揭阳职业技术学院

机 电 工 程 系

《高等数学（上）》教案

(2025-2026学年第1学期)

教师姓名： 王辉坚

所授专业： 宝玉石鉴定与加工（专本协同）

授课班级： 241班

课程整体教学设计

一、课程的性质和任务

党的二十大为国家职业教育的发展指明了新的方向。坚持正确方向，用习近平新时代中国特色社会主义思想铸魂育人，是高职教育改革的根本指引。教育部领导曾指出：深入推进党的创新理论进教材，是构建中国特色高质量教材体系的重大原则，是教材工作必须完成好的重要政治任务。我们要全面贯彻落实党的二十大精神，把教材建设作为深化教育领域综合改革的重要环节，不断深化对做好这项工作的规律性认识和实践探索，确保党的二十大精神进教材落到实处、取得实效。而本课程所采用的教程是同济大学数学科学学院编写的《高等数学》，该教材与时俱进，符合时代要求。

高等数学是数学学科的一个重要分支，它提供了一种科学方法，帮学生更深入的探索数学知识，并以其独特的思维方式解决实际的数学问题。本课程的教学任务是使学生理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法，培养学生的数学素质，培养学生变量数学的观点和具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。更核心的是培养学生的独立思考精神，在实践中形成系统的数学思维，以及培养学生把概念转化为实际解决问题的能力和技术。

二、教学目标与要求

教学目标是传授数学知识，培养学生数学素养，使学生养成数学素质。高等数学在学校的位置要求它需要立足专业培养，传授必需的数学知识，掌握必要的数学技术，培养一定的数学能力，强化一定的数学素养。

三、教学方法与手段

因为课程的着重点应放在挖掘和展现数学知识中的数学思想方法及其数学应用价值上。所以对重要概念，要讲清背景和形成过程，以及所体现的数学思想方法意义和作用。对例题、习题分析要提示数学思维过程，分析难点、关键点，这样才能有效地解决问题。对主要方法，要讲清思维本质、应用原则和其它方法的联系，要强调方法的科学性和灵活性等。教学中要特别注意引导学生抓住对所学知识的阅读、理解、分析和总结环节，勤于动脑和动手，提高计算的难确性、推理的逻辑性和表达的严密性。

四、理论与实践课程内容与学时分配

课程内容和学时分配表

篇章		内容	理论课时	实验课时	小计
第一章函数与极限	1	第一节映射与函数	2		20
	2	第二节数列的极限	2		
	3	第三节 函数的极限 第四节 无穷小与无穷大 第五节 极限运算法则 习题	6		
	4	第六节 极限存在准则 两个重要极限 第七节 无穷小的比较	4		
	5	第八节 函数的连续性与间断点 第九节连续函数的运算与初等函数的连续性 第十节 闭区间上连续函数的性质	6		
第二章导数与微分	1	第一节 导数概念 第二节 函数的求导法则	4		10

	2	第三节 高阶导数 第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 第五节 函数的微分 习题	6		
第三章微分中值定理与导数的应用	1	第一节 微分中值定理	4		6
	2	第二节 洛必达法则	2		
合计					36

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　1　周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第1次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">§1.1　映射与函数</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">1. 知识目标：主要是复习高中阶段学过的集合以及函数的概念、性质；介绍邻域、分段函数、复合函数、初等函数的概念。
2. 能力目标：掌握这些基础知识，为以下的学习做准备。
3. 素养目标：具备严谨的学习态度。
4. 课程思政：初步引导学生用数学思维形成正确的世界观和价值观。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲授</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：邻域的概念、分段函数、复合函数。
难点：复合函数。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

一、 集合

1、集合：集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体。通常用大写字母 A、B、C……等来表示，组成集合的各个事物称为该集合的元素。若事物 a 是集合 M 的一个元素，就记 a∈M（读 a 属于 M ；若事物 a 不是集合 M 的一个元素，就记 a∉M 或 a∈M（读 a 不属于 M）；集合有时也简称为集。

注意：（1）对于一个给定的集合，要具有确定性的特征，即对于任何一个事物或元素，能够判断它属于或不属于给定的集合，二者必居其一.

（2） 对于一个给定的集合，其中的元素应是互异的，完全相同的元素，不论数量多少，在一个集合里只算作一个元素，就是说，同一个元素在同一个集合里不能重复出现.

（3） 若一集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集

（1） 集合的表示法

表示集合的方法，常见的有列举法和描述法两种.

列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号{ }括起来，这种方法称为列举法.

例 方程 $x^2+2x-3=0$ 根的集合 A，可表示为 A={-3,1}.

描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，可表示为

M={ x | x 具有性质 P},

例 由不等式 x-3>2 的解构成的集合 A 可表示为 A={x|x>5}.

（2） 全体自然数集记为 N,全体整数的集合记为Z,全体有理数的集合记为Q,全体实数的集合记为R，以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集。

（3） 集合间的基本关系：若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若有 $x\in A$，必有 $x\in B$，

就称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$ (读 B 包含 A)。

显然： $N\subset Z\subset Q\subset R$.

若 $A\subset B$,同时 $B\subset A$,就称 A、B 相等,记为 A=B。

(4) 不含任何元素的集称为空集,记为Φ ,如:

$\{x|x^2+1=0, x\in R\}=\Phi$,$\{x:2^x=-1\}=\Phi$,空集是任何集合的子集,即 $\Phi\subset A$ 。

2、集合的运算

$A\cup B=\{x\,|\,x\in A或x\in B\}$ ； $A\cap B=\{x\,|\,x\in A且x\in B\}$

$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A或x\notin B\}$

性质:（1）交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律（$A\cup B$）$\cup C=A\cup(B\cup C)$,（$A\cap B$）$\cap C=A\cap(B\cap C)$

（3）分配律（$A\cup B$）$\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

（$A\cap B$）$\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

（4）对偶律（$A\cup B$）$^c=A^c\cap B^c$,（$A\cap B$）$^c=A^c\cup B^c$

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$的证明:

$x\in(A\cup B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cap B^C$, 所以$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

直积(笛卡儿乘积):

设 A、B是任意两个集合, 在集合 A中任意取一个元素 x, 在集合 B中任意取一个元素 y, 组成一个有序对(x, y), 把这样的有序对作为新元素, 它们全体组成的集合称为集合 A与集合 B的直积, 记为 $A\times B$, 即

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$$

例如, R×R=$\{(x, y)\,|\, x\in R 且 y\in R\}$即为 xOy面上全体点的集合, R×R 常记作 R^2.

3、区间与邻域

（1） 区间

有限区间: 设 $a<b$, 称数集$\{x|a<x<b\}$为开区间, 记为(a, b), 即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地有

$[a, b]=\{x\,|\,a\le x\le b\}$称为闭区间,

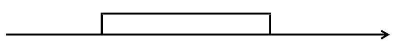
$[a, b)=\{x\,|\,a\le x<b\}$、$(a, b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$称为半开区间.

其中 a 和 b 称为区间(a, b)、$[a, b]$、$[a, b)$、$(a, b]$的端点, $b-a$ 称为区间的长度.

无限区间:

$[a, +\infty)=\{x\,|\,a\le x\}$, $(-\infty, b]=\{x\,|\,x<b\}$, $(-\infty, +\infty)=\{x\,|\,|x|<+\infty\}$.

区间在数轴上的表示:



（2）**邻域:** 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的领域，记作$U(a)$ 。

设δ是任一正数，a 为某一实数，把数集{ x| |x-a | <δ}称为点 a 的δ邻域，记作 U（a, δ），即

$$U(a, \delta)=\{ x| |x-a| <\delta\}$$

点 a 称为这邻域的中心，δ称为这邻域的半径.（图 1-8）

由于 $a-\delta<x<a+\delta$相当于| x-a |<δ，因此

U(a, δ) ={ x| $a-\delta<x<a+\delta$}，也就是开区间($a-\delta, a+\delta$)

因为| x-a |表示点 x 与点 a 间的距离，所以 U(a, δ) 表示：与点 a 距离小于δ的一切点 x 的全体.

例如：| x-2 |<1，即为以点 a=2 为中心，以 1 为半径的邻域。有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的δ邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的δ邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a, \delta)=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}$

这里 0<|x-a|就表示 $x \neq a$.

例如：0<| x-2 |<1，即为以点 a=2 为中心，半径为 1 的去心邻域(1,2) ∪ (2,3).

二、映射

1、映射的概念

定义 设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，则称 f 为 X 到 Y 的映射，记作 $f: X \to Y$，

其中 y 元素 x（在映射 f 下）的像。并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$ 而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=$X；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即：$R_f=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$.

需要注意的问题：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$ 集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

(2) 对每个 $x\in X$，元素 x的像 y是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f是 Y的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

例 1 设 f：R→R，对每个 $x\in$R，$f(x)=x^2$.

显然，f是一个映射，f的定义域 D_f=R，值域 $R_f=\{y|y\geq 0\}$，它是 R 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 y=0 外，它的原像不是唯一的. 如 y=4 的原像就有 x=2 和 x=−2 两个.

例 2 设 $X=\{(x, y)|x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x, 0)||x|\leq 1\}$，f：$X\to Y$，对每个$(x, y)\in X$，有唯一确定的$(x, 0)\in Y$与之对应.

显然 f是一个映射，f的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$. 在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x轴的区间[−1, 1]上.

