揭阳职业技术学院

师范教育系

《线性代数》教案

（2025-2026 学年第 2 学期）

教师姓名：章慧芬

所授专业：小学教育

授课班级：251

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 1-3 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 1-3 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">第一章 行列式</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（ ✓ ）、实践课（ ）、习题题（ ✓ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>10</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">1.会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式；
2.知道 n 阶行列式的定义；
3.知道 n 阶行列式的性质；
4.知道代数余子式的定义和性质；
5.会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式；</td></tr>
<tr><td>思政育
人目标</td><td colspan="5">1、培养科学精神与严谨态度
2、强化逻辑思维与问题解决能力</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲解法、练习法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">1.理解行列式的定义；
2.行列式的计算，要注重学会利用行列式的性质及按行(列)展开等方法来简化行列式的计算。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

首先通过二（三）元线性方程组的解的表达式引出二（三）阶行列式的定义。然后介绍有关全排列及其逆序数的知识，引出n 阶行列式的定义。通过讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系，引导学生了解行列式的三种等价定义。以从行列式的定义为切入口，引导学生探讨行列式的各种性质。强调数学公理化背后的科学精神，联系中国科学家华罗庚在数学领域的成就，增强学生的民族自豪感和使命感。通过大量的例题引导学生掌握如何利用行列式性质及按行（列）展开等基本方法来简化行列式的计算。

最后知道克拉默法则，了解数学家克拉默的故事，调动学生学习的积极性和创造性。简要知识点与例题：

1. 计算排列的逆序数的方法

设p_1 p_2 [redacted] p_n是1, 2, [redacted] , n这n个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序。

先看有多少个比p_1大的数排在p_1前面，记为t_1；

再看有多少个比p_2大的数排在p_2 前面，记为t_2；

… …

最后看有多少个比p_n大的数排在p_n前面，记为t_n ；

则此排列的逆序数为$t= t_1 +t_2+$ [redacted]$= t_n$。

2. n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1,2, ⋯，n的一个排列，t为这个排列的逆序数。

对角线法则：只对二阶和三阶行列式适用。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

例：写出4阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解： $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 。

例：计算行列式D=$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解： $D=(-1)^{0+1+2+3}\times 1\times 2\times 3\times 4=24$.

3.行列式的性质

(1)行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等。

(2)对换行列式的两行(列)，行列式变号。

(3)行列式的某一行(列)中所有元素都乘同一个数k，等于用数k乘此行列式；或者行列式中某一行(列)的所有元素有公因子k,则k可以提到行列式记号的外面。

(4)行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零。

(5)若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和。

(6)把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变。

4.行列式的按行(列)展开

(1)在n阶行列式中，把(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的n-1阶行列式叫做(i,j)元a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称A_{ij}为(i,j)元a_{ij}的代数余子式。

(2)行列式等于它任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即可以按第i行展开：

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+$ [redacted] $a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,$ [redacted] $n)$

可以按第j列展开：$D=a_{1j}A_{2j}+a_{i2}A_{i2}+$ [redacted] $a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,$ [redacted] $n)$

(3)行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+$ [redacted] $a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$

或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+$ [redacted] $a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$

5.克拉默法则

含有n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当$b_1,b_2,\cdots,b_n$全为零时，称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组。

(1)如果方程组的系数行列式$D\neq 0$，那么它有唯一解：$x_i=\frac{D_i}{D}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中D_i $(i=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第i列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式。

(2)如果线性方程组无解或有两个不同的解，那么它的系数行列式$D=0$。

(3)如果齐次线性方程组的系数行列式$D\neq 0$，那么它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，那么它的系数行列式必定等于零。

用克拉默法则解线性方程组的两个条件：(1)方程组个数等于未知元个数；(2)系数行列式不等于零。

6.一些常用的行列式

(1)上、下三角形行列式等于主对角线上个元素的乘积。(课本P7)

特别地，对角行列式等于对角线元素的乘积。(课本P7)

(2)范德蒙行列式(课本P18 例12)

计算行列式常用方法：(1)利用定义；(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值。

例：课本P12　例7-例9

例：课本P17　例7(续)

