:
! 3 个产地 3 个销地的运输问题;
title  运输问题;
!  设置域;
sets:
warehouses/wh1..wh4/: capacity; !  产地;
vendors/v1..v6/: demand; !  销地;
links(warehouses,vendors): cost, volume; !  单位运费与运量;
endsets
!  目标函数;
[objective]min = @sum(links: cost * volume);
!  产量约束;
@for(warehouses(I): @sum(vendors(J): volume(I,J)) <= capacity(I));
!  销量约束;
@for(vendors(J): @sum(warehouses(I): volume(I,J)) = demand(J));
!  数据域;
data:
capacity =200 400 300;
demand =300 500 100;
  cost = 20 16 24
          10 10 8
          80 18 10;
```

enddata

end

下次课预习要点

第六章整数规划

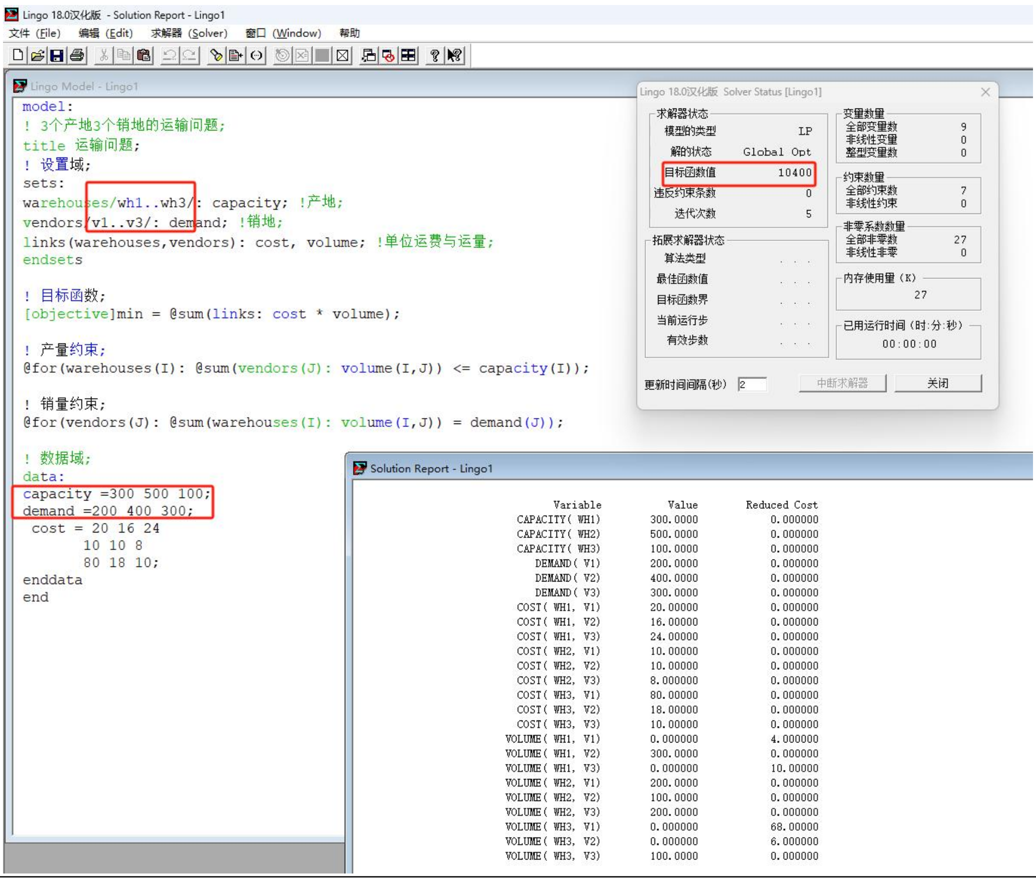
§1 整数规划问题及其数学模型

§2 整数规划模型的解法

教学后记

本节课主要复习巩固利用表上作业法求解运输问题的过程步骤，并借助 LINGO 软件编程实现对运输问题的求解，通过二者相比较，使同学们明白编程求解的优势：一个程序调试通过之后，就可以求解一整类问题，实现时只需对参数稍作调整即可，方便快捷。通过让学生在笔记本电脑上把代码敲一遍，运行，查找 Bug，修正，加强了学生对该程序的了解，培养了学生的耐心，锻炼了学生的抗挫能力。

附前面代码查 Bug 答案：



授课时间	第 12 周	课　次	第 12 次

<table>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="3">第六章整数规划
§1 整数规划问题及其数学模型
§2 整数规划模型的解法</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td>理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="3">1.理解整数规划问题的基本概念、特点及与线性规划的区别。
2.掌握整数规划模型的常见形式（纯整数规划、混合整数规划、0-1 规划）。
3.掌握分支定界法、割平面法等经典解法的原理与步骤。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="3">1. 结合资源分配、生产调度等案例，引导学生关注优化决策中的公平性、效率和可持续发展理念。
2. 通过介绍整数规划理论的发展历程（如割平面法的提出者 Ralph Gomory 的贡献），强调数学家的探索精神和跨学科创新思维。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="3">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="3">重点：整数规划问题的特点及其与线性规划的本质区别、分支定界法的核心思想与计算流程。
难点：分支定界法中“剪枝”策略的逻辑理解与实现、割平面法的几何解释及切割条件的构造。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学步骤及内容：</td></tr>
</table>

Ch6 整数规划

整数线性规划（整数规划）
1. 纯整数规划（全整数规划）
2. 混合整数规划
3. 0-1规划

P156. 第一节 整数规划问题及其数学模型

一、问题的提出

[例6.1] $\max z = 3x_1 + 4x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 1.5x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0，且为整数. \end{cases}$$

复习单纯形法，先不考虑整数约束。

化标准形式 $\max z = 3x_1 + 4x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 1.5x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

C			x_1	x_2	x_3	x_4
C_B	X_B	b	3	4	0	0
0	x_3	7	1	$\boxed{2}$	1	0
0	x_4	6	1.5	1	0	1
$z=0$			3	4		

x_2入基

x_3出基

C			x_1	x_2	x_3	x_4	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	3	4	0	0	
4	x_2	7/2	1/2	1	1/2	0	
0	x_4	2.5	$\boxed{1}$	0	-0.5	1	x_1入基
$z=14$			1	0	-2	0	x_4出基
C_B	X_B	$B^{-1}b$	此行可删				
4	x_2	2.25	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
3	x_1	2.5	1	0	-0.5	1	
$z=16.5$			0	0	-1.5	-1	

也可以复习LINGO 单纯形法. P65.第二节.

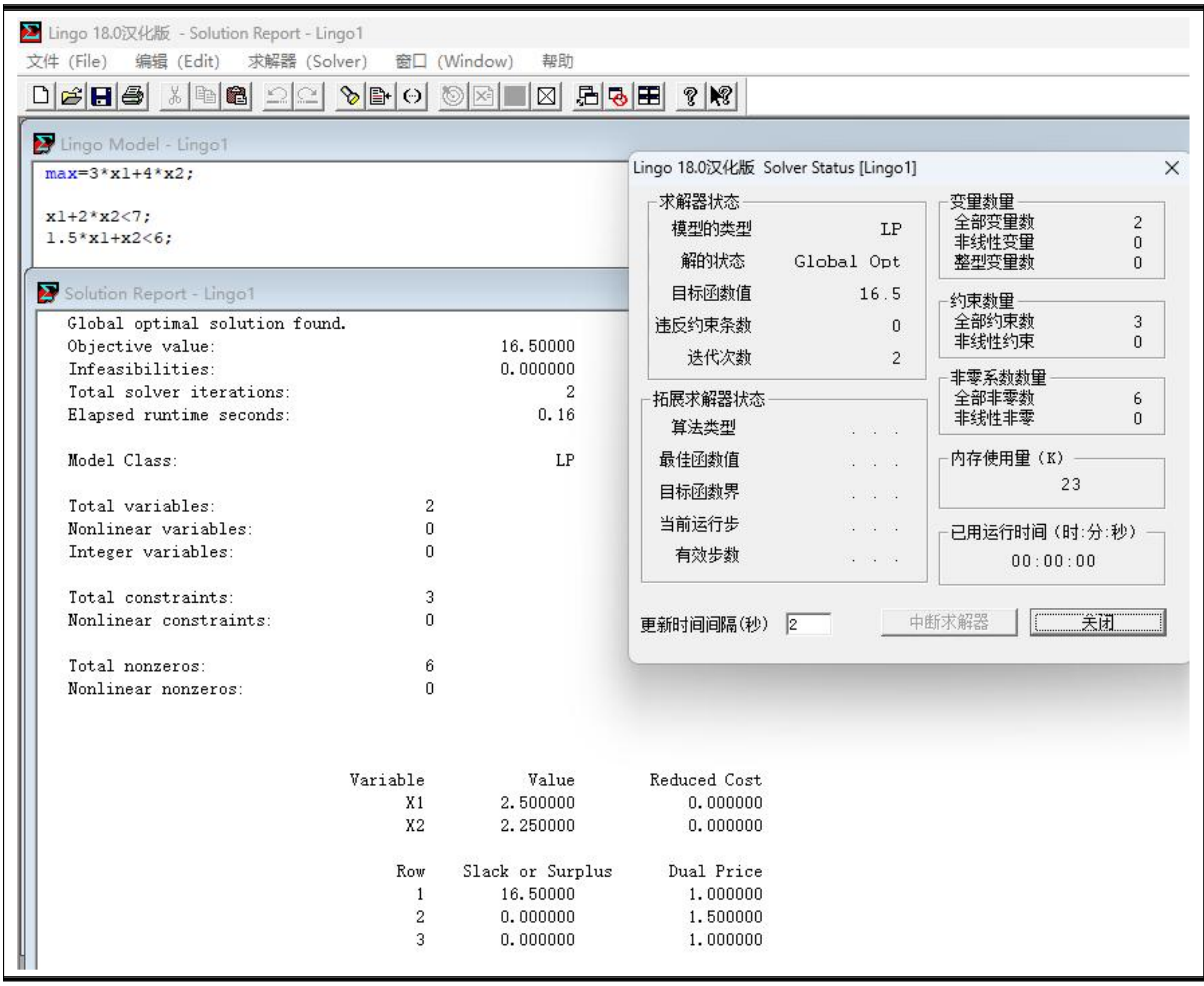
最优解 $x_1=2.5$, $x_2=2.25$. $z=16.5$.

不满足整数约束.

怎么办? ① 对变量值四舍五入. (×)

② 对变量值去除小数部分(×)

③ 图解法 解释①② 的不行原因.


Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1
文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助
Lingo Model - Lingo1
max=3*x1+4*x2;
x1+2*x2<7;
1.5*x1+x2<6;
Solution Report - Lingo1
Global optimal solution found.
Objective value: 16.50000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 0.16
Model Class: LP
Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 6
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X1 2.500000 0.000000
X2 2.250000 0.000000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 16.50000 1.000000
2 0.000000 1.500000
3 0.000000 1.000000
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]
求解器状态
模型的类型 LP
解的状态 Global Opt
目标函数值 16.5
违反约束条数 0
迭代次数 2
拓展求解器状态
算法类型
最佳函数值
目标函数界
当前运行步
有效步数
变量数量
全部变量数 2
非线性变量 0
整型变量数 0
约束数量
全部约束数 3
非线性约束 0
非零系数数量
全部非零数 6
非线性非零 0
内存使用量 (K)
23
已用运行时间 (时:分:秒)
00:00:00
更新时间间隔(秒) 2
中断求解器
关闭

二、整数规划数学模型的一般形式

$$\max z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0\text{，且全部或部分为整数} \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\max z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

称(6.6)为整数规划问题(6.5)的松弛问题.

二者关系：

(1) (6.6)的可行域包含(6.5)的全部可行解.

(2) 若两者都有最优解，则(6.6)的目标值 $\ge$ (6.5)的

(3) 若(6.6)的最优解为整数，则它一定是整数规划问题的最优解.

P158. 第二节 整数规划模型的解法.

求解纯整数规划问题和混合整数规划问题的常用方法有分枝定界法和割平面法.

一. 分枝定界法

分枝定界法是求纯整数规划或混合整数规划问题的一种行之有效的方法.

P158 分枝定界法的思想.

步骤:

第一步: 求松弛问题的最优解. 若满足整数约束, 则为整数规划的最优解. 否则转下一步.

第二步: 分枝

第三步: 定界.

第四步: 比较与"剪枝"

P159. [例6.2] 应用分枝定界法求解例6.1的最优解.

step1. 记松弛问题为 LP_0. P156. $z = 16.5$.

$x_1 = 2.5,\ x_2 = 2.25$

step2. $x_1 = 2.5$. $[b_i'] = 2$. P158-159.

令 $x_1 \le 2$ 和 $x_1 \ge 3$. 得到两个分枝问题 LP_1. LP_2.

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$LP_1: \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 1.5x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$LP_2: \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 1.5x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

用对偶单纯形法求解 LP_1. LP_2. P160-161

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$LP_1: \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 1.5x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

最优解 $x_1 = 2,\ x_2 = 2.5$

$z_1 = 16$

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$LP_2: \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 1.5x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