(3) $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$，对每个 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$f(x)=\sin x$．

f是一个映射，定义域 $D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，值域 $R_f=[-1,1]$．

满射、单射和双射：

设 f是从集合 X到集合 Y的映射，若 $R_f=Y$，即 Y中任一元素 y都是 X中某元素的像，则称 f为 X到 Y上的映射或满射；若对 X中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f为 X到 Y的单射；若映射 f既是单射，又是满射，则称 f为一一映射(或双射)．

上述三例各是什么映射？

2. 逆映射与复合映射

设 f是 X到 Y的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 R_f 到 X的新映射 g，即

$g: R_f\to X$,

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x满足 $f(x)=y$．这个映射 g称为 f的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$．

按上述定义，只有单射才存在逆映射．上述三例中哪个映射存在逆映射？

设有两个映射

$g: X\to Y_1$,　　$f: Y_2\to Z$,

其中 $Y_1\subset Y_2$．则由映射 g和 f可以定出一个从 X到 Z的对应法则，它将每个 $x\in X$映射成 $f[g(x)]\in Z$．显然，这个对应法则确定了一个从 X到 Z的映射，这个映射称为映射 g和 f构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

$f\circ g: X\to Z$,

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$，$x\in X$．

应注意的问题：

映射 g和 f构成复合映射的条件是：g的值域 R_g必须包含在 f的定义域内，$R_g\subset D_f$．否则，不能构成复合映射．由此可以知道，映射 g和 f的复合是有顺序的，$f\circ g$有意义并不表示 $g\circ f$也有意义．即使 $f\circ g$与 $g\circ f$都有意义，复映射 $f\circ g$与 $g\circ f$也未必相同．

例 4 设有映射 $g: \mathrm{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathrm{R}$，$g(x)=\sin x$，

映射 $f: [-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$．

则映射 g和 f构成复映射 $f\circ g$: $\mathrm{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathrm{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

三、函数

1、函数的概念

定义 设数集 $D\subset\mathrm{R}$，则称映射 $f: D\to\mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$y=f(x)$, $x\in D$,

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

应注意的问题：

记号 f 和 $f(x)$的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值．但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$, $x\in D$”或“$y=f(x)$, $x\in D$”来表示定义

在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f.

函数符号: 函数 $y=f(x)$中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母, 例如“F”,“φ”等. 此时函数就记作 $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$.

函数的两要素:

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在 **R** 内, 因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

函数的定义域:

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定. 另一种就是若函数由公式给出时，不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值.

求定义域举例:

求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

要使函数有意义, 必须 $x\neq0$, 且 $x^2-4\geq0$.

解不等式得$|x|\geq2$.

所以函数的定义域为 $D=\{x\,|\,|x|\geq2\}$, 或 $D=(-\infty, 2]\cup[2, +\infty])$.

单值函数与多值函数:

在函数的定义中，对每个 $x\in D$, 对应的函数值 y 总是唯一的, 这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则, 按这个法则, 对每个 $x\in D$, 总有确定的 y 值与之对应, 但这个 y 不总是唯一的, 我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如, 设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然, 对每个 $x\in[-r, r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$,可确定出对应的 y 值, 当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时, 对应 $y=0$ 一个值; 当 x 取$(-r, r)$内任一个值时, 对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数, 往往只要附加一些条件, 就可以将它化为单值函数, 这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如, 在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中, 附加“$y\geq0$”的条件, 即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geq0$”作为对应法则, 就可得到

一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$; 附加“$y\leq0$”的条件, 即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leq0$”作为对应法则, 就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法), 这在中学里大家已经熟悉. 其中, 用图形法表示函数是基于函数图形的概念, 即坐标平面上的点集

$\{P(x, y)|y=f(x), x\in D\}$

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形. 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$的值域.

函数的例子:

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\ln(x+3)}$ 的定义域 .

解 应使

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x-1\neq 0, \\ \ln(x+3)\neq 0, \\ x+3>0. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x\geq 2, \\ x\neq 1, \\ x\neq -2, \\ x>-3. \end{cases}$$

所以此函数的定义域为[2, ＋∞).

例 2 求函数 f(x)=arcsin $\frac{x-1}{5}$ + $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域

解 应使

$$\begin{cases} \left|\frac{x-1}{5}\right|\leq 1, \\ 25-x^2>0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -4\leq x\leq 6, \\ -5<x<5 \end{cases}$$ 也就是 -4≤x <5

所以此函数的定义域为 D=[-4,5).

例 3 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$

的定义域 D=(−∞,+∞),值域 W=[0,＋∞),它的图形如图所示.这函数称为绝对值函数

分段函数:

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

例 4. 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$.

称为符号函数. 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=\{-1, 0, 1\}$.

例 5 设 x 为任一实数.不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作[x].例如,$\left[\frac{3}{5}\right]=0, [\sqrt{3}]=1, [\pi]=3, [-1]=-1, [-3.5]=-4$.把 x 看作变量,则函数

y=[x]的定义域 D=(−∞,+∞),值域 W=Z.它的图形如图 1.7 所示,这图形称为阶梯曲线.在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.这函数称为取整函数.

例 6 函数 $y=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leq x\leq 1 \\ 1+x & x>1 \end{cases}$.

这是一个分段函数, 其定义域为 $D=[0, 1]\cup(0, +\infty)=[0, +\infty)$.

当 $0\leq x\leq 1$ 时, $y=2\sqrt{x}$; 当 $x>1$ 时, $y=1+x$.

例如 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; $f(1)=2\sqrt{1}=2$; $f(3)=1+3=4$.

2、函数的几种特性

1)、**函数的有界性：**

设 $y=f(x)$ **在** D **上有定义，若对** $\forall x\in D,\exists M>0$**，使** $|f(x)|\le M$**，就称** $f(x)$ **在** D **上有界，否则称为无界。**

注：(1)、若对 $\forall x\in D$，$\exists M$，使得 $f(x)\le M(f(x)\ge M)$，就称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界。

$f(x)$ 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 D 上同时有上界和下界。

(2)、$f(x)$ 在 D 上无界也可这样说：对 $\forall M>0$，总 $\exists x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$。

2)、**函数的单调性：**

设函数 $f(x)$ **在区间** I **上有定义，若对** $\forall x_1$、$x_2\in I$**，当** $x_1<x_2$ **时总有：(1)** $f(x_1)\le f(x_2)$**，就称** $f(x)$ **在** I **上单调递增，特别当严格不等式** $f(x_1)<f(x_2)$ **成立时，就称** $f(x)$ **在** I **上严格单调递增。**

(2) $f(x_1)\ge f(x_2)$**，就称** $f(x)$ **在** I **上单调递减，特别当严格不等式** $f(x_1)$ $f(x_2)$ **成立时，就在** I **上严格单调递减。**

例如：[例 3]中的函数在定义域 $[-1,1]$ 上不是单调的，但在 $[-1,0)$ 上是严格单减的，在 $(0,1]$ 上是严格单增的。

3)、**函数的奇偶性：**

设函数 $f(x)$ **的定义域** D **为对称于原点的数集，（即若** $x\in D$ **，** $-x\in D$**），若对** $\forall x\in D$**，有** $f(-x)=f(x)$ **恒成立，就称** $f(x)$ **为偶函数。**

若对 $\forall x\in D$**，有** $f(-x)=-f(x)$ **恒成立，就称** $f(x)$ **为奇函数。**

【例 5】 $y=x^2$，$y=\cos x$，$y=|x|$，是偶函数，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\operatorname{sgn} x$，是奇函数，$y=x^2+x^3$，$y=\cos x+\sin x$ 是非奇非偶函数。

注 1)：偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的。

2)：若 $f(x)$ 是奇函数，且 $0\in D$，则必有 $f(0)=0$。

3)：两偶函数和为偶函数；两奇函数和为奇函数；两偶函数的积为偶函数；两 奇函数的积数；一奇一偶的积为奇函数。

4)、**函数的周期性：**

设函数 $f(x)$ **的定义域为** D**，如果存在正数** $l\ne 0$**，使得对** $\forall x\in D$**，有** $x\pm l\in D$ **，且**

$f(x+l)=f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期。

例如：$y=\sin x, y=\cos x, y=tgx$ 分别为周期为 $2\pi,2\pi,\pi$ 的周期函数，$y=x-[x]$ 为周期为 1 的函数。

注 1：若 l 为 $f(x)$ 的周期，由定义知 $2l,3l,4l$ 也都是 $f(x)$ 的周期，故周期函数有无穷多个周期，通常说的周期是指最小正周期（基本周期），然而最小正周期未必都存在（为什么？）

例如：$D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q^c\end{cases}$，易证这是一个周期函数，任何有理数 r 都是他的周期，由于不存在最小的正有理数，所以没有最小正周期。

2：周期函数在一每个周期 $(a+kl,a+(k+1)l)$（a 为任意数，k 为任意常数）上，有相同的形状。

3、 反函数

定义 6 设 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，因此，对 $\forall y\in W$，必 $\exists x\in D$，使得 $f(x)=y$，这样的 x 可能不止一个，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，按函数的概念，就得到一新函数 $x=\varphi(y)$，称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数。

注 1：反函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域为 W，值域为 D；

2：由上讨论知，即使 $y=f(x)$ 为单值函数，其反函数却未必是单值函数，以后对此问题还作研究；

3：在习惯上往往用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此将 $x=\varphi(y)$ 中的 x 与 y 对换一下，$y=f(x)$ 的反函数就变成 $y=\varphi(x)$，事实上函数 $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 是表示同一函数的，因为，表示函数关系的字母"φ"没变，仅自变量与因变量的字母变了，这没什么关系。所以说：若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，那么 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，且后者较常用；