例：课本P20　例13

复习思考题、作业题：

P21 习题一 1,2,4,5,6(1),8,9

下次课预习要点

第二章矩阵及其运算

<table>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第　4-6　周</td><td>课　次</td><td>第　4-6　次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="3">第二章　矩阵及其运算</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td>理论课（√）、实践课（　）、习题题（√）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>10</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="3">1、理解矩阵概念，了解单位矩阵，对角矩阵，对称矩阵的定义及其性质。
2、掌握矩阵的运算，即矩阵的加法、数乘、乘法、转置、方阵的行列式的运算规律。
3、理解逆矩阵的概念，知道逆矩阵存在的条件并会求逆矩阵。
4、熟悉矩阵分块及利用矩阵分块法对矩阵进行运算。</td></tr>
<tr><td>思政育
人目标</td><td colspan="3">1、强调矩阵运算的严格定义，引导学生理解数学的精确性
2、强化科技报国与实际问题解决能力，例北斗卫星定位等</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="3">讲解法、练习法</td></tr>
</table>

教　学 重　点 难　点	1、矩阵乘矩阵，让学生充分理解矩阵乘矩阵的定义,特别强调前面矩阵的列等于后面矩阵的行的原因，说明矩阵乘法常态下不满足消去率,通过练习提高学生的计算准确率。 2、逆矩阵的求法中说明通过求伴随矩阵的方式,让学生掌握矩阵求逆,并告知学生下一章里还有更简单的求逆方法. 3、分块矩阵的乘法运算,对于四阶且子块含有零矩阵,单位阵,对角阵的高阶,一般做四块分且尽量分出单位阵,零矩阵.

教学步骤及内容：

讲授为主,练习为辅,主要让学生充分理解矩阵运算的定义、原则,从而掌握矩阵运算,并通过练习提高学生运算的准确率。

通过逆矩阵的定义及定理2让学生充分掌握矩阵的求逆运算,并告知学生在下一章里还可用更简练的方法计算逆矩阵.

通过对高阶矩阵特别是可分出部分零矩阵或单位阵的四阶矩阵的分块让学生掌握分块矩阵的加法运算,数乘运算,矩阵乘矩阵的运算,以及求逆矩阵的运算,并列举了几个典型例子的运算.

简要知识点与例题：

一、矩阵的定义

定义1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这$m \times n$个数称为矩阵A的元素，简称为元。

$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为矩阵$A$的第i行第j列的元。矩阵$A$也可记为($a_{ij}$)或$(a_{ij})_{m\times n}$，或$A_{m\times n}$。

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。

行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶方阵A也记为A_n。

只有一行的矩阵$A=(a_1\ a_2 \cdots a_n)$称为行矩阵，又称行向量。行矩阵也记作：$A=(a_1, a_2,\cdots,a_n)$。

只有一列的矩阵$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$称为列矩阵，又称列向量。

两个矩阵的行数相等、列数也相等，就称它们是同型矩阵。如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

那么就称矩阵A与矩阵B相等，记作$A=B$。

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作O。注意不同型的零矩阵是不同的。

二、矩阵的加法

定义2　设有两个$m \times n$矩阵$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$，那么矩阵A与B的和记为$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

两个矩阵是同型矩阵才能进行加法运算。

矩阵加法满足下列运算规律(设 A,B,C 都是 $m\times n$ 矩阵)：

（i） $A+B=B+A$；

（ii） $(A+B)+C=A+(B+C)$.

$A=(a_{ij})$ 的负矩阵记为：$-A=(-a_{ij})$

$$A+(-A)=O$$

规定矩阵的减法为

$$A-B=A+(-B)$$

三、矩阵的数乘

定义3　数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘满足下列运算规律(设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为数)：

（i） $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

（ii） $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

（iii） $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

四、矩阵乘矩阵

定义4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 A 与矩阵

B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

把此乘积记作 $C = AB$.

且有

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

P31 例5 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的乘积 AB.

P32 例6 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

的乘积 AB 及 BA.

对于两个n阶方阵 A、B，若 $AB = BA$，则称方阵 A 与 B 是可交换的.

从例6的结论得知：若 $A \neq O$，而 $A(X - Y) = O$

矩阵的乘法虽不满足交换律，但满足结合律和分配律：

(i) $(AB)C = A(BC)$;

（ii） $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（其中$\lambda$为数）；

（iii） $A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$.