最优解 $x_1 = 3,\ x_2 = 1.5$

$z_2 = 15$

Step3. 定界.

P162. 利用表6-4计算LP3.

P161 $\max z = 3x_1 + 4x_2$

$$LP3: s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 1.5x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 2 \longrightarrow x_2 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

减去 $x_2 + 0.5x_3 - 0.5x_5 = 2.5$

得 $-0.5x_3 + 0.5x_5 + x_6 =$

P160表6-4的延伸：求LP3的单纯形表.

	C		3	4	0	0	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_2	2.5	0	1	0.5	0	-0.5	0	
3	x_1	2	1	0	0	0	1	0	
0	x_4	0.5	0	0	-0.5	1	-1	0	
0	x_6	-0.5	0	0	$\boxed{-0.5}$	0	0.5	1	x_6出基
$z=16$			0	0	-2	0	-1	0	x_3入基
4	x_2	2	0	1	0	0	0	1	
3	x_1	2	1	0	0	0	1	0	
0	x_4	1	0	0	0	1	-1.5	-1	
0	x_3	1	0	0	1	0	-1	-2	
$z=14$			0	0	0	0	-3	-4	

得LP3的最优解 $x_1=2$，$x_2=2$．目标值 $z_3=14$．

P162．利用表6-4计算LP4．

P161．LP4:

$$\max z=3x_1+4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\le 7 \\ 1.5x_1+x_2\le 6 \\ x_1\le 2 \\ x_2\ge 3 \longrightarrow x_2-x_6=3 \quad \text{凑基引入表} \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

减去第一行 $x_2+0.5x_3-0.5x_5=2.5$

$-0.5x_3+0.5x_5-x_6=0.5$

两边乘(-1)，得表中蓝色

P160 表6-4的延伸：求LP4的单纯形表

C			3	4	0	0	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_2	2.5	0	1	0.5	0	-0.5	0	
3	x_1	2	1	0	0	0	1	0	
0	x_4	0.5	0	0	-0.5	1	-1	0	
0	x_6	~~3~~ -0.5	0	~~1~~ 0	0.5	0	0.5	~~-1~~ 1	
$z=16$			0	0	-2	0	-1	0	x_6出基 x_5入基
4	x_2	3	0	1	0	0	0	-1	
3	x_1	1	1	0	1	0	0	2	
0	x_4	1.5	0	0	-1.5	1	0	-2	
0	x_5	1	0	0	-1	0	1	-2	
$z=15$			0	0	-3	0	0	-2	

p163 二、割平面法

基本思想：对给定的整数规划问题，先不考虑其整数约束，而解相应的松弛问题，若松弛问题的最优解符合整数要求，则它就是原问题的最优解；若松弛问题的最优解中，至少有一个有整数约束的基变量取非整数值，则对该线性规划问题增加一个线性约束条件（或可以称为割平面），再进行求解。

关键是如何找到适当的割平面，满足使可行域缩小又不切掉整数解的条件。

介绍割平面约束条件的构造。

对整数规划问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ 且为整数 \end{cases}$$

松弛问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, 4 \end{cases}$$

单纯形法求松弛问题.

C			1	1	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	$\boxed{2}$	1	1	0
0	x_4	20	4	5	0	1
$z=0$			1	1	0	0
1	x_1	3	1	$1/2$	$1/2$	0
0	x_4	8	0	$\boxed{3}$	-2	1
$z=3$			0	$1/2$	$-1/2$	0
1	x_1	$5/3$	1	0	$5/6$	$-1/6$
1	x_2	$8/3$	0	1	$-2/3$	$1/3$
$z=13/3$			0	0	$-1/6$	$-1/6$

x_1入基 x_3出基

x_2入基 x_4出基

最优解 $x_1=5/3$, $x_2=8/3$ 不满足整数约束.

最终单纯形表中第1个约束条件 $x_1+\frac{5}{6}x_3-\frac{1}{6}x_4=\frac{5}{3}$

将非整数系数变为一个整数与一个纯正小数之和.

即 $x_1+(0+\frac{5}{6})x_3+(-1+\frac{5}{6})x_4=1+\frac{2}{3}$

整系数与非整系数分离:

$x_1-x_4-1=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}x_3-\frac{5}{6}x_4$ 即<1 即≤ 0.

左边必为整数. $\Longrightarrow$ 右边也必为整数

切割不等式 $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}x_3-\frac{5}{6}x_4\leq 0$.

由整数规划问题的第①、②个约束条件解出

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 20 - 4x_1 - 5x_2$$

从而切割不等式转化如下：

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{6}(6 - 2x_1 - x_2) - \frac{5}{6}(20 - 4x_1 - 5x_2) \le 0$$

$$\frac{2}{3} - 5 + \frac{10}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - \frac{50}{3} + \frac{20}{6}x_1 + \frac{25}{6}x_2 \le 0$$

$$-21 + 5x_1 + 5x_2 \le 0$$

P165. 图 6-8. 图6-9. $5x_1 + 5x_2 \le 21$

图解.

P165. 利用割平面法求解整数规划问题的步骤.

第一步. 将松弛问题化为标准形，计算最优解.

第二步. 若所有的 b_i 都为整数，则得到整数规划问题的最优解. 否则转下一步.

第三步. 任意选择一个 b_r 取值不是整数的基变量 x_r 修改 x_r 所在行的约束. 得到切割不等式. 变形. 增加松弛变量. 化变形后的切割不等式为标准形.

在第一步的最终单纯形表中应用对偶单纯形法求出最优解. 转第二步.

P166. [例16.3] 应用割平面法求解下列整数规划问题的最优解.

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数}. \end{cases}$$

解:

Step1. 松弛问题化标准形.

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解.

C			1	1	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	2	3	1	0	
0	x_4	15	$\boxed{5}$	-3	0	1	x_1入基
$z=0$			1	1	0	0	x_4出基
0	x_3	6	0	$\boxed{21/5}$	1	-2/5	
1	x_1	3	1	-3/5	0	1/5	

$z=3$			0	8/5	0	-1/5	x_2入基
1	x_2	10/7	0	1	5/21	-2/21	x_3出基
1	x_1	27/7	1	0	1/7	1/7	
$z=37/7$			0	0	-8/21	-1/21	

$x_1=\frac{27}{7}$ 非整数. 选择第二个约束条件：

$$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{7}x_4=\frac{27}{7}.$$

$$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{1}{7}x_4=3+\frac{6}{7}$$

$$x_1-3=\frac{6}{7}-\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{7}x_4\leq 0$$

即 $-\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{7}x_4\leq\frac{-6}{7}$　切割不等式

增加松弛变量 x_5，将其转化为标准型：

$$-\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{7}x_4+x_5=\frac{-6}{7}$$

扩展本页上表. 用对偶单纯形法求解.

C			1	1	0	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_2	10/7	0	1	$\frac{5}{21}$	$\frac{-2}{21}$	0	
1	x_1	27/7	1	0	1/7	1/7	0	
0	x_5	-6/7	0	0	-1/7	$\boxed{-1/7}$	1	x_5出基
$z=37/7$			0	0	-8/21	-1/21	0	x_4入基

C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	2	0	1	1/3	0	-2/3
1	x_1	3	1	0	0	0	1
0	x_4	6	0	0	1	1	-7
$z=5$			0	0	-1/3	0	-1/3

至此，所有变量取值均为整数，得整数规划的最优解为 $x_1=3$，$x_2=2$，$x_4=6$，目标值为 $z=5$.

或对切割不等式先作化简.

由松弛问题的标准形式得：

$$\begin{cases} x_3=12-2x_1-3x_2 \\ x_4=15-5x_1+3x_2 \end{cases}$$

代入切割不等式的表达式 $-\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{7}x_4\le\frac{-6}{7}$.