4：反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形是对称于 $y=x$。

例如：函数 $y=ax+b, y=x^2, y=x^3$ 的反函数分别为：

$x=\dfrac{y-b}{a}, x=\pm\sqrt{y}, x=y^{\frac{1}{3}}$ 或分别为 $y=\dfrac{x-b}{a}, y=\pm\sqrt{x}, y=x^{\frac{1}{3}}$。

4、复合函数

若 $y=f(u)$　$u=\varphi(x)$，当$\varphi(x)$的值域落在$f(u)$的定义域内时，称 $y=f[\varphi(x)]$是由中间变量 u 复合成的复合函数。

例如：1、　$y=\sqrt{u}$　$u=2+\sin x$ 可复合成 $y=\sqrt{2+\sin x}$

注意：$y=\sqrt{u}$　$u=\sin x-2$ 就不能复合。

2、　$y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看作是 $y=\arctan u$，$u=2^v$，$v=\sqrt{x}$ 复合成的复合函数。

5、函数的运算（和差积商运算）P16　页

设函数 $f(x), g(x)$的定义域依次为 $D_1, D_2, D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

和(差)$f\pm g$: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x), x\in D$;

积 $f\cdot g$:　$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in D$;

商 $\frac{f}{g}$:　$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D\backslash\{x|g(x)=0\}$.

例 11 设函数 $f(x)$的定义域为$(-l, l)$, 证明必存在$(-l, l)$上的偶函数 $g(x)$及奇函数 $h(x)$, 使得 $f(x)=g(x)+h(x)$.

分析 如果 $f(x)=g(x)+h(x)$, 则 $f(-x)=g(x)-h(x)$, 于是

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

证 作 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, 则 $f(x)=g(x)+h(x)$,

且　$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x).$$

五、初等函数

基本初等函数:

幂函数: $y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数);

指数函数: $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$);

对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, 特别当 $a=e$ 时, 记为 $y=\ln x$);

三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

初等函数:

由常数和基本初等函数经过**有限次**的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用**一个式子表示**的函数, 称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sin^2 x,\quad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数.　本教材讨论的主要都是初等函数。

复习思考题、作业题： 思考题：下列函数能否复合为函数 $y=f[g(x)]$，若能，写出其解析式、定义域、值域． (1) $y=f(u)=\sqrt{u},\ u=g(x)=x-x^2$ (2) $y=f(u)=\ln u,\ u=g(x)=\sin x-1$。
下次课预习要点

教学后记	

授课时间	第 2 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	**§1.2 数列的极限**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	1. 知识目标：使学生理解数列的定义及性质。 2. 能力目标：掌握数列的定义及性质。 3. 素养目标：具备科学的学习态度。 4. **课程思政：**引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	重点：数列极限的定义及性质。 难点：数列极限的定义。		

教学步骤及内容：

一、数列极限的定义

课程思政：极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的。例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用。**通过介绍刘徽通过“割圆术”计算圆周率的实践，体现中国古代数学家“化曲为直”的辩证思维，激发学生对中华优秀数学文化的认同感，树立“实践出真知”的认知理念。**

设有一圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作内接正二十四边形，其面积记为 A_3；循此下去，每次边数加倍，一般地把内接正$6\times 2^{n-1}$边形的面积记为 $A_n\ (n\in N)$。这样，就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\quad ,\ A_n,\quad ,$$

它们构成一列有次序的数。当n越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确。但是无论n取得如何大，只要n取定了，A_n终究只是多边形的面积，而还不是圆的面积。因此，设想无限增大（记为$n\to\infty$，读作n趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积。这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列）$A_1, A_2, A_3,\quad , A_n,\quad$，当$n\to\infty$时的极限。在圆面积问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积。

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，

因此有必要作进一步的阐明。

先说明数列的概念。如果按照某一法则，有第一个数 x_1，第二个数 x_2，…这样依次序排列着，使得对应着任何一个正整数n 有一个确定的数 x_n，那么，这列有次序的数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做数列。

数列中的每一个数叫做数列的项，第n 项 x_n 叫做数列的一般项。例如：

$$(1)\ \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots; \qquad (2)\ 2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$$

$$(3)\ \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \qquad (4)\ 1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

$$(5)\ 2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\ 2^n,\ \frac{1}{2^n},\ (-1)^{n+1},\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}。$$

以后，数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 也简记为数列$\{x_n\}$。

注：在数轴上，数列的每项都相应有点对应它。如果将 x_n 依次在数轴上描出点的位置，限我们能否发现点的位置的变化趋势呢？显然，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\},\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无限接近于 0 的；$\{2n\}$是无增大的；$\{(-1)^{n-1}\}$的项是在 1 与-1两点跳动的，不接近于某一常数；$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限接近常数 1。

对于数列来说，最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的那种渐趋稳定的状态，这就是常说的数列的极限问题。

我们来观察$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的情况。从图中不难发现 $\frac{n+1}{n}$ 随着 n 的增大，无限制地接近1，亦即 n 充分大时，$\frac{n+1}{n}$ 与1可以任意地接近，即 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$ 可以任意地小，换言之，当 n 充分大时 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|$ 可以

小于预先给定的无论多么小的正数ε。例如，取$\varepsilon=\frac{1}{100}$，由$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}\Rightarrow n>100$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第101项开始，以后的项$x_{101}=\frac{102}{101},x_{102}=\frac{103}{102}$，都满足不等式$|x_n-1|<\frac{1}{100}$，或者说，当$n>100$时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{100}$。同理，若取$\varepsilon=\frac{1}{10000}$，由$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10000}\Rightarrow n>10000$，即$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$从第10001项开始，以后的项$x_{10001}=\frac{10002}{10001},x_{10002}=\frac{10003}{10002}$，都满足不等式$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$，或说，当$n>10000$时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{10000}$。一般地，不论给定的正数$\varepsilon$多么小，总存在一个正整数$N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$。这就充分体现了当$n$越来越大时，$\frac{n+1}{n}$无限接近1这一事实。这个数“1”称为当$n\to\infty$时，$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的极限。

定义1：若对$\forall\varepsilon>0$（不论ε多么小），总$\exists$自然数$N>0$，使得当$n>N$时都有$|x_n-a|<\varepsilon$成立，这是就称常数a是数列x_n的极限，或称数列x_n收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或$x_n\to a$（$n\to\infty$）。如果数列没有极限，就说数列是发散的。

【例1】证明数列$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$收敛于1。

证明：对$\forall\varepsilon>0$，要使得$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

注1：ε是衡量x_n与a的接近程度的，除要求为正以外，无任何限制。然而，尽管ε具有任意性，但一经给出，就应视为不变。（另外，ε具有任意性，那么$\frac{\varepsilon}{2},2\varepsilon,\varepsilon^2$等也具有任意性，它们也可代替$\varepsilon$）

2：N是随ε的变小而变大的，是ε的函数，即N是依赖于ε的。在解题中，N等于多少关系

不大，重要的是它的存在性，只要存在一个 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 就行了，而不必求最小的 N。

【例2】证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$$

（此处不妨设 $a\neq 0$，若 $a=0$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$）

所以要使得 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只须 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$ 就行了。

即有 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$　　所以取 $N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，因为有 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$

$\Rightarrow\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

3：有时找 N 比较困难，这时我们可把 $|x_n-a|$ 适当地变形、放大（千万不可缩小！），若放大后小于 ε，那么必有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

【例3】设 $|q|<1$，证明 $1,q,q^2,\quad,q^{n-1},\quad$ 的极限为0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$。

证明：若 $q=0$，结论是显然的，现设 $0<|q|<1$，对 $\forall\varepsilon>0$，(因为 ε 越小越好，不妨设 $\varepsilon<1$），要使得 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即 $|q|^{n-1}<\varepsilon$，只须两边放对数后，$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$ 成立就行了。因为 $0<|q|<1$，所以 $\ln|q|<0$，所以 $n-1>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\Rightarrow n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$。

取 $N=1+\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，所以当 $n>N$ 时，有 $|q^{n-1}-0|<\varepsilon$ 成立。

二 收敛数列的性质

定理1：（唯一性）数列 x_n 不能收敛于两个不同的极限。

证明：设 a 和 b 为 x_n 的任意两个极限，下证 $a=b$。

由极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0$，必分别 $\exists$ 自然数 N_1,N_2，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon\cdots(1)$

当 $n>N_2$ 时，有 $|x_n-b|<\varepsilon\cdots(2)$ 令 $N=Max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，（1），（2）同时成立。现考虑：

$$|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\le|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

由于 a,b 均为常数 $\Rightarrow a=b$，所以 x_n 的极限只能有一个。

【例 4】证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是发散的。

证明：（反证法）假设 x_n 收敛，由唯一性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，按定义，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon=\frac{1}{2}$，考虑 $|x_{n+1}-x_n|\le|x_{n+1}-a|+|x_n-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，而 x_n，x_{n+1} 总是一个“1”，一个“-1”，所以 $|x_{n+1}-x_n|=1$，所以矛盾，所以 $x_n=(-1)^{n+1}$ 发散。