对于单位矩阵E，容易验证

$$E_m A_{m\times n}=A_{m\times n},\quad A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$$

即$EA=AE=A$.

特殊矩阵：

1、单位矩阵

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

2、数量矩阵(纯量阵)

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}$$

3、对角矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

4、上三角矩阵、下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可以得到：$(\lambda E_n)A_n = \lambda A_n = A_n(\lambda E_n)$.

表明纯量阵与任何同阶方阵都是可交换的.

定义矩阵的幂为：

$$A^1 = A, A^2 = A^1 A^1, \cdots, A^{k+1} = A^k A^1, A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}$$

其中k,l为正整数.

五、矩阵的转置

定义5 把矩阵A的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{则} A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A的转置也是一种运算，满足：

（i）$(A^T)^T = A$;

（ii）$(A+B)^T = A^T + B^T$;

（iii）$(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

（iv）$(AB)^T = B^T A^T$.

P36 例8 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求$(AB)^T$.

若A是n阶方阵，如果满足$A^T=A$，即$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么$A$称为对称矩阵，简称对称阵.

六、方阵的行列式

定义6　由n阶方阵A的元素所构成的行列式(各元素位置不变)，称为方阵A的行列式，记作$\det A$或$|A|$.

$|A|$满足下列运算规律(设A,B为n阶方阵，λ为数)：

（i）$|A^T|=|A|$;

（ii）$|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

（iii）$|AB|=|A||B|$.

P38 例10 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下的矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵，简称伴随阵. 满足$AA^*=A^*A=|A|E$.

七、逆矩阵

定义7　对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使

$$AB=BA=E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵，简称逆阵，记作

A^{-1}.

如果矩阵A是可逆的，那么A的逆矩阵是唯一的。

定理1 若矩阵A可逆，则$|A|\neq 0$.

定理2 若$\left|A\right| \neq 0$，则矩阵A可逆，且$A^{-1} = \dfrac{1}{\left|A\right|}A^*$，其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵.

当$\left|A\right| = 0$时，A称为奇异矩阵，否则称A为非奇异矩阵.可逆矩阵就是非奇异矩阵.

推论 若$AB = E$(或$BA = E$)，则$B = A^{-1}$.

逆阵满足下列运算律:

(ⅰ)若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$;

(ⅱ) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

(ⅲ)若A、B为同阶矩阵且均可逆，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(ⅳ) 若A可逆,则A^T亦可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

当A可逆时，还可定义

$$A^0 = E, A^{-k} = (A^{-1})^k$$

其中k为正整数.这样，当A可逆，λ、μ为整数时，有

$$A^{\lambda}A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, (A^{\lambda})^{\mu} = A^{\lambda\mu}$$

P41 例11 求二阶矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵.

P41 例12 求方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

P41 例13 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

求矩阵X使其满足$AXB = C$.

P42 例14 设$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},AP=P\Lambda,$求$A^n$.

定义 设$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$为$x$的$m$次多项式，$A$为n阶矩阵，记$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$，$\varphi(A)$称为矩阵$A$的$m$次多项式. 可证矩阵$A$的两个多项式$\varphi(A)$和$f(A)$也是可交换的，即总有

$$\varphi(A)\,f(A)=f(A)\,\varphi(A)$$

A的几个多项式可以像数x的多项式一样相乘或分解因式. 例如

$$(E+A)(2E-A)=2E+A-A^2,$$

$$(E-A)^3=E-3A+3A^2-A^3$$

容易证明：

（i）如果$A=P\Lambda P^{-1}$,则$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$，从而

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

$$=Pa_0EP^{-1}+Pa_1\Lambda P^{-1}+\cdots+Pa_m\Lambda^mP^{-1}=P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

（ii）如果$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为对角矩阵，则

$$\Lambda^k=diag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$$

从而

$$\varphi(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+\cdots+a_m\Lambda^m$$

$$=a_0\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}
$$

对于行数和列数较多的矩阵 A，运算时常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例如将3×4矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}
$$

分成子块的分法很多，下面举出三种分块形式：

（ⅰ）$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$，（ⅱ）$\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$，

（ⅲ）$\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$

分法（ⅰ）可记为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，其中

$$
A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, A_{21}=(a_{31},a_{32}), A_{22}=(a_{33},a_{34}).
$$

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似，满足：

（ⅰ）设矩阵 A 与 B 的行数相同、列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同、列数相同，那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

（ii）设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

（iii）设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于的行数，那么 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i=1,\cdots,s; j=1,\cdots,r)$.