$$-\frac{1}{7}(12-2x_1-3x_2)-\frac{1}{7}(15-5x_1+3x_2)\le\frac{-6}{7}$$

$$-\frac{12}{7}+\frac{2}{7}x_1+\frac{3}{7}x_2-\frac{15}{7}+\frac{5}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2\le\frac{-6}{7}$$

$$x_1\le 3$$

增加松弛变量 x_5，将 $x_1\le 3$ 化成标准型

$$x_1+x_5=3.$$

扩展左页上表，用对偶单纯形法求解：

C			1	1	0	0	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	10/7	0	1	5/21	-2/21	0
1	x_1	27/7	1	0	1/7	1/7	0
0	x_5	-6/7	1	0	0	0	1
$z=37/7$			0	0	-8/21	-1/21	0

x_5出基

发现找不到入基变量

对偶单纯形法用不了。所以课本不化简切割式

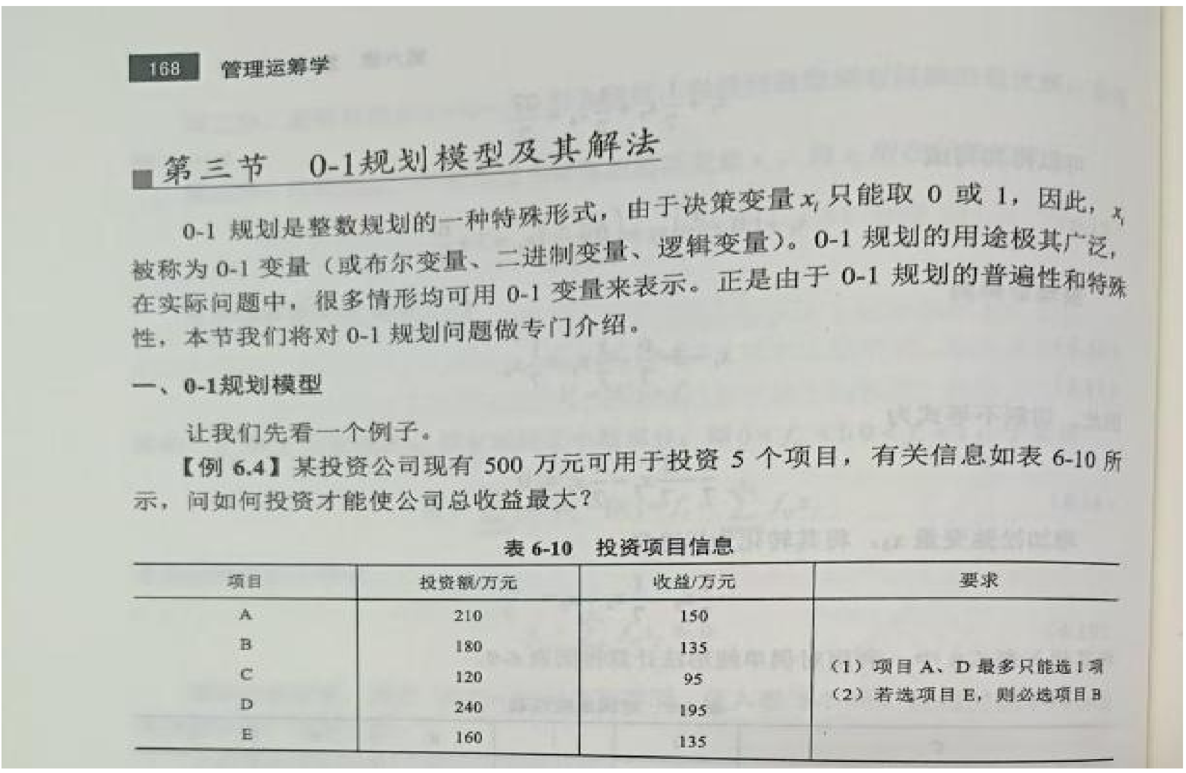
由此可见割平面的选取十分讲究。

复习思考题、作业题： P159 习题 1			
下次课预习要点 §3 0-1 规划模型及其解法 §4 整数规划建模应用			
教学后记	学生能清晰区分整数规划与线性规划的差异，对纯整数规划、混合整数规划等模型分类掌握较好。多数学生能独立完成简单整数规划模型的构建（如背包问题），但分支定界法的具体实现步骤（如剪枝条件判断）存在操作生疏现象。割平面法的几何解释因课时限制讲解较浅，学生反馈“切割条件构造”逻辑模糊。		
授课时间	第 13 周	课 次	第 13 次
章节名称	§3 0-1 规划模型及其解法 §4 整数规划建模应用		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）	教学时数	3

教　学 目　的 要　求	1.理解 0-1 规划的定义及适用场景； 2.掌握 0-1 规划的标准形式与建模方法； 3.了解隐枚举法、分支定界法等经典解法； 4.掌握整数规划在实际问题中的建模技巧； 5.能够将复杂问题转化为整数规划模型； 6.理解不同场景下模型变形的灵活性。
思政元素	1.在讲解背包问题时，强调“资源有限，选择最优”的理念，引申到个人和社会资源的高效利用，避免浪费，呼应“可持续发展”的国家战略。 2.分析隐枚举法的“剪枝优化”逻辑时，类比科研中的“去伪存真”，培养学生严谨的数学思维，避免急功近利。
教　学 方　法	讲授、课堂提问、讨论、启发、自学
教　学 重　点 难　点	重点：0-1 规划的建模逻辑与应用场景。 难点：隐枚举法的实现步骤与效率优化。

教学步骤及内容：

1. 引入



168 管理运筹学

第三节　0-1规划模型及其解法

0-1 规划是整数规划的一种特殊形式，由于决策变量 x_i 只能取 0 或 1，因此，x_i 被称为 0-1 变量（或布尔变量、二进制变量、逻辑变量）。0-1 规划的用途极其广泛，在实际问题中，很多情形均可用 0-1 变量来表示。正是由于 0-1 规划的普遍性和特殊性，本节我们将对 0-1 规划问题做专门介绍。

一、0-1规划模型

让我们先看一个例子。

【例 6.4】某投资公司现有 500 万元可用于投资 5 个项目，有关信息如表 6-10 所示，问如何投资才能使公司总收益最大？

表 6-10　投资项目信息

项目	投资额/万元	收益/万元	要求
A	210	150	（1）项目 A、D 最多只能选 1 项 （2）若选项目 E，则必选项目 B
B	180	135	
C	120	95	
D	240	195	
E	160	135	

2. 0-1 规划模型

- **定义**：决策变量仅取0或1的整数规划问题。
- **标准形式**：

$$
\begin{aligned}
\max/\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
& x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

- **典型应用场景**：
  - 投资决策（是否选择某项目）
  - 设备选址（是否在某地建厂）
  - 排班问题（是否安排某员工某时段工作）

3. 求解方法

- **隐枚举法**（核心方法）：
  1. 通过过滤条件减少枚举量；
  2. 利用约束条件剪枝；
  3. 逐步逼近最优解。
- **对比其他方法**：分支定界法、启发式算法（简要说明适用性）。

P168. 第三节 0-1规划模型及其解法

决策变量x_i只能取0或1.

称x_i为0-1变量(或布尔变量、二进制变量、逻辑变量).

一. 0-1规划模型.

P168. [例6.4].

$$\max z = 150x_A + 135x_B + 95x_C + 195x_D + 135x_E$$

$$s.t.\begin{cases} 210x_A + 180x_B + 120x_C + 240x_D + 160x_E \le 500 \\ x_A + x_D \le 1 \\ x_E \le x_B \\ x_i \in \{0,1\},\ i = A, B, C, D, E \end{cases}$$

二. 0-1规划模型求解.

(一) 枚举法

适用于问题规模较小时. 列出所有变量的0-1组合方案. 比较得出最优解.

P170 [例6.5] 应用枚举法求解下面的0-1规划问题.

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

解: 所有0-1变量的组合共有 $2^3 = 8$ 种. 列枚举表.

可以只算满足所有约束条件的目标值(共3个).

(二) 隐枚举法

增加过滤条件. 去除那些明显不是最优解的解.

P171.[例6.6] 通过目标函数值设置过滤条件来求解. 应用隐枚举法求解下面的0-1规划问题.

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

P171. 表6-12. 隐枚举表

先观察找到一个初始可行解. 过滤值

逐渐更新过滤值.

练习. P196. 2. 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题

(2) $\max z = 6x_1 + 4x_2 + x_3$

$$
s.t.\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 4 & ① \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3 & ② \\ x_2 + x_3 \ge 1 & ③ \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}
$$

分析: x_i 共有 $2^3=8$ 种取值可能. 列隐枚举表.

解$(x_1, x_2, x_3)^T$	过滤值	是否满足约束条件 ①	②	③	目标值
	$z_0=6$				
$(0,0,0)^T$					0
$(1,0,0)^T$					6
$(0,1,0)^T$					4
$(0,0,1)^T$					1
$(1,1,0)^T$		✓	✓	✓	10
	$z_0=10$				
$(1,0,1)^T$					7
$(0,1,1)^T$					5
$(1,1,1)^T$		✓	✓	✓	11

得最优解 $(1,1,1)^T$. 目标值 $z=11$.

(三). 分枝定界法

由于决策变量为0-1变量, 分枝较快.

P172. [例6.7].

先看投资回报率 由大到小. $\boxed{x_1 > x_4 > x_2 > x_3}$

松弛问题 LP0 的一个初始解 $(1,1,\frac{8}{25},1)^T$.

目标值 $z_0 = 24\frac{6}{25}$

$z^+ = 24\frac{6}{25}$, $z^- = 0$. 对 $x_3 = \frac{8}{25}$ 分枝.

分成 $x_3=1$, $x_3=0$ 两枝.
LP1. LP2

$$\max z = 8x_1+10x_2+7x_3+4x_4$$

$$\text{LP1:}\quad s.t.\begin{cases} 24x_1+60x_2+20x_4 \le 70 \\ x_3=1 \\ 0\le x_j \le 1,\ j=1,2,4 \end{cases}$$

$24+60x_2+20 \le 70$

$x_2 \le \frac{13}{30}$

LP1 的解 $(1,\frac{13}{30},1,1)^T$

目标值 $z_1 = 23\frac{1}{3}$

$$\max z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

$$LP2: \quad s.t. \begin{cases} 24x_1 + 60x_2 + 20x_4 \le 120 \\ x_3 = 0 \\ 0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, 2, 4 \end{cases}$$

LP2的解为 $(1, 1, 0, 1)^T$. 目标值 $z_2 = 22$

由于LP2的解可行，所以停止分枝。更新上下界，

令 $z^+ = 23\frac{1}{3}$, $z^- = 22$.

对LP1进行分枝. 由于 $x_2 = \frac{13}{30}$. 分 $x_2 = 1$ 和 $x_2 = 0$ 两枝

LP3. LP4

$$\max z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

$$LP3: \quad s.t. \begin{cases} 24x_1 + 20x_4 \le 10 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ 0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, 4 \end{cases}$$

按回报率

$x_1 > x_4$，先安排 x_1.

即令 $x_4 = 0$.

LP3的解为 $(\frac{5}{12}, 1, 1, 0)^T$ 目标值 $z_3 = 20\frac{1}{3}$.

$$\max z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

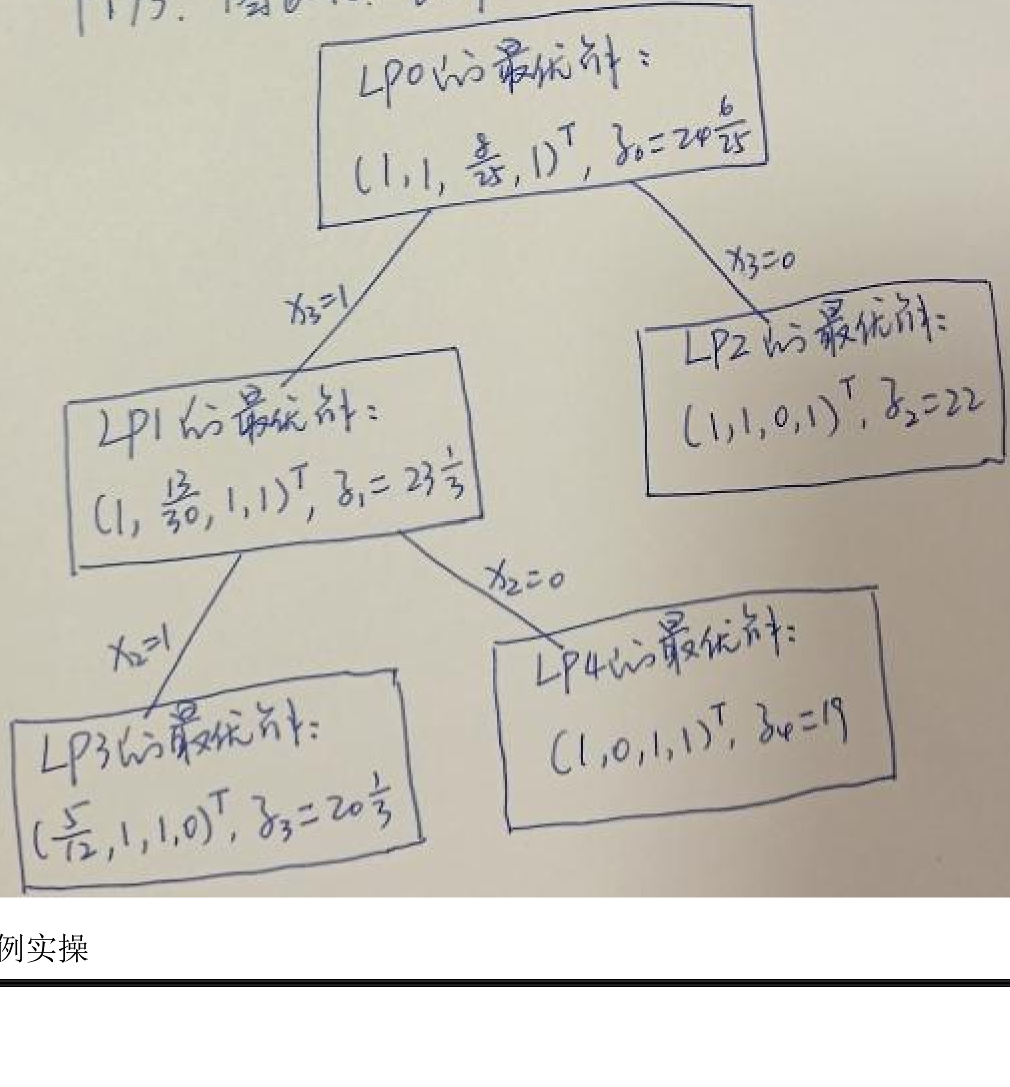
$$LP4: \quad s.t. \begin{cases} 24x_1 + 20x_4 \le 70 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ 0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, 4. \end{cases}$$