定理 2.（有界性）若数列 x_n 收敛，那么它一定有界，即：对于数列 x_n，若 $\exists$ 正数 M，对一切 n，有 $|x_n|\le M$。

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义对 $\varepsilon=1$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon=1$，所以当 $n>N$ 时，$|x_n|\le|x_n-a|+|a|<1+|a|$，令 $M=Max\{|x_1|,|x_2|\cdots|x_N|,1+|a|\}$，显然对一切 n，$|x_n|\le M$。

注：本定理的逆定理不成立，即有界未必收敛。例如数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是有界的（$|x_n|\le1$），但数列不收敛。

定理 3（保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0(或a<0)$，那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $x_n>0(或x_n<0)$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 不妨设 $a>0$ 取 $\varepsilon=\frac{a}{2}$ $\exists N$ 当 $n>N$ 时

$|x_n-a|<\frac{a}{2}$ $\quad x_n>a-\frac{a}{2}>0$

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\ge0(或x_n\le0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么 $a\ge0(或a\le0)$

证（反证法）$\{x_n\}$ 从某项 N_1 起有 $x_n\ge0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$

$\therefore\exists N_2,当n>N_2时有x_n<0$；取 $N=\max\{N_1,N_2\}$.当 $n>N$ 时 有 $x_n<0$ 与 $x_n\ge0$ 矛盾

$\therefore a \geq 0$ 类似可证 $x_n \leq 0$ 情形。 **定理 4(收敛数列与子列关系)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限是 a.** 证 设 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 有 $\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$ 取 $K = N$ 当 $k > K$ 时 $n_k > n_K \geq N$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_K} = a$ 证毕	
复习思考题、作业题： 1. 对于某一正数 ε_0, 如果存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon_0$. 是否有 $x_n \to a\ (n\to\infty)$. 2. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界. 发散的数列是否一定无界? 有界的数列是否收敛? 3. 数列的子数列如果发散, 原数列是否发散? 数列的两个子数列收敛, 但其极限不同, 原数列的收敛性如何?发散的数列的子数列都发散吗？ 4. 如何判断数列 $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{N+1}, \cdots$ 是发散的？	
下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第 3 周	课 次	第 1次
章 节 名 称	**§1.3 函数的极限**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1.知识目标：使学生理解函数极限的概念；理解函数左右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。 2. 能力目标：理解和熟练运用函数极限的性质。 3. 素养目标：具备科学的学习态度。 4. **课程思政：**树立追求真理、勇于探索的学术态度。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	重点：函数的定义及性质。 难点：函数极限的定义。		

教学步骤及内容：

一、函数极限的定义

由上节知，数列是自变量取自然数时的函数， $x_n = f(n)$，因此，数列是函数的一种特殊情况。对于函数，自变量的变化主要表现在两个方面：

（1） 自变量 x 任意接近于有限值 x_0，记为 $x \to x_0$，相应的函数值 $f(x)$ 的变化情况。

（2） 当自变量 x 的绝对值 x 无限增大，记 $x \to \infty$，相应的函数值 $f(x)$ 的变化情况。

1、自变量趋向有限值 x_0 时函数的极限

自变量趋于有限值 x_0 时的函数极限可理解为：当 $x \to x_0$ 时， $f(x) \to A$（ A 为某常数），即当 $x \to x_0$ 时， $f(x)$ 与 A 无限地接近，或说 $f(x) - A$ 可任意小，亦即对于预先任意给定的正整数ε（不论多么小），当 x 与 x_0 充分接近时，可使得 $f(x) - A$ 小于ε。用数学的语言说，即

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，**如果存在常数** A，**对**$\forall \varepsilon > 0$（**不论它多么小**），**总** $\exists \delta > 0$，**使得对于适合不等式** $0 < x - x_0 < \delta$**的一切** x **所对应的函数值** $f(x)$ **满足：** $f(x) - A < \varepsilon$，**就称常数** A **为函数** $f(x)$ **当** $x \to x_0$ **时的极限，记为**

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = A，\textbf{或} f(x) \to A \quad （\textbf{当} x \to x_0 \textbf{时}）$$

注 1：“x 与 x_0 充分接近”在定义中表现为： $\exists \delta > 0$，有 $0 < x - x_0 < \delta$，即 $x \in \hat{U}(x_0, \delta)$。

显然δ越小，x 与 x_0 接近就越好，此δ与数列极限中的 N 所起的作用是一样的，它也依赖于ε。一般地，ε越小，δ相应地也小一些。

2：定义中$0<|x-x_0|$表示$x \neq x_0$，这说明当$x \to x_0$时，$f(x)$有无限与$f(x_0)$在x_0点（是否有）的定义无关（可以无定义，即使有定义，与 $f(x_0)$ 值也无关）。

3：几何解释：对$\forall \varepsilon>0$，作两条平行直线$y=A+\varepsilon, y=A-\varepsilon$。由定义，对此$\varepsilon, \exists \delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，且$x \neq x_0$时，有$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$。即函数$y=f(x)$的图形夹在直线$y=A+\varepsilon, y=A-\varepsilon$之间（$f(x_0)$可能除外）。换言之：当$x \in \hat{U}(x_0,\delta)$时，$f(x) \in U(A,\varepsilon)$。从图中也可见$\delta$不唯一！

4、定义的简单表述:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时},\ |f(x)-A|<\varepsilon.}$$

四、 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$ （C 为一常数）

证明：由于$|f(x)-A|=|C-C|=0$ 因此$\forall \varepsilon>0$，可取任一正数δ， 当$0<|x-x_0|<\delta$时，

$$|f(x)-A|=|C-C|=0<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$。

【例 2】证明 $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b \qquad (a \neq 0)$

证明：对$\forall \varepsilon>0$，要使得

$|(ax+b)-(ax_0+b)|=|a(x-x_0)|=|a||x-x_0|<\varepsilon$，只须

$|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$， 所以取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$ 显然当 $|x-x_0|<\delta$时，有 $|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$。

【例 3】 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$ 。

证明：对$\forall \varepsilon>0$，因为 $a \neq 1$, 所以

$$x-1 \neq 0. \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1-x}{3(2x+1)}\right|$$

[此处 $x \to 1$，即考虑 $x_0=1$ 附近的情况，故不妨限制 x 为$0<|x-1|<1$，即 $0<x<2$，

$x \neq 1$]。因为 $2x+1>1, \Rightarrow \left|\dfrac{1-x}{3(2x+1)}\right| < \dfrac{|x-1|}{3}$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon,$ 只须

$\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$，即 $|x-1|<3\varepsilon$。取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$（从图形中解释），当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$。

【例 4】. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

分析: 注意函数在 $x=1$ 是没有定义的, 但这与函数在该点是否有极限并无关系.

当 $x\neq 1$ 时, $|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$. $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-1|<\varepsilon$.

证明: 因为 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

在函数极限的定义中，x 是既从 x_0 的左边（即从小于 x_0 的方向）趋于 x_0，也从 x_0 的右边（即从大于 x_0 的方向）趋于 x_0。但有时只能或需要 x 从 x_0 的某一侧趋于 x_0 的极限。如分段函数及在区间的端点处等等。这样，就有必要引进单侧极限的定义：

定义 2 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，[当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时]，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 这时就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左[右]极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ 或 $f(x-0)=A$。

[$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$]。

定理 1：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$。

【例 5】$\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=-1, \lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=1$，因为 $-1\neq 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在。

【例 6】设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

解：显然 $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} 1=1$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(2x+1)=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$。

2、自变量趋向无穷大时函数的极限

定义 3 **设** $f(x)$ **当** $|x|>a(a>0)$ **时是有定义的，如果存在常数** A **，对** $\forall\varepsilon>0,\exists X(>a)$ **，当** $|x|>X$ **时，有** $|f(x)-A|<\varepsilon$**，就称** A **为** $f(x)$ **当** $x\to\infty$ **时的极限，记为** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ **或** $f(x)\to A$ **（当** $x\to\infty$ **时）。**

注 1：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty),((-\infty,b])$ 上有定义，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x>X(x<-X)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（当 $x\to+\infty$）（$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（当 $x\to-\infty$））。

2：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

3：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，就称 $y=A$ 为 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线（若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，有类似的渐近线）。

【例 7】 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}$，所以要使得 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，只须 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。（即 $y=0$ 是它的水平渐近线）

【例 8】. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

分析: $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$. $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证明: 因为 $\forall\varepsilon>0,\exists X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

直线 $y=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线.