P48 例17 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$，求 AB.

(iv)设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\\vdots&&\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则$A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{s1}^T\\\vdots&&\vdots\\A_{1r}^T&\cdots&A_{sr}^T\end{pmatrix}$.

(v)设 A 为n阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&O\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s\end{pmatrix}$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下列性质：

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&&O\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s^{-1}\end{pmatrix}.$$

P49 例18 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

对矩阵进行按行分块和按列分块：

$m\times n$ 矩阵 A 有 n 列，称为矩阵 A 的 n 个列向量，若第 j 列记作

$$a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

则 A 可按列分块为

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n);$$

$m\times n$ 矩阵 A 有 m 行，称为矩阵 A 的 m 个行向量，若第 i 行记作

$$\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),$$

则 A 可按行分块为

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}.$$

利用矩阵的按列(按行)分块，还可以给出线性方程组的另一矩阵表示形式.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

它的矩阵乘积形式为 $A_{m\times n}x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$.

上式中，把 A 按列分块，把 x 按行分块，由分块矩阵的乘法有

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=b,$$

即 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$.

八、线性变换

P28(3) $\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$ 表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换.其中 a_{ij} 为常数. 线性变换(3)的系数 a_{ij} 构成矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

P53.3.已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1=2y_1+y_3 \\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3 \\ x_3=4y_1+y_2+5y_3 \end{cases},\quad \begin{cases} y_1=-3z_1+z_2 \\ y_2=2z_1+z_3 \\ y_1=-z_2+3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

复习思考题、作业题：

P52 习题二 1、2、4、6、10、14、15、17、21、28

下次课预习要点

第三章 初等变换、线性方程组

教学后记			
授课时间	第 7-10 周	课 次	第 7-10 次
章节名称	第 3 章 矩阵的初等变换与线性方程组		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（√）、其它（ ）	教学时数	10

<table>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td>1、理解矩阵的秩的定义及其求法。
2、掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的定义和性质。
3、了解齐次线性方程组有非零解的充要条件和非齐次线性方程组有解的充要条件。
4、运用初等变换求矩阵的逆阵。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td>讲解法、练习法</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td>1. 矩阵的初等变换。
2.对矩阵A作一系列初等行(列)变换， 相当于用可逆矩阵左(右)乘A，由此引出用初等变换求逆阵的方法；会用矩阵的初等行变换求矩阵的逆矩阵；会用矩阵的初等行变换求矩阵方程的解。
3. 矩阵秩的概念，矩阵秩的性质，利用初等变换求秩，应用矩阵的秩解决问题。
4. 根据增广矩阵的行最简形熟练写出线性方程组的通解；线性方程组的基本定理。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

1、定义与记号　P58

初等行变换$(\mathrm{r_i} \leftrightarrow \mathrm{r_j}\ , \mathrm{r_i} \times \mathrm{k}, \mathrm{r_i} + \mathrm{kr_j})$，$A$与$B$行等价$(A \overset{r}{\sim} B)$；

初等列变换$(\mathrm{c_i} \leftrightarrow \mathrm{c_j}\ , \mathrm{c_i} \times \mathrm{k}, \mathrm{c_i} + \mathrm{kc_j})$，$A$与$B$列等价$(A \overset{c}{\sim} B)$；

初等变换，A与B等价$(A \sim B)$.

矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$

2、矩阵的初等变换

对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等变换：

(1) 交换矩阵的两行(列)；

(2) 以一个非零的常数k 乘矩阵的某一行(列)；

(3) 把矩阵的某一行(列)的k 倍加到另一行(列).

3、初等矩阵

(1) 定义单位阵经一次初等变换所得矩阵称为初等矩阵.