LP4的解为 $(1,0,1,1)^T$. 目标值 $z_4=19$.

因为 z_3 与 z_4 都小于下界 $z=22$. 所以对LP3和LP4停止分枝.

所以该0-1规划的最优解为 $(1,1,0,1)^T$, 目标值为 $z=22$.

P173. 图6-10. [例6.7] 分枝定界过程.



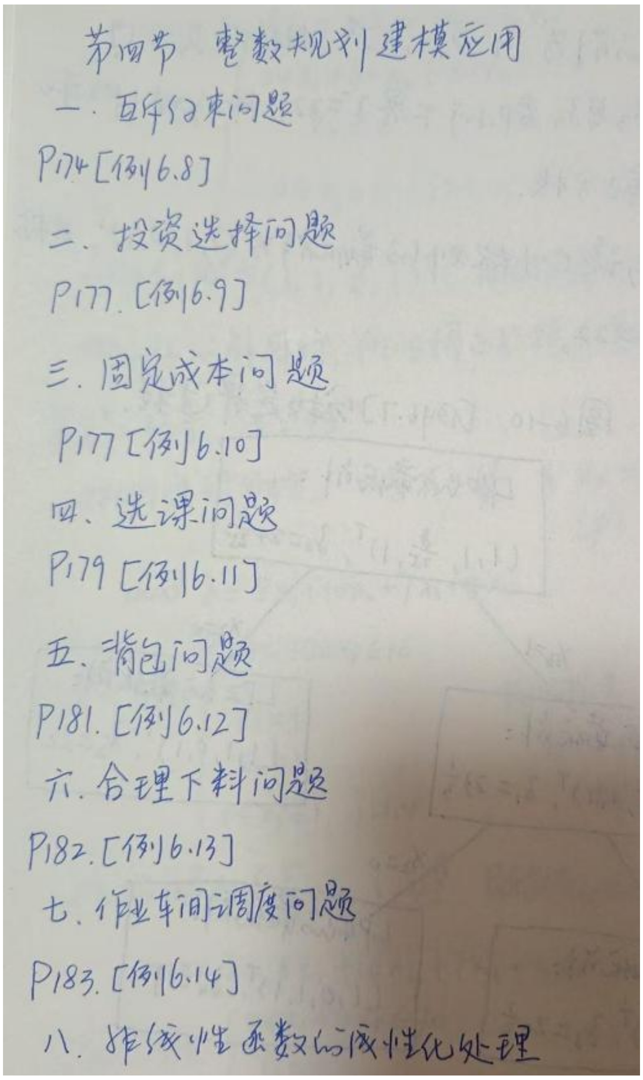
4. 案例实操

- **题目**：某公司需选择3个项目投资，预算限制为100万，各项目成本与收益如下：

项目	成本（万）	收益（万）
A	40	60
B	30	45
C	50	75
D	20	30

要求总收益最大，建模并求解。

- **学生互动**：分组讨论变量定义与约束条件，教师引导建模。

5. 

第四节 整数规划建模应用
一、互斥约束问题
P174 [例6.8]
二、投资选择问题
P177. [例6.9]
三、固定成本问题
P177 [例6.10]
四、选课问题
P179 [例6.11]
五、背包问题
P181. [例6.12]
六、合理下料问题
P182. [例6.13]
七、作业车间调度问题
P183. [例6.14]
八、非线性函数的线性化处理

<table>
<tr><td colspan="5">6. 小结与作业
• 小结：0-1变量是建模逻辑型决策的关键工具。
• 作业：设计一个设备选址问题模型（至少包含3个候选点与2个约束）。</td></tr>
<tr><td colspan="5">复习思考题、作业题：
自选一个实际问题（如课程表编排）建立整数规划模型。</td></tr>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点
§5 指派问题
§6 应用 LINGO 软件求解整数规划模型</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="4">学生对 0-1 变量的逻辑性理解较好，但隐枚举法的“剪枝”步骤需通过动画演示加强直观性。护士排班建模时，学生对多维度约束（如连续工作时长）的处理较吃力，需用更简化的案例过渡。
整数规划的实际应用场景讨论热烈，但部分学生过度追求模型复杂度，忽略可行性，需强调“适用性优先”原则。
通过思政元素与专业知识的有机融合，学生不仅掌握了建模技术，更深化了对科技与社会关系的理解。后续课程可进一步结合国家战略（如数字经济、智慧城市），设计更具时代性的案例，持续提升课程的育人价值。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 14 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 14 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">§5 指派问题
§6 应用 LINGO 软件求解整数规划模型</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1.理解指派问题的基本概念、数学模型及其在实际场景中的应用。
2.掌握整数规划模型的构建方法，并能用匈牙利算法解决典型指派问题。
3.熟悉 LINGO 软件的基本操作，学会用其求解整数规划模型。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="4">强调算法步骤的严谨性，培养学生在优化问题中追求效率与公平的辩证思维。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教 学</td><td colspan="4">重点：</td></tr>
</table>

重　点 难　点	1. 指派问题的数学模型及匈牙利算法的核心步骤； 2. LINGO 软件中整数规划模型的输入、求解与结果分析； 3. 实际案例的建模思路（如任务分配、资源调度等） 难点： 1.将现实问题抽象为指派问题或整数规划模型的思维转换。 2.匈牙利算法中“覆盖线”与“调整矩阵”的原理理解。 3.LINGO 软件语法错误排查与结果解释（如变量类型设定、约束条件冲突）

教学步骤及内容：

P186. 第五节 指派问题

一. 指派问题及模型

二. 匈牙利算法

P187. Th6.1 等数矩阵、独立零元素.

Th6.2 覆盖矩阵C中所有零元素的最少直线条数等于独立零元素的最多个数.

匈牙利算法步骤P190.

练习. P199. 11. (1) 某指派问题的费用矩阵如下.

Step1.

$$C=\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 11 \\ 9 & 10 & 14 & 12 \\ 6 & 8 & 13 & 17 \\ 7 & 9 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{min} \\ 3 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 3 \ \text{min} \end{array} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C'$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 \\ \cancel{0} & 0 & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & 4 & 8 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \checkmark \\ \\ \checkmark \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \checkmark & & & \end{array} & \end{array}$$

3条直线覆盖了所有零元素

min{没被覆盖的6个元素}

=1.

打✓的第一、三行减1，打✓的第一列加1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 2 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 3 & 7 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

加圈=4.

最优解 $x_{11} = x_{24} = x_{32} = x_{43} = 1$

总费用：$3+12+8+10=33$

方法. P190. 步骤

P189. 用最少的直线覆盖所有零元素

P188. 思路

匈牙利法

例5.6 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作A、B、C、D。现有甲、乙、丙、丁四人，他们将中文说明书译成不同语种的说明书所需时间如下表所示，问如何分派任务，可使总时间最少？

人员＼任务	A	B	C	D
甲	6	7	11	2
乙	4	5	9	8
丙	3	1	10	4
丁	5	9	8	2

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$(c_{ij})=\begin{bmatrix}6&7&11&2\\4&5&9&8\\3&1&10&4\\5&9&8&2\end{bmatrix}\begin{matrix}-2\\-4\\-1\\-2\end{matrix}\Rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}4&5&9&0\\0&1&5&4\\2&0&9&3\\3&7&6&0\end{bmatrix}\\ \quad\quad -5\quad\end{array}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&5&4&0\\0&1&0&4\\2&0&4&3\\3&7&1&0\end{bmatrix}$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix}4&5&4&◎\\◎&1&Ø&4\\2&◎&4&3\\3&7&1&Ø\end{bmatrix}$$

找到 3 个独立零元素
但 m = 3 < n = 4

3）作最少的直线覆盖所有0元素

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & ◎ \\ ◎ & 1 & Ø & 4 \\ 2 & ◎ & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & Ø \end{bmatrix} \begin{matrix} \surd \\ \\ \\ \surd \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & \surd \end{matrix}$$

独立零元素的个数m等于最少直线数l，即$l = m=3<n=4$；

4）$\boxed{\text{没有被直线通过的元素中选择最小值为1}}$，变换系数矩阵，将没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线$\boxed{\text{交点处的元素加上这个最小值}}$。得到新的矩阵，重复2）步进行试指派

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & ◎ \\ ◎ & 1 & Ø & 5 \\ 2 & ◎ & 4 & 4 \\ 2 & 6 & ◎ & Ø \end{bmatrix}$$

得到4个独立零元素， 所以最优解矩阵为：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即完成4个任务的总时间最少为：2＋4＋1+8=15

P192. 第六节 应用LINGO软件求解整数规划模型

LINGO中使用函数@gin表示普通整数

函数@bin表示0-1变量.

P182. 例6.13 第一问

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$

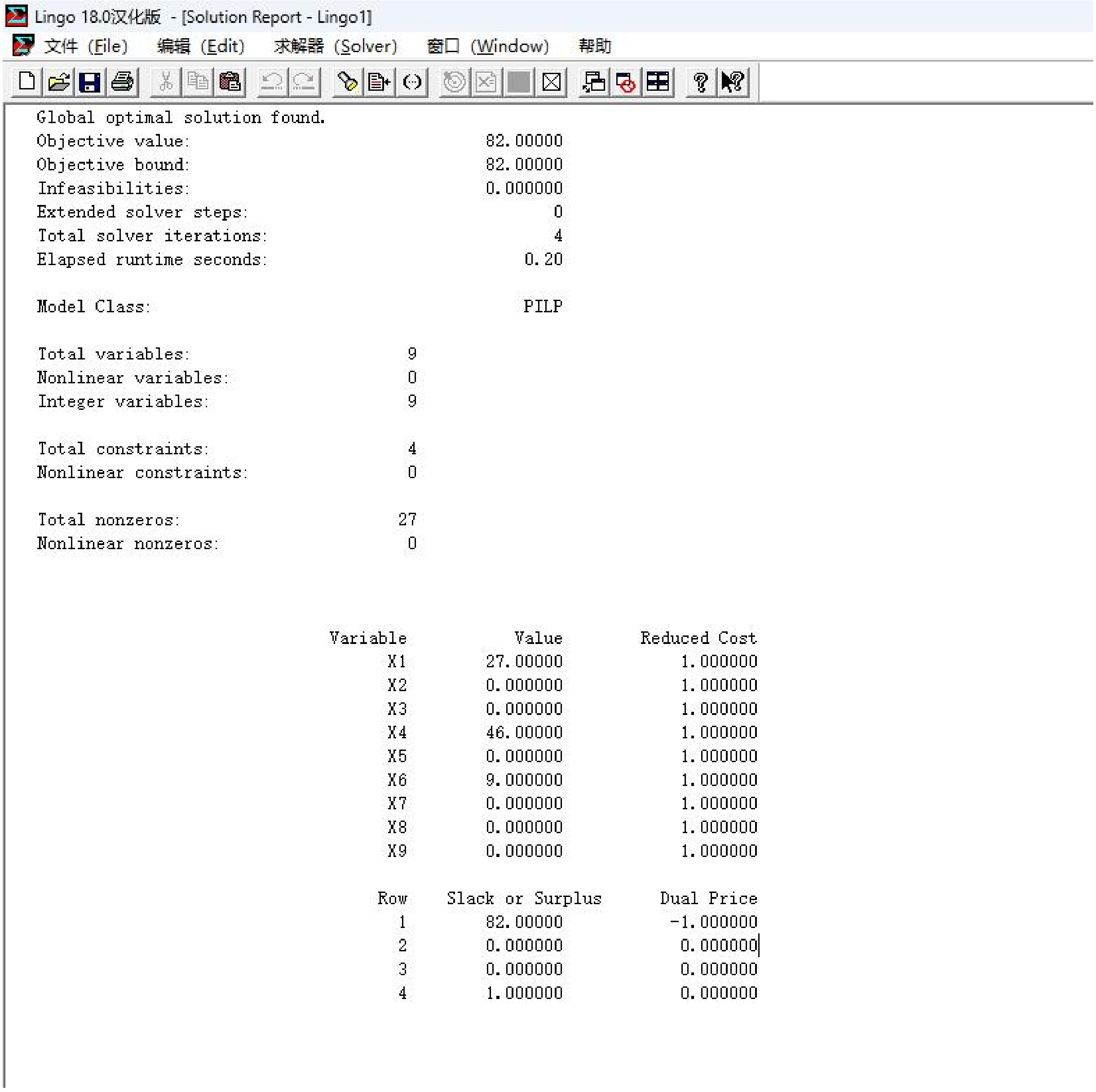
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 \geq 100 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 5x_9 \geq 100 \\ x_j \geq 0, \text{且为整数}, j = 1, 2, \cdots, 9 \end{cases}$$

P182【例 6.15】：

Lingo 18.0汉化版 - [Lingo Model - Lingo1]

文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助