二、函数极限的性质

定理 1 （唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}$ **则极限唯一。**

定理 2（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}$**，那么存在常数** $\mathrm{M}>0$ **和** $\delta>0$**，使得当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时，有** $|f(x)|\le\mathrm{M}$ **。**

证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ $\therefore$ 取 $\varepsilon=1$ $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-\mathrm{A}|<1$$

进而 $|f(x)|=|f(x)-\mathrm{A}+\mathrm{A}|\le|f(x)-\mathrm{A}|+|\mathrm{A}|<1+|\mathrm{A}|$

取 $\mathrm{M}=1+|\mathrm{A}|$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ $|f(x)|\le\mathrm{M}$

定理 3（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ **且** $\mathrm{A}>0$（或 $\mathrm{A}<0$），**那么存在常数** $\delta>0$，**使得当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时，有** $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

证 $\mathrm{A}>0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$

$\therefore$ 取 $\varepsilon=\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|f(x)-\mathrm{A}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$f(x)>\mathrm{A}-\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{\mathrm{A}}{2}>0$，同理可证 $\mathrm{A}<0$ 的情形

定理 $3'$ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ $(\mathrm{A}\ne0)$，**那么就存在着** x_0 **的某一去心邻域** $\mathring{U}(x_0)$ **当** $x\in\mathring{U}(x_0)$ **时，就有** $|f(x)|>\dfrac{\mathrm{A}}{2}$。

推论 如果在 x_0 **的某一去心邻域内** $f(x)\ge0$（或 $f(x)\le0$），**而且** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$，**那么** $\mathrm{A}\ge0$（或 $\mathrm{A}\le0$）。

定理 4(函数极限与数列极限的关系)如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **存在，** $\{x_n\}$ **为函数** $f(x)$ **的定义域内任一收敛于** x_0 **的数列，且满足：** $x_n\ne x_0\,(n\in N_+)$，**那么相应的函数列** $\{f(x_n)\}$ **必收敛，且** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=x_0$ 对 $\delta>0$ $\exists\mathrm{N}$，当 $n>\mathrm{N}$ 有 $|x_n-x_0|<\delta$

$x_n\ne x_0\,(n\in N_+)$ $\therefore$ 当 $n>\mathrm{N}$ 时 $0<|x_n-x_0|<\delta$，$|f(x_n)-\mathrm{A}|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=\mathrm{A}$。

<table>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：
1；2.（1）、（3）、（5）；</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

授课时间	第 4 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	§ 1.4 无穷小与无穷大		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	1.知识目标：掌握无穷小与无穷大的概念，性质及其它们之间的关系。 2. 能力目标：理解和熟练运用无穷小的性质。 3. 素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：** 引导学生形成正确的世界观和价值观，人生观。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	重点：无穷小与无穷大的概念及其性质。 难点：利用无穷小与无穷大概念及其性质求函数的极限。		

教学步骤及内容：

五、无穷小

1、 **定义 如果函数** $f(x)$ **当** $x \to x_0$ $(\text{或} x \to \infty)$ **时的极限为零,那么称函数**

$f(x)$ **为当** $x \to x_0$ $(\text{或} x \to \infty)$ **时的无穷小。**

例如：$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$;

注1° 无穷小不是很小很小的数,也不是零

2° 数零是可作为无穷小的唯一的数，但无穷小不一定都是零。

3° 无穷小是与自变量的某个变化过程相联系的。

2、 无穷小与函数极限的关系

Th1 在自变量的同一变化过程中 $x \to x_0$ $(\text{或} x \to \infty)$ **中,函数** $f(x)$ **具有极限 A 的充分必要条件是**

$f(x) = \mathrm{A} + \alpha$, **其中**$\alpha$**是无穷小。**

证" $\Rightarrow$ "（必要性） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A}$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 有 $f(x) - \mathrm{A} < \varepsilon$

令$\alpha = f(x) - \mathrm{A}$ 则 α是$\left(\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0\right)$ $x \to x_0$时的无穷小

且 $f(x)=\mathrm{A}+\alpha$

"$\Leftarrow$"（充分性）设 $f(x)=\mathrm{A}+\alpha$， $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，由此得 $\alpha=f(x)-\mathrm{A}$

由 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小定义，有

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|\alpha|<\varepsilon$

即 $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{A}$，同理可证 $x\to\infty$ 时的情形

3、无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和仍为无穷小。

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$。记 $\gamma=\alpha+\beta$

$\forall\varepsilon>0$，对 $\frac{\varepsilon}{2}>0$， $\exists\delta_1>0$，$0<|x-x_0|<\delta_1$ $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$ $0<|x-x_0|<\delta_2$ $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|\gamma|=|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0$

注意：无穷多个无穷小的代数和不一定是无穷小。

性质 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

证 设 u 为有界函数，则对一切的 x，有 $|u|\le\mathrm{M}$；设 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，即对 $\forall\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}>0$，

$\exists\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ 成立。从而

$$|u\alpha|=|u||\alpha|<\mathrm{M}\cdot\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}=\varepsilon$$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}u\alpha=0$

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小；

推论 2 有极限的函数与无穷小的乘积是无穷小；

推论 3 有限个无穷的乘积是无穷小；

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$。（解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le1$ $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$）

二. 无穷大

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一处去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义),如果对于任意给定的正数 M **(不论它多么大)，总存在正数 δ(或正数 X),只要适合不等式　$0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$),对应的函数值 $f(x)$ 总满足：$|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷大。**记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$　（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$）。

将定义中 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$ 或 $f(x)<-M$ 得到：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$。

注: 1° 无穷大一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大。

2°　无穷大不是很大的数，而是具有非正常极限的变量。

例 2　证明　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证 ：对 $\forall M>0$　要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$，

取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，于是当 $0<|x-1|<\delta$，总有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$。

直线 $x=1$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线。

一般地，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线。

无穷大与无穷小之间的的关系：

Th2 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

证：以 $x\to x_0$ 为例。设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$。

$\forall\varepsilon>0$，由无穷大的定义，对 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$

时，有 $|f(x)| > \mathrm{M} = \frac{1}{\varepsilon}$， 即 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon \therefore \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

反之，设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ 且 $f(x) \neq 0$

$\forall \mathrm{M} > 0$，根据无穷小的定义，对于 $\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{M}} > 0$，总 $\exists \delta > 0$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有： $|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{M}}$。

由于 $0 < |x - x_0| < \delta$， $f(x) \neq 0$，从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \mathrm{M}$ 。

即 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ 。类似可证 $x \to \infty$ 时的情形。

复习思考题、作业题：

4；6；8

下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 5 周	课　次	第 1次
章　节 名　称	**§1.5　　极限运算法则**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生掌握极限的四则运算法则，并会利用它们求极限。 2.能力目标：理解和熟练运用极限的四则运算法则。 3. 素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**激发学生对中华优秀数学文化的认同感。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：极限的四则运算法则。 难点：有理函数极限的计算。		

—

教学步骤及内容：

由极限定义来求极限是不可取的，也是不行的，因此需寻求一些方法来求极限。为叙述方便，用$\lim$代表 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}$ 。

定理 1 若 $\lim f(x)=\mathrm{A}$ **，** $\lim g(x)=\mathrm{B}$ **，那么**

(1) $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=\mathrm{A}\pm\mathrm{B}$；

(2) $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$；

(3)**若又有** $\mathrm{B}\neq 0$ **则** $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

证(1) $\lim f(x)=\mathrm{A}$，$\lim g(x)=\mathrm{B}$，由 1.3 的 TH1 可得

$f(x)=\mathrm{A}+\alpha$，$\lim\alpha=0$；$g(x)=\mathrm{B}+\beta$, $\lim\beta=0$。

$f(x)+g(x)=(\mathrm{A}+\alpha)+(\mathrm{B}+\beta)=(\mathrm{A}+\mathrm{B})+(\alpha+\beta)$

$\therefore\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\mathrm{A}+\mathrm{B}=\lim f(x)+\lim g(x)$。

（2）因为$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，$\Rightarrow f(x)=A+\alpha,$

$g(x)=B+\beta,$（α,β均为无穷小）

$\Rightarrow f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$，记

$\gamma = A\beta + B\alpha + \alpha\beta$, $\Rightarrow \gamma$为无穷小， $\Rightarrow \lim f(x)g(x) = AB$ 。

（3）由 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ ，有

$f(x) = A + \alpha$, $g(x) = B + \beta$,（α,β均为无穷小）

令$\gamma = \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B}$，则$\gamma = \dfrac{A+\alpha}{B+\beta} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha - A\beta)$

其中 $B\alpha$- $A\beta$为无穷小，下证 $\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在点 x_0 的某一邻域内有界。

根据第三节定理 3，由于 $\lim g(x) = B \neq 0$，存在点 x_0 的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x \in \mathring{U}(x_0)$时，$|g(x)| > \dfrac{|B|}{2}$，从而$\left|\dfrac{1}{g(x)}\right| < \dfrac{2}{|B|}$，于是

$$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right| = \frac{1}{|B|} \cdot \left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{1}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|} = \frac{1}{|B|^2}$$

所以 $\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在点 x_0 的去心邻域$\mathring{U}(x_0)$ 内有界。

所以γ为无穷小，而 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} + \gamma$，由上节定理 1 可得

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$ 证毕

注1° (1)，(2)可推广到有限多个。

推论 1：$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$（c 为常数）。

推论 2：$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数）。

对于数列也有类似的定理

定理 2 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$；

(3)当 $y_n \neq 0$ (n=1, 2, · · ·)且 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

定理 3 如果$\varphi(x)\ge\phi(x)$，而$\lim\varphi(x)=a$，$\lim\phi(x)=b$，那么$a\ge b$。

证 令$f(x)=\varphi(x)-\phi(x)$，则$f(x)\ge 0$

$$\therefore \lim f(x)=\lim[\varphi(x)-\phi(x)]=\lim\varphi(x)-\lim\phi(x)=a-b\ge 0$$

$$\therefore a\ge b$$

【例 1】$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-4x+1)$。 （$-1$）

【例 2】求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}.$$

一般地，设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_{n-1}x+a_n$ 为一多项式，当

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\quad+a_{n-1}x_0+a_n=f(x_0)。$$

对于有理函数 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,其中 $P(x),Q(x)$ 均为多项式， $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的求法如下：

1） 若$Q(x_0)\ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0)$；

2） 若$Q(x_0)=0$，商的极限法则不能直接应用：

1 若$P(x_0)\ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{Q(x_0)}{P(x_0)}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\infty$；

② 若$P(x_0)=0$，则先约去公因子 $x-x_0$，再用上述方法求极限。

【例 3】求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$。

解：由于$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$,但$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1\ne 0$,所以

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-1}=0$，由无穷大与无穷小的关系可得原极限等于$\infty$。

【例 4】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解: 先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

【**例 5**】. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解: 先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

【**例 6**】. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$.