(2) 对矩阵A作一次初等行(列)变换相当于用对应的初等矩阵左(右)乘A.

(3) 初等变换及其逆变换与初等矩阵及其逆阵的对应可列表如下：

初等变换	初等矩阵	逆变换	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j$ $c_i \leftrightarrow c_j$	$E(i,j)$	$r_i \leftrightarrow r_j$ $c_i \leftrightarrow c_j$	$E(i,j)$
$r_i \times k$ $c_i \times k$	$E(i(k))$	$r_i \div k$ $c_i \div k$	$E(i(\frac{1}{k}))$
$r_i + kr_j$ $c_i + kc_j$	$E(ij(k))$	$r_i - kr_j$ $c_i - kc_j$	$E(ij(-k))$

(4) 方阵A可逆，$A \overset{r}{\sim} E$，$A = P_1P_2\cdots P_l$（P_i为初等矩阵），

$A \sim B$,存在可逆矩阵P,Q，使$B = PAQ$.

(5) 若$(A,B)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则$A$可逆，且$X = A^{-1}B$.特别地，若$(A,E)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则$A$可逆，且$X = A^{-1}$.

4、矩阵的秩

(1)定义4 (P66) 矩阵的k阶子式；定义5 (P67)矩阵的秩

(2) $R(A)=r \Leftrightarrow A$的行阶梯形含r个非零行$\Leftrightarrow A$的标准形$F \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3)矩阵秩的性质

① $0 \le R(A) \le \min\{m,n\}$.

② $R(A^T) = R(A)$.

③ 若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

④ 若P,Q可逆，则$R(PAQ) = R(A)$.

⑤ $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$.

⑥ $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

⑦ $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=o$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

5、线性方程组的解

[1] 基本定理：n元线性方程组 $Ax=b$.

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

[2] 求解线性方程组的步骤(见教材)

[3]重要定理：

定理1 线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)$.

定理2 n元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

把定理1 推广到矩阵方程，得

定理3 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

6、例题

P63 例1；P64 例2、例3；P65 例4； P68 例5、例6；P69 例7； P72 例10；P73 例11；P74 例12；P75 例13；

复习思考题、作业题：

P77 习题三： 1-2、4、6、10、12、13、14、16

下次课预习要点

第 4 章 向量组的线性相关性

教 学 后 记			
授课时间	第 10-13 周	课 次	第 10-13 次
章 节 名 称	第 4 章 向量组的线性相关性		

授课方式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（√ ）、其它（ ）	教学时数	11
教学目的要求	1、了解n维向量的概念。 2、了解向量组线性相关，线性无关的定义以及向量组线性相关、无关的判断和性质。 3、理解向量组的最大无关组与向量组的秩的概念。 4、初步了解向量空间。 5、理解线性方程组的解的结构，精通线性方程组的求解。		
教学方法	讲解法、练习法		
教学重点难点	1. 向量、向量组与矩阵之间的联系，线性方程组的向量表示；线性组合与线性表示的概念； 2. 线性相关与线性无关的概念；线性相关性在线性方程组中的应用；(重点) 3. 线性相关与线性无关的判定方法：定义，两个定理. （难点） 4. 最大线性无关向量组的概念：最大性、线性无关性. 5. 求向量组的秩以及最大无关组的方法：将向量组中的向量作为列向量构成一个矩阵，然后进行初等行变换. 6. 基础解系的求法。 7.向量空间的概念：向量的集合对加法及数乘两种运算封闭；由向量组生成的向量空间. 8. 向量空间的基和维数：求向量空间基和维数的方法.		

教学步骤及内容：

简要知识点与例题：

1、向量组及其线性组合(P81定义1，P82定义2，P83定义3，P83定理1，P82定理2及推论)

2、n维向量的表示方法(P81)

3、向量组线性相关的概念(P87定义4)

4、向量组线性相关的判定(P87定义4、P88定理4、P90定理5)

5、向量组最大无关组的概念(P91定义5、P92推论)

6、基础解系的概念(P97,本质等同于向量组的最大无关组)

7、线性方程组解的判定与解的结构

解的判定：

(1)n元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

(2) n元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 B 的秩，且当 $R(A)=R(B)=n$ 时方程有惟一解，当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时方程组有无限多个解.