```
min=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9;

2*x1+2*x2+x3+x4+x5>=100;
x1+2*x3+x4+3*x6+2*x7+x8>=100;
x2+2*x4+3*x5+x6+2*x7+3*x8+5*x9>=100;
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);@gin(x5);@gin(x6);@gin(x7);@gin(x8);@gin(x9);
```




```
Global optimal solution found.
Objective value:                              82.00000
Objective bound:                              82.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             4
Elapsed runtime seconds:                          0.20

Model Class:                                      PILP

Total variables:                      9
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    9

Total constraints:                    4
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      27
Nonlinear nonzeros:                   0



                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        27.00000            1.000000
                                    X2        0.000000            1.000000
                                    X3        0.000000            1.000000
                                    X4        46.00000            1.000000
                                    X5        0.000000            1.000000
                                    X6        9.000000            1.000000
                                    X7        0.000000            1.000000
                                    X8        0.000000            1.000000
                                    X9        0.000000            1.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        82.00000           -1.000000
                                     2        0.000000            0.000000
                                     3        0.000000            0.000000
                                     4        1.000000            0.000000
```

P182【例 6.16】：

model:

Title 作业车间调度问题;

sets:

Parts/p1..p3/;

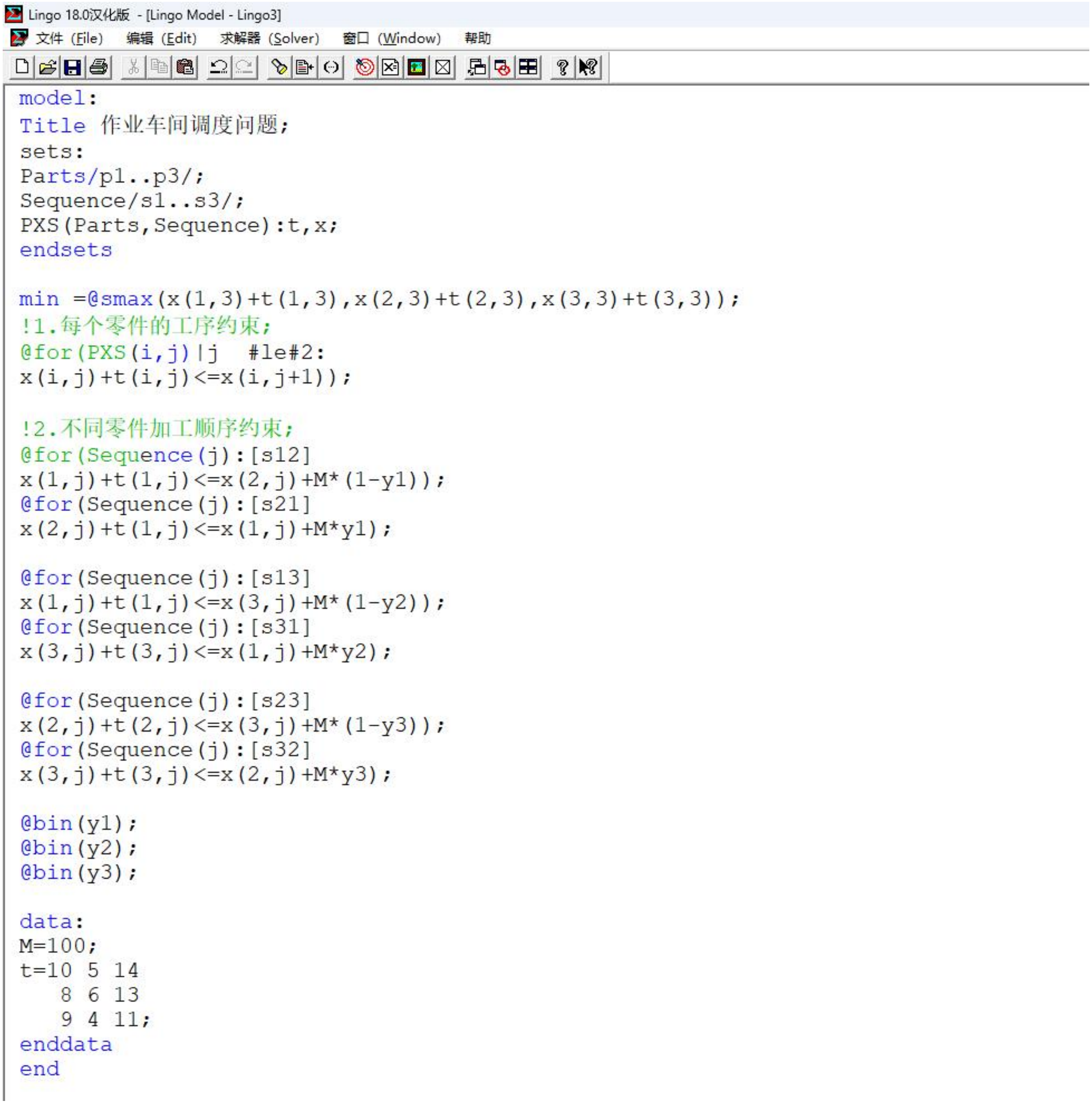
Sequence/s1..s3/;

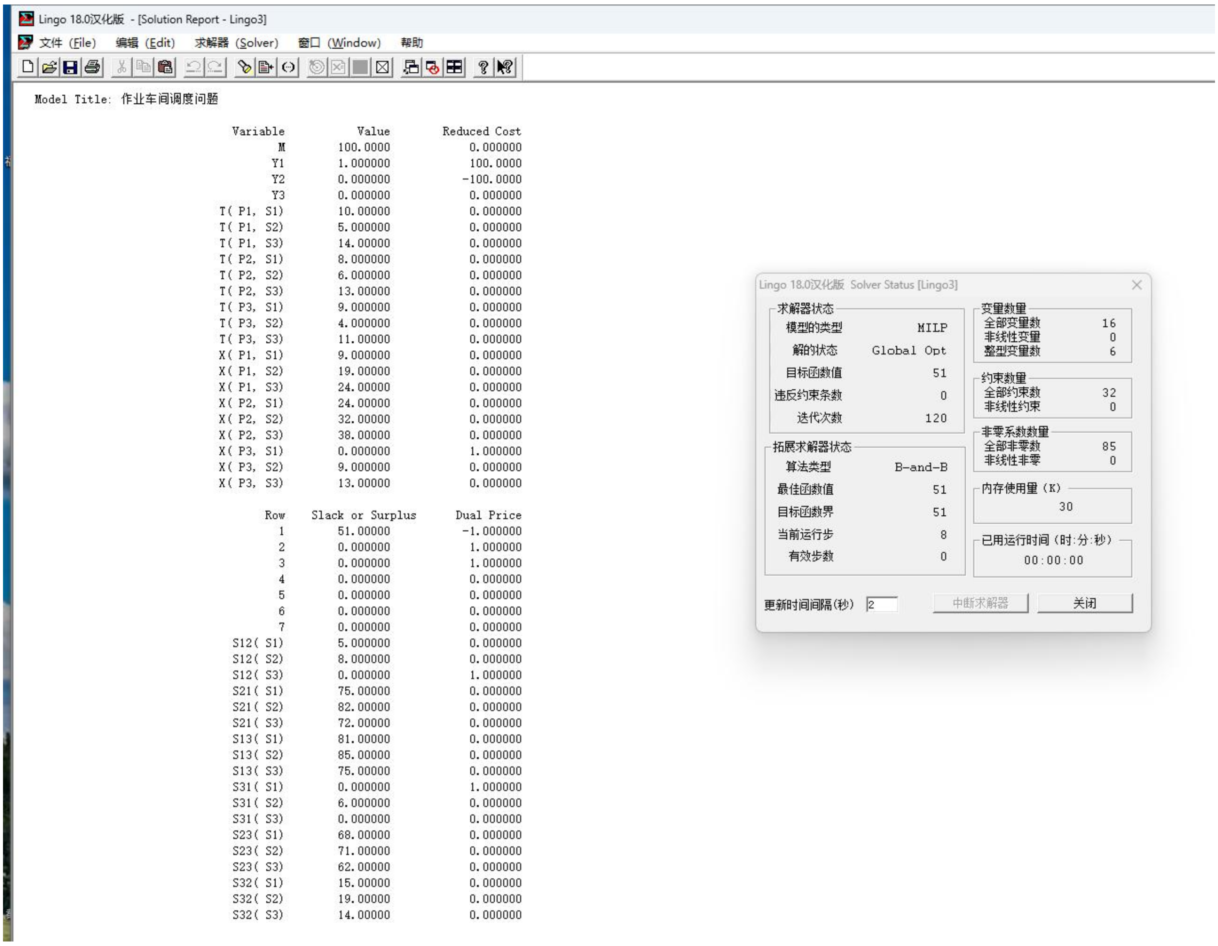
PXS(Parts,Sequence):t,x;

endsets

```
min =@smax(x(1,3)+t(1,3),x(2,3)+t(2,3),x(3,3)+t(3,3));
!1.每个零件的工序约束;
@for(PXS(i,j)|j   #le#2:
x(i,j)+t(i,j)<=x(i,j+1));

!2.不同零件加工顺序约束;
@for(Sequence(j):[s12]
x(1,j)+t(1,j)<=x(2,j)+M*(1-y1));
@for(Sequence(j):[s21]
x(2,j)+t(1,j)<=x(1,j)+M*y1);

@for(Sequence(j):[s13]
x(1,j)+t(1,j)<=x(3,j)+M*(1-y2));
@for(Sequence(j):[s31]
x(3,j)+t(3,j)<=x(1,j)+M*y2);

@for(Sequence(j):[s23]
x(2,j)+t(2,j)<=x(3,j)+M*(1-y3));
@for(Sequence(j):[s32]
x(3,j)+t(3,j)<=x(2,j)+M*y3);

@bin(y1);
@bin(y2);
@bin(y3);

data:
M=100;
t=10 5 14
   8 6 13
```

```
    9 4 11;
enddata
end
```





Variable	Value	Reduced Cost
M	100.0000	0.000000
Y1	1.000000	100.0000
Y2	0.000000	-100.0000
Y3	0.000000	0.000000
T(P1, S1)	10.00000	0.000000
T(P1, S2)	5.000000	0.000000
T(P1, S3)	14.00000	0.000000
T(P2, S1)	8.000000	0.000000
T(P2, S2)	6.000000	0.000000
T(P2, S3)	13.00000	0.000000
T(P3, S1)	9.000000	0.000000
T(P3, S2)	4.000000	0.000000
T(P3, S3)	11.00000	0.000000
X(P1, S1)	9.000000	0.000000
X(P1, S2)	19.00000	0.000000
X(P1, S3)	24.00000	0.000000
X(P2, S1)	24.00000	0.000000
X(P2, S2)	32.00000	0.000000
X(P2, S3)	38.00000	0.000000
X(P3, S1)	0.000000	1.000000
X(P3, S2)	9.000000	0.000000
X(P3, S3)	13.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	51.00000	-1.000000
2	0.000000	1.000000
3	0.000000	1.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
S12(S1)	5.000000	0.000000
S12(S2)	8.000000	0.000000
S12(S3)	0.000000	1.000000
S21(S1)	75.00000	0.000000
S21(S2)	82.00000	0.000000
S21(S3)	72.00000	0.000000
S13(S1)	81.00000	0.000000
S13(S2)	85.00000	0.000000
S13(S3)	75.00000	0.000000
S31(S1)	0.000000	1.000000
S31(S2)	6.000000	0.000000
S31(S3)	0.000000	0.000000
S23(S1)	68.00000	0.000000
S23(S2)	71.00000	0.000000
S23(S3)	62.00000	0.000000
S32(S1)	15.00000	0.000000
S32(S2)	19.00000	0.000000
S32(S3)	14.00000	0.000000

P194【案例 飞行计划问题】：

```
min=200*x1+195*x2+190*x3+185*x4+10*u1+9.9*u2+9.8*u3+9.7*u4+7*v1+6.9*v2+6.8*v3+6.7*v4;


100+y1=110;
150+y2=80+y1+x1;
150+y3=120+y2+x2;
200+y4=120+y3+x3;


300+0.05*u1+v1=330;
450+0.05*u2+v2=u1+v1;
450+0.05*u3+v3=u2+v2+240;
600+0.05*u4+v4=u3+v3+360;
```

@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);

@gin(y1);@gin(y2);@gin(y3);@gin(y4);

@gin(u1);@gin(u2);@gin(u3);@gin(u4);

@gin(v1);@gin(v2);@gin(v3);@gin(v4);

Lingo 18.0汉化版 - [Lingo Model - Lingo1]

文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助

```
min=200*x1+195*x2+190*x3+185*x4+10*u1+9.9*u2+9.8*u3+9.7*u4+7*v1+6.9*v2+6.8*v3+6.7*v4;