讨论: 有理函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\quad+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\quad+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & 当n=m时\\ 0 & 当n>m时\\ \infty & 当n<m时\end{cases}$$

其中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m, n$ 为自然数。

【例 7】已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求 a,b 的值。

解：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{25x^2-(ax^2-bx+c)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x})}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2$$

必有 $25-a=0$ 且 $\frac{b}{5+\sqrt{a}}=2$，解得 $a=25, b=20$。

定理 4 (复合函数的极限运算法则) 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成, $f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $g(x)\to u_0(x\to x_0)$, $f(u)\to A(u\to u_0)$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A.$$

简要证明 设在$\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$内 $g(x)\neq u_0$.

要证$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$.

因为 $f(u)\to A(u\to u_0)$, 所以$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$, 当 $0<|u-u_0|<\eta$时, 有$|f(u)-A|<\varepsilon$.

又 $g(x)\to u_0(x\to x_0)$, 所以对上述$\eta>0, \exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有$|g(x)-u_0|<\eta$.

取$\delta=\min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$时, $0<|g(x)-u_0|<\eta$, 从而
$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$.

注:

把定理中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$,

而把 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$ 可类似结果.

把定理中 $g(x)\to u_0(x\to x_0)$换成 $g(x)\to\infty(x\to x_0)$或 $g(x)\to\infty(x\to\infty)$,
而把 $f(u)\to A(u\to u_0)$换成 $f(u)\to A(u\to\infty)$可类似结果.

例如

【例 8 】 求$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$.

解 $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 复合而成的.

因为$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$, 所以$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$.

复习思考题、作业题:

1、单号; 2、(1)、(3)。

下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第　6　周	课　次	第 1 次		
章　节 名　称	**§1.6　极限存在准则　两个重要极限**				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限。 2.能力目标：理解和熟练运用极限存在的两个准则。 3. 素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**树立“实践出真知”的认知理念。				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：极限存在准则以及利用两个重要极限求极限。 难点：利用两个重要极限求极限。				

教学步骤及内容：

准则 Ⅰ：如果数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足下列条件：

（1）**从某项起，即存在** $n_0 \in N$，**当** $n > n_0$**时，** $y_n \le x_n \le z_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

那么，数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证明： 因为$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，所以对$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$，当 $n > N_1$时，有 $|y_n - a| < \varepsilon$，即 $a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$； 又$\exists N_2$， 当$n > N_2$时， 有 $|z_n - a| < \varepsilon$，即$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$， 又因为 $y_n \le x_n \le z_n$，所以当 $n > N = Max\{n_0, N_1, N_2\}$时，有 $a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$，即有：$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$，即 $|x_n - a| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

上述数列的极限也可以推广到函数的极限：

准则 Ⅰ′ 如果函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足下列条件：

（i） 当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$（或$x > M$）时，有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$。

（ii） 当$x \to x_0\ (x \to \infty)$时，有 $g(x) \to A, h(x) \to A$。

那么当 $x \to x_0\ (x \to \infty)$时，$f(x)$的极限存在，且等于 A。

准则 Ⅰ 及准则 Ⅰ′ 称为夹逼准则.下面根据准则 Ⅰ′证明**第一个重要极限：** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$。

证明　首先注意到，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x\neq 0$ 都有定义．参看附图：图中的圆为单位圆，$BC\perp OA$，$DA\perp OA$．圆心角 $\angle AOB=x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$．显然 $\sin x=CB$，$x=\overset{\frown}{AB}$

$\tan x=AD$．因为

$$S_{\Delta AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\Delta AOD},$$

所以

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即　$\sin x<x<\tan x$.

不等号各边都除以 $\sin x$，就有　$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$，

或　$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

（因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以上不等式不改变方向）；当 x 改变符号时，$\cos x$，$\frac{x}{\sin x}$ 及 1 的值均不变，故对满足 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 的一切 x，有 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$。

因为 $\cos x=1-(1-\cos x)=1-2\sin^2(\frac{x}{2})>1-2\cdot\frac{x^2}{4}=1-\frac{x^2}{2}$，

所以　$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1$　　$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$　　$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，证毕。

【例 1】．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

【例 2】．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$

【例 3】$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\tan x}\overset{x=\pi+t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{\tan(\pi+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{\tan t}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{t}{\tan t}=-1$

准则Ⅱ：单调有界数列必有极限。

如果数列 x_n 满足：$x_1\leq x_2\leq\quad\leq x_n\leq$　，就称之为单调增加数列；若满足：$x_1\geq x_2\geq\quad\geq x_n\geq$　，就称之为单调减少数列；同理亦有严格单增或单减，以上通称为单减

数列和严格单减数列。

如果 $\exists M$，使得：$x_n \le M\,(n=1,2,\quad)$，就称数列 x_n 为有上界；若 $\exists M$，使得：

$x_n \ge M\,(n=1,2,\quad)$，就称$\{x_n\}$有下界。

准则Ⅱ′：单调上升，且有上界的数列必有极限。
准则Ⅱ″：单调下降，且有下界的数列必有极限。

注　1：由前已知，有界数列未必有极限，若加单调性，就有极限。
2：准则Ⅱ，Ⅱ′，Ⅱ″可推广到函数情形中去，在此不一一陈述了。

第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

作为准则Ⅱ的一个应用，下面来证明极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

先考虑 x 取正整数时的情形：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，下证数列$(1+\frac{1}{n})^n$ 单调有界。

证法 1：对于$b>a>0$，有不等式：$\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$，即：

$b^{n+1}-a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a)$，即：$a^{n+1} > b^n[(n+1)a-nb]$

a) 现令$a=1+\dfrac{1}{n+1}, b=1+\dfrac{1}{n}$，显然$b>a>0$，因为

$(n+1)a-nb = n+1+1-(n+1)=1$将其代入，所以

$(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\dfrac{1}{n})^n$，所以 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为单调数列。

又令$a=1$，$b=1+\dfrac{1}{2n}$，

$$(n+1)a-nb = n+1-(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

所以$1>(1+\dfrac{1}{2n})^n\cdot\dfrac{1}{2}$　　$\Rightarrow 2>(1+\dfrac{1}{2n})^n \Rightarrow 4>(1+\dfrac{1}{2n})^{2n}$，

即对$\forall n, x_{2n}<4$，　又对任意　$(1+\dfrac{1}{2n+1})^{2n+1} < (1+\dfrac{1}{2n+2})^{2n+2} < 4$

所以$\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$是有界的。

证法 2 按牛顿二项公式，

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$
比较 x_n， x_{n+1} 的展开式, 可以看出除前两项外, x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项, 并且 x_{n+1} 还多了最后一项, 其值大于 0, 因此

$$x_n<x_{n+1},$$

这就是说数列$\{x_n\}$是单调的.

这个数列同时还是有界的. 因为 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替, 得

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

这表明数列$\{x_n\}$是单调有界的.

由准则 II 或 II′ 知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在，并使用 e 来表示，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.718281828459045$

注 1：关于此极限存在性的证明，书上有不同的方法，希望同学自己看！

2：我们可证明：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，具体在此不证明了，利用变量代换还可以得到这一极限的一般形式：

$$\lim_{h(x)\to+\infty}(1+\frac{1}{h(x)})^{h(x)}=e;\quad 或\quad \lim_{g(x)\to0}(1+g(x))^{1/g(x)}=e$$

3：指数函数 $y=e^x$ 及自然对数 $y=\ln x$ 中的底就是这个常数e。

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解: 令 $t=-x$, 则 $x\to\infty$时, $t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{e}.$$

或 $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x(-1)}=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}.$$

【例 5】 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{z=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{z\to\infty}(1+z)^z=e$

相应于准则Ⅱ，函数也有类似的准则，例如当 $x \to x_0^-$ 时有

准则：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在。

柯西极限存在准则：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的整数 ε，存在这样的正整数 N，使得当 $m>N, n>N$ 时，就有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon。$$

练习：1、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}(1-\frac{1}{x}) = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}) = e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e}$

2、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2-x}{3-x})^{x}$。解：令 $\frac{2-x}{3-x} = 1+\frac{1}{u}$，解得 $x=u+3$，所以

原式 $\overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u+3} = \lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\cdot(1+\frac{1}{u})^{3} = e$。

3、证明 数列 $\sqrt{2}$,$\sqrt{2+\sqrt{2}}$,$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 的极限存在

证 (1) 先证有界性， 当n= 1时 $x_1 = \sqrt{2} < 2$

假设n=R时 $x_n < 2$， 当n=R时 $x_{n+1} < \sqrt{2+x_n}$

$x_{n+1} < \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$，$x_n < 2$ 数列 $\{x_n\}$ 有界

(2)单调性

$$x_{n+1}-x_n = \sqrt{2+x_n} - x_n = \frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n} = \frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n} > 0$$

$\therefore x_{n+1} > x_n$ 数列 $\{x_n\}$ 单调增加，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n}$

$a=\sqrt{2+a}$ $a^2-a-2=0$，$(a-2)(a+1)=0$ $a=2$

小结：极限的运算法则，极限存在的准则，两个重要极限。

复习思考题、作业题：

1、单号 2、双号 3、（1）、（3）（5）

下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第　7 周	课　次	第 1次		
章　节 名　称	**§ 1.7 无穷小的比较**				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。 2.能力目标：理解和熟练运用无穷小的比较方法。 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4.**课程思政：**引导学生形成正确的世界观和价值观，人生观。				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：用等价无穷小求极限。难点：用等价无穷小求极限。				