解的结构：

(1)齐次线性方程组的通解=基础解系的线性组合；

(2)非齐次线性方程组的通解=对应的齐次线性方程组的通解+非齐次线性方程组的一个特解.

8、向量空间的概念(P104定义6)与判定(P104-105,例17-20)

9、由向量组生成的向量空间的定义(P105倒数第四、五行)

10、子空间的概念(P106定义7)

11、向量空间的基、维数、坐标的概念(P106定义8，P107定义9)

12、过渡矩阵的概念(P108例25)

13、例题

P85 例1、 P88例4-5、P92-93例8-9、P94例10、P99例12、P103例16、P107例24、P108例26.

复习思考题、作业题：

P109—113： 1—4，13—15，21，27，35，37—38.

下次课预习要点

第五章 相似矩阵及二次型

教 学 后 记					
授课时间	第 14-17 周	课 次	第 14-15 次		
章 节 名 称	第五章 相似矩阵及二次型				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（√ ）、其它（ ）			教学 时数	12
教 学 目 的 要 求	1、了解向量的内积和向量组的正交化。 2、了解矩阵的特征值和特征向量的定义以及求法。 3、理解相似矩阵、正交矩阵的概念、性质，会求实对称矩阵的相似对角形矩阵。				

	4、理解二次型及其标准形 5、会用正交变换法和配方法化二次型成标准形。
教　学 方　法	讲解法、练习法
教　学 重　点 难　点	1、将一组基规范正交化。 2、掌握矩阵的特征值和特征向量的求法。 3、二次型的化简

教学步骤及内容：

1.将一组基规范正交化的方法：先用施密特正交化方法将基正交化，然后再将其单位化.

2．A 为正交矩阵的充要条件；

3．求矩阵特征值与特征向量的步骤。

4．相似矩阵

5. 对称矩阵的性质：

(1)特征值为实数；

(2)属于不同特征值的特征向量正交；

(3)特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

(4)必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

6. 利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的步骤：

(1)求特征值； (2)找特征向量； (3)将特征向量单位化； (4) 最后正交化.

7．实二次型的化简问题，在理论和实际中经常遇到，通过在二次型和对称矩阵之间建立一一对应的关系，将二次型的化简转化为将对称矩阵化为对角矩阵，而这是已经解决了的问题，请同学们注意这种研究问题的思想方法.

8．实二次型的化简，并不局限于使用正交矩阵，根据二次型本身的特点，可以找到某种运算更快的可逆变换．下一节将介绍另一种方法—— 拉格朗日配方法.

9.正定二次型的判定.

教学手段与方法：讲授与练习相结合，精讲多练。

简要知识点与例题：

1、内积的定义及性质　P114

2、向量的长度及性质　P115

3、正交向量组的概念及求法　(P115 定理1、P117施密特正交化方法、例2)

4、正交矩阵与正交变换(P118定义4、P119定义5、P119例4)

5、特征值与特征向量的概念(P120 定义6)

6、特征值和特征向量的性质

7、特征值与特征向量的求法(P121 例5-例9)

8、相似矩阵、对称矩阵的对角化　P124——P130(该部分内容设为选讲)

(1)相似矩阵与相似变换的概念

(2)相似矩阵与相似变换的性质

(3)利用相似变换将方阵对角化的方法

(4)对称矩阵的性质

(5)利用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法

9、二次型及其标准形、正定二次型

(1)二次型及其标准形的概念 (P131定义8)

(2)二次型的表示方法 P132

(3)二次型的矩阵及秩 P132

(4)化二次型为标准形 P134 例14

(5)正定二次型的判定(P136 定理6；P137定义10、定理8,9；P138 例17)

复习思考题、作业题：

P138： 2、3；P139：12、13、16、17、19；P140：21、25、26、27；P141：32、33

下次课预习要点

总复习

教学后记				
授课时间	第 18 周	课次	第 18 次	
章节名称	总复习			
授课方式	理论课（ ）、实践课（ ）、习题题（√）、其它（ ）		教学时数	3
教学目的要求				
教学方法				
教学重点				

难　点	
教学步骤及内容： 指导学生复习及答疑	
复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学 后　记	