100+y1=110;
150+y2=80+y1+x1;
150+y3=120+y2+x2;
200+y4=120+y3+x3;

300+0.05*u1+v1=330;
450+0.05*u2+v2=u1+v1;
450+0.05*u3+v3=u2+v2+240;
600+0.05*u4+v4=u3+v3+360;

@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);
@gin(y1);@gin(y2);@gin(y3);@gin(y4);
@gin(u1);@gin(u2);@gin(u3);@gin(u4);
@gin(v1);@gin(v2);@gin(v3);@gin(v4);
```

Lingo 18.0汉化版 - Solution Report - Lingo1

文件 (File) 编辑 (Edit) 求解器 (Solver) 窗口 (Window) 帮助

Solution Report - Lingo1

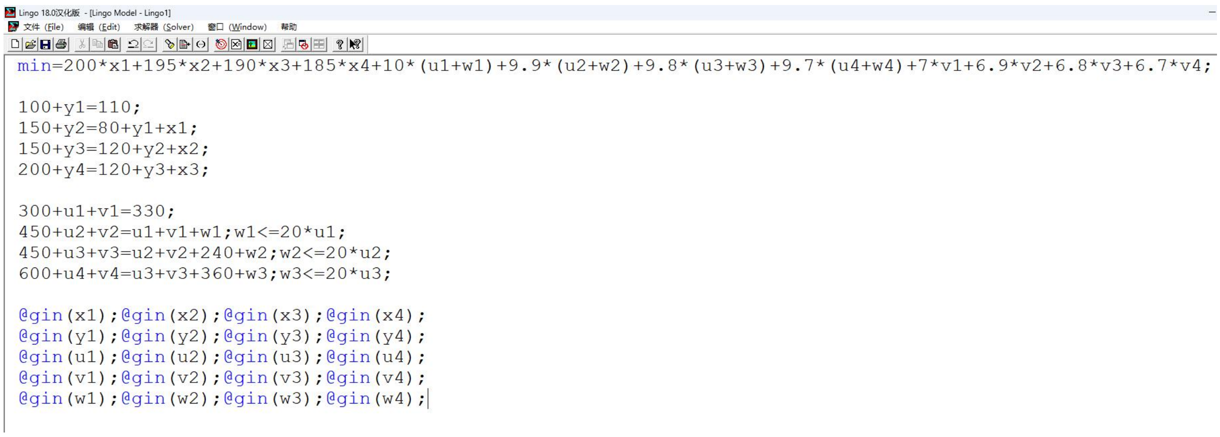
```
Global optimal solution found.
Objective value:                              42324.40
Objective bound:                              42324.40
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                            33
Elapsed runtime seconds:                          0.12

Model Class:                                      PILP

Total variables:                     15
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                   15

Total constraints:                    8
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      34
Nonlinear nonzeros:                   0


                      Variable           Value        Reduced Cost
                            X1        60.00000            200.0000
                            X2        30.00000            195.0000
                            X3        80.00000            190.0000
                            X4        0.000000            185.0000
                            U1        460.0000            10.00000
                            U2        220.0000            9.900000
                            U3        240.0000            9.800000
                            U4        0.000000            9.700000
                            V1        7.000000            7.000000
                            V2        6.000000            6.900000
                            V3        4.000000            6.800000
                            V4        4.000000            6.700000
                            Y1        10.00000            0.000000
                            Y2        0.000000            0.000000
                            Y3        0.000000            0.000000
                            Y4        0.000000            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             1        42324.40           -1.000000
                             2        0.000000            0.000000
                             3        0.000000            0.000000
                             4        0.000000            0.000000
                             5        0.000000            0.000000
                             6        0.000000            0.000000
                             7        0.000000            0.000000
                             8        0.000000            0.000000
                             9        0.000000            0.000000
```

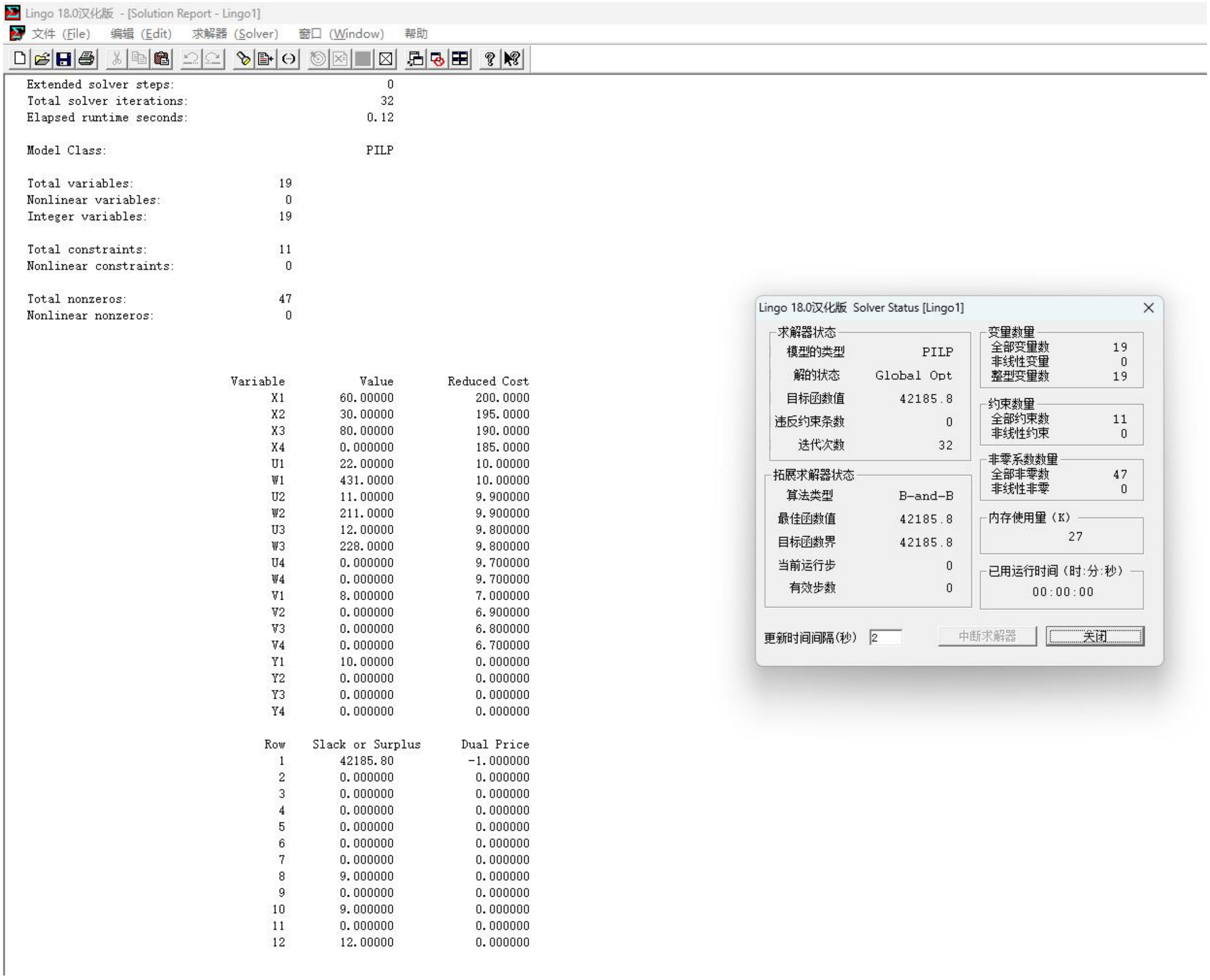
Lingo 18.0汉化版 Solver Status [Lingo1]

求解器状态		变量数量	
模型的类型	PILP	全部变量数	15
解的状态	Global Opt	非线性变量	0
目标函数值	42324.4	整型变量数	15
违反约束条数	0	约束数量	
迭代次数	33	全部约束数	8
		非线性约束	0
拓展求解器状态		非零系数数量	
算法类型	B-and-B	全部非零数	34
最佳函数值	42324.4	非线性非零	0
目标函数界	42324.4	内存使用量 (K)	26
当前运行步	0	已用运行时间 (时:分:秒)	00:00:00
有效步数	0		

更新时间间隔(秒) 2 中断求解器 关闭

```
min=200*x1+195*x2+190*x3+185*x4+10*(u1+w1)+9.9*(u2+w2)+9.8*(u3+w3)+9.7*(u4+w4)+7*v1+6.9*v2+6.8*v3+6.7*v4;

100+y1=110;
150+y2=80+y1+x1;
150+y3=120+y2+x2;
200+y4=120+y3+x3;

300+u1+v1=330;
450+u2+v2=u1+v1+w1;w1<=20*u1;
450+u3+v3=u2+v2+240+w2;w2<=20*u2;
600+u4+v4=u3+v3+360+w3;w3<=20*u3;

@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);
@gin(y1);@gin(y2);@gin(y3);@gin(y4);
@gin(u1);@gin(u2);@gin(u3);@gin(u4);
@gin(v1);@gin(v2);@gin(v3);@gin(v4);
@gin(w1);@gin(w2);@gin(w3);@gin(w4);
```






```
Extended solver steps:                    0
Total solver iterations:                 32
Elapsed runtime seconds:               0.12

Model Class:                           PILP

Total variables:                 19
Nonlinear variables:              0
Integer variables:               19

Total constraints:               11
Nonlinear constraints:            0

Total nonzeros:                  47
Nonlinear nonzeros:               0


                  Variable        Value     Reduced Cost
                        X1     60.00000        200.0000
                        X2     30.00000        195.0000
                        X3     80.00000        190.0000
                        X4     0.000000        185.0000
                        U1     22.00000        10.00000
                        W1     431.0000        10.00000
                        U2     11.00000        9.900000
                        W2     211.0000        9.900000
                        U3     12.00000        9.800000
                        W3     228.0000        9.800000
                        U4     0.000000        9.700000
                        W4     0.000000        9.700000
                        V1     8.000000        7.000000
                        V2     0.000000        6.900000
                        V3     0.000000        6.800000
                        V4     0.000000        6.700000
                        Y1     10.00000        0.000000
                        Y2     0.000000        0.000000
                        Y3     0.000000        0.000000
                        Y4     0.000000        0.000000