教学步骤及内容：

在第三讲中我们讨论了无穷小的和、差、积的情况，对于其商会出现不同的情况，例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\lim_{x\to 0}x^{n-m}\cdot\frac{a_0}{b_0}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m<n\\ \infty & m>n\end{cases}$$ （a_0, b_0为常数， m, n为自然数）

可见对于 m, n 取不同数时， a_0x^n 与 b_0x^m 趋于 0 的速度不一样，为此有必要对无穷小进行比较或分类：

定义：设α与β为 x 在同一变化过程中的两个无穷小，且$\alpha\neq 0$ 。

3） 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

4） 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

5） 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，，就说$\beta$是比$\alpha$同阶的无穷小；

6） 如果 $\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0\left(k>0\right)$, 就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小

7） 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$。

（i） 当$x\to 0$时，x^2是 x 的高阶无穷小，即 $x^2=o(x)$；反之 x 是 x^2 的低阶无穷小；

x^2 与$1-\cos x$ 是同阶无穷小； x 与 $\sin x$ 是等价无穷小。

注 1、高阶无穷小不具有等价代换性，即：$x^2=o(x), x^2=o(\sqrt{x})$，但

$o(x)\neq o(\sqrt{x})$，因为$o(\cdot)$不是一个量，而是高阶无穷小的记号；

2、显然等价无穷小是同阶无穷小的特殊情况$c=1$；

3、等价无穷小具有传递性：即$\alpha\sim\beta, \beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$;

4、未必任意两个无穷小量都可进行比较，例如：当 $x\to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$与 x^2 既非同阶，又无高低阶可比较，因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}$不存在；

5、用等价无穷小可以简化极限的运算，事实上，有：

定理 1　β与α是等价无穷小的充分必要条件是$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

证明：必要性 $\alpha\sim\beta$，则 $\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0$，

充分性：$\beta=\alpha+o(\alpha)$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=1$。

定理 2：设$\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$，若$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$。

证：$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim(\frac{\beta}{\beta'}\frac{\beta'}{\alpha'}\frac{\alpha'}{\alpha})=\lim\frac{\beta}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

（ii）　　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$。

解：因为当 $x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/2x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$。

（iii）　　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x^2+2x}$；$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x\left(x^2+3\right)}=\frac{1}{3}$。

解：因为当 $x\to 0$时，$\arcsin 2x\sim 2x$，

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x+2}=\frac{2}{2}=1$。

6、在目前，常用当 $x\to 0$ 时，等价无穷小有：

$\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；等

7、用等价无穷小代换适用于乘、除，对于加、减须谨慎！

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

复习思考题、作业题： 4
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　8 周	课　次	第 1次
章　节 名　称	**§ 1.8　函数的连续性与间断点**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生理解函数连续性的概念，会判断函数间断点的类型。 2.能力目标：理解和熟练判断函数间断点的类型。 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**培养脚踏实地、持之以恒的学习态度		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：分段函数在分界点处的连续性，应用函数的连续性求函数的极限。 难点：分段函数在分界点处的连续性以及闭区间连续函数的性质。		

教学步骤及内容：

6、函数连续性的概念

连续性是函数的重要性态之一，在实际问题中普遍存在连续性问题，例如空气或水的流动，气温的变化，国民收入的连续增长等。从图形上看，函数的图象是一条连绵不断曲线。这种现象反映到数学的函数关系上，就是函数的连续性。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，当自变量由 x_0 变到 x 时，对应的函数值从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x)$，这时称 $x-x_0$ 为自变量的增量，$f(x)-f(x_0)$ 为函数的增量，分别记为：

$\Delta x=x-x_0$（Δx 可正、可负、也可为零，这些取决于 x 与 x_0 的大小）

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

定义 1：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋向于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \qquad (1)$$

就称 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点。

由于 $\Delta x=x-x_0$ 即 $x=x_0+\Delta x$，

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 且当 $\Delta x\to 0$ 时 $x\to x_0$，所以（1）可以写为：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，所以有

定义$1'$：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在，且此极限值就等于他在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，就称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续。

定义$1'$：设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

注 1、$f(x)$ 在 x_0 点连续，不仅要求 $f(x)$ 在 x_0 点有意义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，而且要 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，即极限值等于函数值。

定义 2 若 $\lim\limits_{x\to x_0 -} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0 +} f(x) = f(x_0^+) == f(x_0)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

易证，$f(x)$ 在 x_0 点连续$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点既左连续，又右连续。

【例 1】证明函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处是连续的。

证明：由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$，又 $f(0) = 0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$，所以 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处是连续的。

下面给出区间内连续的定义：

定义 3 如果 $y = f(x)$ 在(a, b) 内每一点都连续，就称 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续；也称 $f(x)$ 为区间 (a, b) 内的连续函数；如果 $y = f(x)$ 在(a, b) 内连续，且在 $x = a$ 右连续，在 $x = b$ 左连续，则称 $f(x)$ 为闭区间$[a, b]$ 内的连续函数。

第四节我们证明任意多项式函数 $f(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，所以多项式函数在$(-\infty, +\infty)$ 上是连续的；有理函数在分母不等于零的点处是连续的，即在定义域内是连续的。

【例 2】证明 $y = \sin x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$ 内是连续的。

证明　任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，当自变量有增量 Δx 时，对应的函数的增量为 $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x + \dfrac{\Delta x}{2})$

由于 $\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1$，$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le\frac{\Delta x}{2}$，于是

$$0\le|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le|\Delta x|$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $y=\sin x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是连续的。

类似可证 $y=\cos x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$ 内是连续的。

练习：证明 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 点连续。

二、函数的间断点

定义 4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一领域内有定义，如果 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，就称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，或不连续点。

间断点有下列三种情况：

（1） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 有定义， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(x_0)$。

【例 1】. 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$处没有定义, 所以点 $x=\frac{\pi}{2}$是函数 $\tan x$ 的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$, 故称 $x=\frac{\pi}{2}$为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

【例 2】. 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 没有定义, 所以点 $x=0$ 是函数$\sin\frac{1}{x}$的间断点。当 $x\to 0$ 时, 函数值在-1 与$+1$ 之间变动无限多次, 所以点 $x=0$ 称为函数$\sin\frac{1}{x}$的振荡间断点.

【例 3】. 函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 没有定义, 所以点 $x=1$ 是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, 如果补充定义: 令 $x=1$ 时 $y=2$, 则所给函数在 $x=1$ 成为连续. 所以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点.

【例 4】. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x & x\neq 1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$.

因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1, f(1)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$, 所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$的间断点. 如果改变函数$f(x)$在 $x=1$ 处的定义:令 $f(1)=1$, 则函数 $f(x)$在 $x=1$ 成为连续, 所以 $x=1$ 也称为该函数的可去间断点.

【例 5】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在, $x=0$ 是函数 $f(x)$的间断点. 因函数 $f(x)$的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象, 我们称 $x=0$ 为函数 $f(x)$的跳跃间断点.

根据以上例子，通常函数的间断点可分为两类：如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左右极限都存在，就称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，否则就称为第二类间断点。

第一类间断点又分为如下两种情况：

1）如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在但不相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**；

2）如果 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，但不等于该点处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$；或者极限存在，但函数在该点处无定义，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**。

例如：1. $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in Q \\ 1 & x\notin Q \end{cases}$ $\forall x$ 均为振荡间断点。（狄利克雷函数）

2、$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q} \\ 0 & x=0,1\text{或无理数} \end{cases}$ 在有理点处不连续，在无理点处连续（黎曼函数）。

复习思考题、作业题：

2；3.（1）、（3）

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　9 周	课　次	第 1 次
章　节 名　称	**§ 1.9　连续函数的运算与初等函数的连续性**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生掌握连续函数的运算性质和初等函数的连续性； 2.能力目标：应用函数的连续性求函数的极限 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**引导学生形成正确的世界观和价值观，人生观。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：应用函数的连续性求函数的极限。 难点：应用函数的连续性求函数的极限。		

教学步骤及内容：

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 1(连续函数的四则运算法则)：若 $f(x), g(x)$ 均在 x_0 连续，则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（要求 $g(x_0) \neq 0$）都在 x_0 连续。

利用极限的四则运算即可证明。

二、反函数和复合函数的连续性

定理 2（反函数的连续性）：如果 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调增加（或严格单调减少）且连续，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上严格单调增加（或严格单调减少）且连续。

例 1. 由于 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续, 所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续的.

同样,$y=\arccos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上也是单调减少且连续; $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加且连续;$y=\text{arccot}\, x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少且连续.

总之, 反三角函数 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\text{arccot}\, x$ 在它们的定义域内都是连续的.

定理 3　设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成, $\mathring{U}(x_0) \subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 u_0 连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0).$$

简要证明　要证 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f[g(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$.

因为 $f(u)$在u_0连续, 所以$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$, 当$|u-u_0|<\eta$时, 有$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$.

又 $g(x)\to u_0(x\to x_0)$, 所以对上述 $\eta>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 有 $|g(x)-u_0|<\eta$. 从而 $|f[g(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$.

(2)定理的结论也可写成 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)]$. 求复合函数 $f[g(x)]$的极限时, 函数符号 f 与极限号可以交换次序.