                       Row   Slack or Surplus   Dual Price
                         1       42185.80       -1.000000
                         2       0.000000        0.000000
                         3       0.000000        0.000000
                         4       0.000000        0.000000
                         5       0.000000        0.000000
                         6       0.000000        0.000000
                         7       0.000000        0.000000
                         8       9.000000        0.000000
                         9       0.000000        0.000000
                        10       9.000000        0.000000
                        11       0.000000        0.000000
                        12       12.00000        0.000000
```


复习思考题、作业题：

已知四人分别完成四项工作所需时间如下表，求最优分配方案。

人员 \ 任务	A	B	C	D
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

下次课预习要点

第六章习题课

<table>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="4">1.教学效果反馈：
学生对匈牙利算法的直观理解较好，但部分学生对“矩阵调整”的数学原理存在困惑。
LINGO 软件操作环节中，学生普遍对变量类型（@BIN、@GIN）的设定易出错，需增加针对性练习。
2.改进方向：
引入更多生活化案例（如课程表编排、快递配送路径优化），降低建模抽象难度。
增设“软件调试小技巧”微课视频，帮助学生快速掌握 LINGO 常见错误解决方法。
3.思政成效反思：
案例讨论中，学生能主动结合“资源公平分配”理念优化模型，体现了价值观引导的有效性。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 15 周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第 15 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">第六章习题课</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">1、理解整数规划的定义、分类（纯整数、混合整数、0-1 规划）及适用场景；
2、复习巩固求解 0-1 规划的隐枚举法和求解指派问题的匈牙利算法。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="4">”算法效率优先“ vs ”人文关怀优先“在应急物资调度中的价值排序。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：求解 0-1 规划的隐枚举法和求解指派问题的匈牙利算法。
难点：将实际问题转化为整数规划模型（如设备选址、排班优化）。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学步骤及内容：</td></tr>
</table>

匈牙利法求解指派问题方法总结：

1. 写出费用矩阵

2. 找 min(各行)

各行分别减去这个最小元素.

3. 找不含0的列的 min.

该列减去 min，至此，每行(列)都有个零.

4. ①找只有1个零元素的行 ◎.(找行划列)

划去◎所在列的其他0.

②再从只有1个零元素的列入手◎，划去

(找列划行)

◎所在行的其他0.

③若找不到只有1个零元素的行(列)，则任意◎划去

相应的0.

④直至 i. 若◎的个数等于矩阵的阶数，得最优解.

ii. 若◎的个数 < 阶数，则往下做.

5. 勾无◎的行

勾有ф的列

6. 划直线覆盖所有的0（包括◎和φ）

无打勾的行
有打勾的列 } 划线

7. 找出 min{没被覆盖的元素}

没被覆盖 −min
直线交叉处 +min ⟹ 新矩阵. 重复第4步.
其余不变. 0也不变

用匈牙利法求解下列指派问题：

练习1：

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

练习2：

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

解：

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \min \\ 7 \\ 12 \\ 14 \\ 11 \end{array}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}
\quad \min 1
$$

$$
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \checkmark \\ \\ \\ \checkmark \end{array}
\quad \min=1
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \cancel{0} & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \end{array}
\quad \min=2
$$

$$
\longrightarrow
\begin{bmatrix} \cancel{0} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

目标值 $10+12+15+11=48$.

练习2：

$$\begin{array}{c}\\ \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \text{min} \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{min}\ \ 1 \quad 2 \qquad\quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 4 & \cancel{0} & 7 & \cancel{0} \\ 5 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & \cancel{0} & 4 & 2 \\ 5 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 2 \\ 2 & 2 & \cancel{0} & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \checkmark \\ \\ \\ \checkmark \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} \cancel{0} & 4 & \cancel{0} & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & \cancel{0} & 4 & 2 \\ 5 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 2 \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \end{bmatrix}$$

4

min = 2

目标值 $3+2+4+3+9=21$

P191. 三、非标准指派问题 （课件P383/575）

(一) 目标函数极大化.

处理方法：设m为最大化指派问题系数矩阵C中最大元素. 令矩阵$B=(m-c_{ij})_{mn}$. 则以B为系数矩阵的最小化指派问题和原问题有相同的最优解.

例. 某人事部门拟招聘4人任职4项工作，对他们综合考评的得分如下表(满分100分)，如何安排工作

使总分最多.

$$C=\begin{array}{c}甲\\乙\\丙\\丁\end{array}\begin{bmatrix}85&92&73&90\\95&87&78&95\\82&83&79&90\\86&90&80&88\end{bmatrix}$$

解: $m=95$.

$$B=(m-C_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}10&3&22&5\\0&8&17&0\\13&12&16&5\\9&5&15&7\end{bmatrix}\begin{array}{c}\min\\3\\0\\5\\5\end{array}$$

$$\rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}7&0&19&2\\0&8&17&0\\8&7&11&0\\4&0&10&2\end{bmatrix}\\ \min\quad\quad\quad 10\quad\quad\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}7&0&9&2\\0&8&7&\cancel{0}\\8&7&1&0\\4&\cancel{0}&0&2\end{bmatrix}$$

用匈牙利法求得最优解 $X=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

即甲安排做第二项工作.
乙做第一项
丙做第四项
丁做第三项.

最高总分 $Z=92+95+90+80=357$.

(二).人数与任务数不等.

1. 当人数m大于工作数n时，加上m-n项虚拟工作.

例如：

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 6 & 3 \\ 8 & 14 & 17 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 17 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 当人数m小于工作数n时，加上n-m个人，例如.

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \min \\ 9 \\ 4 \\ 10 \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 11 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}.$$

(三).有人可以完成多项任务

若某人可做n件事，则将该人化作相同的n个"人"来接受指派，但费用系数取值相同.

例如：丙可以同时任职A和C工作，求最优指派方案.

未限制必须做

$$\begin{matrix} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{matrix} \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \min \\ 9 \\ 4 \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 11 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \emptyset & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ \emptyset & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

1 min

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & \emptyset & 0 & 3 \\ 0 & \emptyset & 4 & 5 \\ \emptyset & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

总费用 9+4+10+13=36

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & \emptyset & 0 & 3 \\ 0 & \emptyset & 4 & 5 \\ \emptyset & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

甲→D
乙→C
丙→A, B

接

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 0 & \emptyset \\ 8 & 4 & 2 & \emptyset & 0 \\ 5 & 12 & 16 & \emptyset & \emptyset \\ 3 & 2 & 4 & \emptyset & \emptyset \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & \emptyset & \emptyset \\ 6 & 2 & 0 & \emptyset & \emptyset \\ 3 & 10 & 14 & 0 & \emptyset \\ 1 & \emptyset & 2 & \emptyset & 0 \\ \emptyset & 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

min=2

目标值 $z=5+3+0+0+2=10$

最优解不唯一.

(四).有人不适合做某项任务

例<<运筹学完整版>>. P389/5.75

$$\begin{bmatrix} 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\ 39 & 38 & 26 & 20 & 33 \\ 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\ 24 & 42 & 36 & 23 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{min} \\ 25 \\ 20 \\ 27 \\ 23 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 17 & 12 \\ 19 & 18 & 6 & 0 & 13 \\ 7 & 0 & 1 & 13 & 5 \\ 1 & 19 & 13 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$

min 5

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 17 & 7 \\ 19 & 18 & 6 & 0 & 8 \\ 7 & \cancel{0} & 1 & 13 & 0 \\ 1 & 19 & 13 & \cancel{0} & 17 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & M-5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \\ \\ \end{array} \xrightarrow{\text{min}=1} \begin{bmatrix} \cancel{0} & 4 & 6 & 18 & 7 \\ 18 & 17 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & \cancel{0} & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 18 & 12 & \cancel{0} & 16 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & M-5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \\ \checkmark \\ \\ \end{array}$$

4个⓪<阶数5

为避免陷入死循环,这样圈0.

$$\xrightarrow{\text{min}=4} \begin{bmatrix} \cancel{0} & 0 & 2 & 18 & 3 \\ 18 & 13 & 1 & 0 & 3 \\ 11 & \cancel{0} & 1 & 18 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & \cancel{0} & 12 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & M-5 \end{bmatrix}$$

目标值 $z=29+20+32+24+0$

$=105$

复习思考题、作业题：

一汽车厂生产小、中、大三种类型的汽车，已知各类型每辆车对钢材、劳动时间的需求，利润以及每月工厂钢材、劳动时间的现有量如下表所示，试制定月生产计划，使工厂的利润最大。

进一步讨论：由于各种条件限制，如果生产某一类型汽车，则至少要生产80辆，那么最优的生产计划应作何改变。

	小型	中型	大型	现有量
钢材（吨）	1.5	3	5	600
劳动时间（小时）	280	250	400	60000
利润（万元）	2	3	4	

下次课预习要点

第七章动态规划

§1 多阶段决策过程实例

§2 动态规划的基本概念和最优性原理

<table>
<tr><td>教 学
后 记</td><td>1、强调 "建模优于算法" ，引导学生关注问题本质的离散性特征，避免陷入复杂算法细节而忽视应用背景。
2、建议深入学习软件实践课程，拓展积累更多建模案例。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 16 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 16 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">第七章动态规划
§1 多阶段决策过程实例
§2 动态规划的基本概念和最优性原理</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1、理解多阶段决策过程的特征（如阶段、状态、决策、策略）。
2、掌握动态规划的基本概念（最优子结构、重叠子问题、状态转移方程）。
3、能对实际问题（如资源分配、最短路径）建立多阶段决策模型。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="4">通过最优性原理（“最优策略的子策略必然最优”），引申至团队协作中个体目标与集体目标的一致性，培养系统思维。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：状态递推关系建立。
难点：实际问题到抽象模型的转化。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第七章

动态规划

动态规划方法是美国数学家贝尔曼等在 20 世纪 50 年代提出的求解多阶段决策问题最优策略的方法，它是运筹学的一个重要分支。动态规划和线性规划、非线性规划都属于数学规划的范畴，且和线性规划一样是一种逐步改善法。它将整体分成若干个前后衔接的时空阶段，逐个进行求解，按照一定的递推关系做出一系列决策，直到达到整体最优为止。动态规划自问世以来，在工程技术、生产计划、资源分配以及经济决策等诸多领域都得到了广泛的应用。

例如，工厂在生产过程中，必须逐月或逐季度地根据库存及需求间的关系，调整生产计划，以获得最大收益，这是一个典型的多阶段决策问题，可将问题的解决方案视为一系列决策的结果，动态规划提供了对这类问题的基本分析思想和求解方法。

第一节　多阶段决策过程实例

先看一个简单的例子，以说明动态规划及逆序法的含义。

【例 7.1】某大学生在期末考试之前有 5 天时间可以用于复习 3 门课程，每门课程至少需要 1 天，且 1 天仅集中复习 1 门课，所以分配给各门课的时间分别为 1 天、2 天和 3 天。估计每门课程复习天数与提高分数间的对应关系如表 7-1 所示，问如何安排各门课程的复习时间，可使分数提高最多？

表 7-1　课程复习天数与提高分数间的对应关系

复习天数	课程		
	1	2	3
1	1	5	4
2	3	6	6
3	6	8	7

为确定各门课程最佳的复习时间组合，需要分 3 个阶段分别考虑为每门课程分配几天时间复习，这是一个典型的多阶段决策问题，要求在每个阶段依次做出决策。每

正确应该用画图方式：

$f(i,j)$表示课程j复习i天的提分，可依据P201表7-2

1. 给课程1分配复习1天.

课程2和课程3总共可用的复习天数 $s_2\in\{2,3,4\}$.

$f(1,1)$

- $s_2=2$：$f(1,2)+f(1,3)$ 即 $1+5+4=10$分
- $s_2=3$：
  - $f(1,2)+f(2,3)$ 即 $1+5+6=12$分
  - $f(2,2)+f(1,3)$ 即 $1+6+4=11$分
- $s_2=4$：
  - $f(1,2)+f(3,3)$ 即 $1+5+7=13$分
  - $f(2,2)+f(2,3)$ 即 $1+6+6=13$分
  - $f(3,2)+f(1,3)$ 即 $1+8+4=13$分

2. 给课程1分配复习2天.

课程2和课程3总共可用的复习天数 $s_2\in\{2,3\}$.

对上表稍作改动，得

$f(2,1) \xrightarrow{s_2=2} f(1,2)+f(1,3)$ 即 $3+5+4=12$分

$f(2,1) \xrightarrow{s_2=3}$ $f(1,2)+f(2,3)$ 即 $3+5+6=14$分

$f(2,2)+f(1,3)$ 即 $3+6+4=13$分

3. 给课程1分配复习3天.

课程2和课程3总共可用的复习天数 $s_2=2$.

$$f(3,1) \xrightarrow{s_2=2} f(1,2)+f(1,3)$$ 即 $6+5+4=15$分

综合比较知分配方案:

$$\begin{cases} \text{课程1 复习3天} \\ \text{课程2 复习1天} \\ \text{课程3 复习1天} \end{cases}$$

P201. 二. 最短路线问题

[例7.2]

不太复杂的最短路线问题，可用穷举法.

当决策阶段很多，且各阶段可选的地点也较多时，适用动态规划. 逆序法.

依据：P202. 最短路线问题的特性.

如果最短路线通过某点p，则在最短路线上由p到终点的一段路线，必定是由p到终点的所有路线（称为p的后部路线）中最短的一条.（p的最短后部路线）.

P203. 二. 背包问题

[例7.3].

货物的运费比. $\frac{\text{运费收入}}{\text{重量}}$.

1. $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ 第一优先运输 $1\times8+2\times6=20$

2. $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 第二优先运输 即1吨货物1

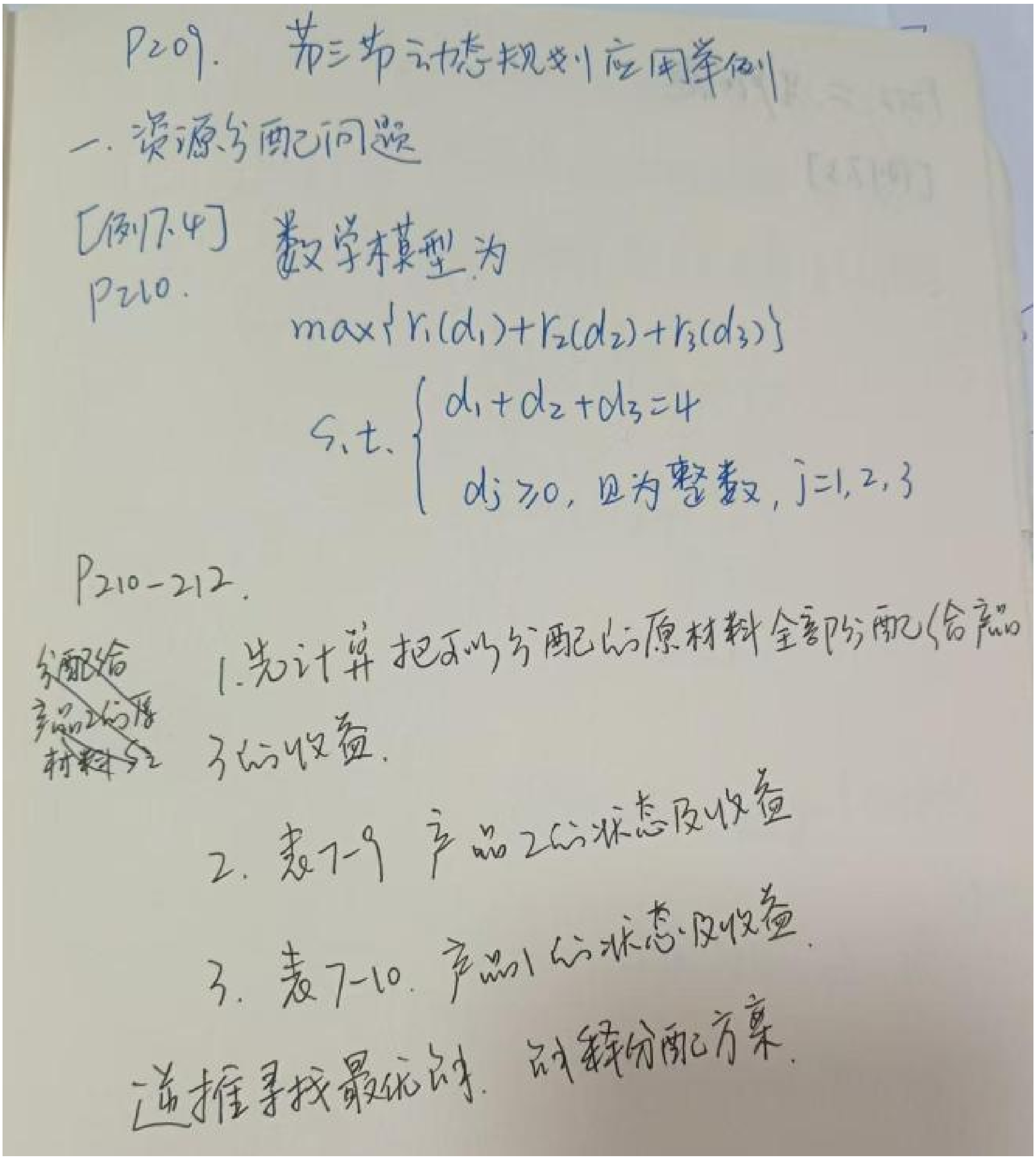
2吨货物2.

3. $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$ 第三优先运输. 总运费$=5+6=11$万元

<table>
<tr><td colspan="6">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点
§3 动态规划应用举例
第七章习题课</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="5">1、是否理解“无后效性”的实际意义？可通过背包问题状态定义对比强化。
2、通过贴近生活的案例（如课程学习时间规划），帮助学生理解最优性原理的抽象性。
3、推荐阅读《运筹学》经典案例——华罗庚“优选法”的国民经济应用。《优选法和统筹法平话》
https://mp.weixin.qq.com/s/9TQr5hg71Szr0ej7RdevOw</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 17 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 17 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">§3 动态规划应用举例
第七章习题课</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（ ）、习题课（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">1. 掌握动态规划的典型应用场景（生产计划、设备更新、资源分配）
2. 理解状态变量、决策变量、递推方程的建模逻辑</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="5">1、科学决策观
结合生产计划案例，强调“资源有限性”下优化决策对国家节能减排政策的支撑作用；
2、技术创新意识
在设备更新问题中，讨论技术迭代与成本平衡，引申国产装备自主更新的战略意义；
3、系统思维培养
通过多阶段决策过程，类比国家“五年规划”的阶段性目标制定方法。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">重点：
1. 模型构建：状态转移方程与指标函数的建立</td></tr>
</table>

	2. 经典案例解析：生产计划与设备更新问题的求解步骤 难点： 1. 状态空间设计：如何合理定义状态变量（避免维度爆炸） 2. 边界条件与递推关系的确定逻辑

教学步骤及内容：



P209. 第三节 动态规划应用举例

一. 资源分配问题

[例7.4] 数学模型为

P210.

$$\max\{r_1(d_1)+r_2(d_2)+r_3(d_3)\}$$

$$s.t.\begin{cases} d_1+d_2+d_3=4 \\ d_j\geq 0,\text{ 且为整数},\ j=1,2,3 \end{cases}$$

P210-212.

~~分配给产品2的原材料≤2~~

1. 先计算 把可以分配的原材料全部分配给产品3的收益.

2. 表7-9 产品2的状态及收益

3. 表7-10. 产品1的状态及收益.

递推寻找最优解. 解释分配方案.

微信公众号：数学建模学习交流

动态规划课件和代码：

https://mp.weixin.qq.com/s/MY4T_di0Kvw3Ra_Q78em_g

动态规划

动态规划（Dynamic Programming，DP）是运筹学的一个分支，通常用来求解决策过程最优化问题。

本节我们将主要以例题的形式来进行讲解，通过例题来带大家体会动态规划这种方法的思想，并建立起求解动态规划问题的框架。

本节涉及到的例题如下：

1. **斐波那契数列**
2. **打家劫舍（力扣198）**
3. **礼物的最大价值（剑指 Offer 47）**
4. **零钱兑换（力扣 322）**
5. **01背包问题(01 Knapsack problem)**
6. **求硬币兑换的方案数（国赛1992 年真题：实验数据分解）**

最后，我也留了几道课后习题并提供了相应的参考答案供大家练习。

复习思考题、作业题：课余自学 Python 编程求解运筹学问题。

Python 提供了丰富的运筹优化库，涵盖了从线性规划、整数规划、凸优化到进化算法、多目标优化等各种优化技术。选择哪个库取决于具体的问题类型、规模、性能要求以及用户的经验水平。

Python与运筹优化

加入书架　开始阅读

张红历

现有Python相关书籍多为其语法、开源库的介绍，或者为针对网络爬虫、数据分析、项目开发领域的应用介绍，针对运筹学领域的Python应用，只有在网上零散的学习资源，缺乏系统性强、实践性强的书籍。Python语言作为应用非常广泛的一门语言，对于管理类专业同学而言，这门编程语言学习难度低，应用场景多，掌握用Python进行运筹学问题的求解，简单有效，可以把 更多

下次课预习要点

1-7 章综合训练

<table>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="5">教学内容：介绍了动态规划的定义、名词解释、解题思路、实现方式等基本概念，以及最大子数组和、最小路径和、最长公共子序列等具体问题的动态规划解法。
教学反思：在教学过程中，需要注重让学生理解动态规划的核心思想，即通过分解问题为子问题并利用子问题的解来解决原问题，同时要强调状态定义、状态转移方程和初始化过程的重要性，让学生能够熟练掌握这些基本步骤，从而能够灵活运用动态规划解决各种问题。</td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第 18 周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 18 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">1-7 章综合训练</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题课（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>3</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">1、掌握线性规划标准形式、对偶问题转化、运输问题初始解求解方法（西北角法）、0-1 规划隐枚举法、匈牙利算法。
2、理解凸集、对偶理论、最优解存在条件等核心概念。
3、运用建模思想解决实际优化问题（如生产计划、运输优化）。</td></tr>
<tr><td>思政元素</td><td colspan="5">从"田忌赛马"（填空题 1）引出中国古代运筹智慧，强调优化思想的历史传承。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="5">讲授、课堂提问、讨论、启发、自学</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="5">重点：
1. 线性规划标准形式转化（复习题 4）
2. 对偶问题构造（复习题 5）
3. 运输问题初始解（西北角法，解答题 2）
4. 匈牙利算法步骤（解答题 4）
难点：
1. 对偶理论与原问题的关系（判断题 3、4）
2. 隐枚举法的剪枝逻辑（解答题 3）
3. 凸集的几何判断（填空题 3）</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

《运筹学》复习题

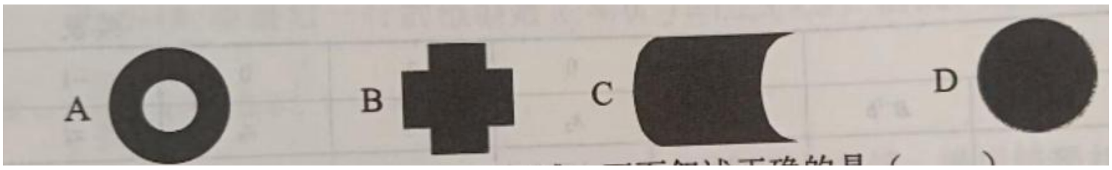
一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1、运筹学思想的出现可以追溯到很早一“田忌赛马”。齐王要与大臣田忌赛马，双方各出上、中、下马各一匹，对局三次，每次胜负 1000 金。田忌在好友、著名的军事谋略家孙膑的指导下，作出以下安排:

齐王	上	中	下
田忌			

2、线性规划问题的数学模型由________________、目标函数和约束条件构成。

3、下列图形中阴影部分构成的集合是凸集的是：__________________(填序号)。



4、写出下列线性规划模型的标准形式：___________________________________。

$$\min z = 36x_1 + 36x_2 + 72x_3 + 27x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_3 \leq 34 \\ 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 52 \\ 25x_1 + 20x_2 = 200 \\ 40x_3 + 20x_4 = 400 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

5、写出下列原问题的对偶问题：____。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6、若原问题及其对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值_____________。

二、判断题（每小题 5 分，共 30 分）

1、线性规划模型的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值。这里约定标准形式为目标函数求最大值。约束条件的标准化规定为：约束条件全为等式，约束条件右端的常数项均为非负数，决策变量都是非负约束。(　　)

2、线性规划模型不一定总是存在唯一最优解，还可能存在无穷多最优解(多重最优解)，或无可行解、无最优解等情况。(　　)

3、同一个线性规划问题的对偶问题是唯一的。(　　)

4、对偶单纯形法和大 M 法一样，都需要增加人工变量。(　　)

5、运输问题的目标是使总运费最小，而西北角法却没有考虑单位运价的影响。(　　)

6、求解 0-1 规划模型的方法有枚举法、隐枚举法和分枝定界法。(　　)

三、解答题（每小题 10 分，共 40 分）

1、某厂生产两种产品，下表给出了单位产品所需资源及单位产品利润：

项目	I	II	每天可用能力
设备 A（h）	0	5	15
设备 B（h）	6	2	24
调试工序（h）	1	1	5
利润（元）	2	1	

问：应如何安排生产计划，才能使总利润最大？

2、利用西北角法求下列运输问题的初始基本可行解。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6	7	5	3	14
A2	8	4	2	7	27
A3	5	9	10	6	19
销量	22	13	12	13	

3、用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题：

$$\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & ① \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & ② \\ x_1 + x_2 \le 3 & ③ \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & ④ \\ x_1, x_2, x_3 \text{为0或1} \end{cases}$$

4、已知费用矩阵 C，用匈牙利算法求解该指派问题。

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

复习思考题、作业题： 给定费用矩阵 C=[[5,8,7],[4,2,3],[9,6,8]]，用匈牙利法求最优指派。	
下次课预习要点 好好复习，准备考试。	
教　学 后　记	成效： 　　学生能熟练完成标准形式转化、西北角法求解，但对偶理论的应用仍需强化。 　　思政案例（田忌赛马）有效激发学习兴趣，增强民族自豪感。 改进方向： 　　增加对偶问题经济意义的案例分析（如"影子价格"在资源定价中的应用）。 　　针对隐枚举法设计可视化演示工具，辅助理解剪枝过程。