$\lim\limits_{x\to x_0} f[u(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ 表明,在定理 3 的条件下, 如果作代换 $u=g(x)$,那么求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$ 就转化为求 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, 这里$u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

把定理 5 中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$, 可得类似的定理.

例 2. 求$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$.

提示:

$y=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\frac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成的.

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$, 函数 $y=\sqrt{u}$ 在点$u=\frac{1}{6}$连续. $=g(x_0)$

定理 4　设函数 $y=f[g(x)]$由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成, $U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$在点 x_0 连续, 函数 $y=f(u)$在点 $u_0=g(x_0)$连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 也连续.

证明: 因为$\varphi(x)$在点 x_0 连续, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$.

又 $y=f(u)$在点 $u=u_0$ 连续,　　所以　$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$.

这就证明了复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 连续.

例 3. 讨论函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

解: 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 是由 $y=\sin u$ 及 $u=\frac{1}{x}$ 复合而成的.　$\sin u$ 当$-\infty<u<+\infty$时是连续的, $\frac{1}{x}$ 当$-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$时是连续的,

根据定理 4, 函数$\sin\frac{1}{x}$在无限区间$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$内是连续的.

三、初等函数的连续性

在基本初等函数中,　　我们已经证明了三角函数及反三角函数的它们的定义域内是连续的.

我们指出, 指数函数 a^x $(a>0, a\neq 1)$对于一切实数 x 都有定义,且在区间$(-\infty, +\infty)$内是单调的和连续的, 它的值域为$(0, +\infty)$.

由定理 4, 对数函数 $\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$作为指数函数 a^x 的反函数在区间$(0, +\infty)$内单调且连续.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随μ的值而异, 但无论μ为何值, 在区间$(0, +\infty)$内幂函数总是有定义的.可以

证明, 在区间$(0,+\infty)$内幂函数是连续的. 事实上, 设 $x>0$, 则 $y=x^{\mu}=a^{\mu\log_a x}$, 因此, 幂函数 x^{μ}可看作是由 $y=a^u$, $u=\mu\log_a x$ 复合而成的, 由此, 根据定理 6, 它在$(0,+\infty)$内是连续的.如果对于μ取各种不同值加以分别讨论, 可以证明幂函数在它的定义域内是连续的.

结论: **基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.**

最后, 根据初等函数的定义, 由基本初等函数的连续性以及本节有关定理可得下列重要结论: **一切初等函数在其定义区间内都是连续的.** 所谓定义区间, 就是包含在定义域内的区间.

初等函数的连续性在求函数极限中的应用:

如果 $f(x)$是初等函数, 且 x_0 是 $f(x)$的定义区间内的点,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例 4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$.

解: 初等函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在点 $x_0=0$ 是有定义, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1$

例 5 求下列函数极限。

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln\arcsin x=\ln\arcsin\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{\pi}{6}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)}=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.（令 $t=a^x-1, x=\log_a(1+t)$, 当$x\to 0$时 $t\to 0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$ ）

特别地 $a=e$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$（由（3）可知），$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，于是，当 $x\to 0$ 时，

$\ln(1+x)\quad x; e^x-1\quad x$。

复习思考题、作业题:

求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 10 周	课 次	第 1 次		
章 节 名 称	**§1.10 闭区间上连续函数的性质**				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1.知识目标：使学生了解连续函数的性质。 2.能力目标：能熟练应用连续函数的性质。 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4.**课程思政：**学习数学家克服困难，坚持不懈的精神。				
教 学 方 法	讲授				
教 学 重 点 难 点	重点：最值定理、零点定理、介值定理。 难点：零点定理、介值定理。				

教学步骤及内容：

一、有界性与最值定理

定义 1 $f(x)$ 在 I 上有定义，若有 $x_0 \in I$ 使 $\forall x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0)(\text{或} f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（最小值）。

例如, 函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间$[0, 2\pi]$上有最大值 2 和最小值 0. 又如, 函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内有最大值 1 和最小值-1. 在开区间$(0, +\infty)$内, $\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都是 1. 但函数$f(x)=x$ 在开区间(a, b)内既无最大值又无最小值.

定理 1(有界性与最小值最大值定理)在闭区间上连续函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值。

定理 1 说明, 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 那么至少有一点$\xi_1\in[a, b]$, 使 $f(\xi_1)$是 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值, 又至少有一点$\xi_2\in[a, b]$, 使 $f(\xi_2)$是 $f(x)$在$[a, b]$上的最小值.

注意：闭区间，连续函数，二者缺一不可。例如 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内连续，它在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内却无最大值与最小值。

二、零点定理与介值定理

零点: 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$的零点.

定理 2（零点定理）设函数 $f(x)$在闭区间上连续，且 $f(a)$与$f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间（a,b）内至少有一点ξ使$f(\xi)=0$。

定理 3(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续， 且在这区间的端点取不同的函数值

$f(a)=A \quad f(b)=B$ **,那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C， 在开区间（a,b） 内至少有一点**

ξ 使 $f(\xi)=c(a<\xi<b)$ 。

证：设 $\varphi(x)=f(x)-c$ 　不妨设 $A<C<B$

①$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

②$\varphi(a)=f(a)-c=A-C<0 \quad \varphi(b)-C=B-C>0$

$\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 　又 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$

即得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$

推论　在闭区间上连续函数必取得最大值与最小值之间的任何值。

【例 1】. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间（0, 1）内至少有一个根.

证　设 $f(x)= x^3-4x^2+1$

① $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续　； $f(0)=1>0 \quad f(1)=-2<0$

$\therefore$ 至少 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$

$\therefore x^3-4x^2+1=0$ 　在（1，0）内至少有一根 ξ

【例 2】证明方程 $4x=2^x$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内至少有一根。

证明：　设 $f(x)=4x-2^x$，显然 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上连续，且

在 $f(0)=-1<0, f(\frac{1}{2})=2-\sqrt{2}>0$,所以由零点定理，至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=0$，即 $4\xi=2^{\xi}$。

三、一致连续性（自学　P72）

练习：

1、证明方程 x=asinx+b(a>0,b>0)至少有一个不超过 a+b 的正根

证　　设 f(x)=x-asinx-b

〈1〉 $f(x)$ 在[0，a+b]上连续

〈2〉 $f(0)=-b \quad f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\ge 0$

若$f(a+b)=0$　则$a+b$为$x=a\sin x+b$的一正根

若$f(a+b)>0$　$f(0)f(a+b)<0$

则至少存在一点$\xi\in(0,a+b)$使$f(\xi)=0$

即　$\xi-a\sin\xi-b=0$

$\therefore\xi$为$x=a\sin x+b$的一正根

2 若设$f(x)$在$[a,b]$上连续, a<x<x_2　<x_n<b, 则(x_1,x_n)内至少

有一点ξ使$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\quad f(x_n)}{n}$

证　设$f(x)$在$[x_1x_n]$上最大值为M, 最小值为m

则$m\le f(x_1)\le \mathrm{M}, m\le f(x_2)\le \mathrm{M},\quad ,m\le f(xn)\le \mathrm{M}$

$nm\le f(x_1)+f(x_2)+\quad +f(xn)\le n\mathrm{M}$

$\therefore m\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\quad +f(xn)}{n}\le n$

$\therefore$至少存在一点$\xi\in(x_1,x_n)$使

$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\quad +f(xn)}{n}$　　　证毕

思考题：若$f(x)$在x_0连续，则$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0是否连续？又若$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0连续，$f(x)$在x_0是否连续？

解：反之不成立，例如$f(x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$。

复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第　11　周	课　次	第 1 次
章　节 名　称	**§ 2.1　导数的概念**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：使学生掌握导数定义的两种形式；左、右导数的概念掌握导数几何意义,会求曲线的切线方程 2.能力目标：理解函数的可导性与连续性之间的关系 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**激发学生对中华优秀数学文化的认同感。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：导数的定义 难点：导数的定义以及可导性与连续性之间的关系		

教学步骤及内容：

一、导数的概念

1、引例。为了给出导数的概念，我们先看下面两个问题。

1）变速直线运动的瞬时速度问题：

一质点作直线运动，位移和时间 t 的关系为 $s=s(t)$，求时刻 $t=t_0$ 的速度。

若质点作匀速直线运动，在Δt 时间内走过的路程为Δs，速度为$v=\Delta s/\Delta t$；

若质点作变速直线运动，设在t_0时刻质点的位置为 $s(t_0)$，$t_0+\Delta t$ 时刻质点的位置为 $s(t_0+\Delta t)$，则在Δt 时间内走过的路程为：

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

从而质点在∇t 时间内平均速度：$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

特别地，当$\Delta t\to 0$ 时，$\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\to$常数 v，那么v必为t_0点的瞬时速度，此时，

$$v=\lim_{\nabla t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

2）切线问题

圆的切线可定义为“与曲线只有一个交点的直线”。但是对于其它曲线，用“与曲线只有一个交点的直线”作为切线的定义就不一定合适。例如，对于抛物线 $y=x^2$，在原点O处两个坐标轴都符合上述定义，但实际上只有 x 轴是该抛物线在点O 处的切线。下面给出切线的定义。

设有曲线C及C上的一点 M（图 2-1），在点 M 外另取C上一点 N，作割线 MN。当点 N沿曲线C趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，直线 MT 就称为曲线C在点 M 处的切线。这里极限位置的含义是：只要弦长 $|MN|$ 趋于零，$\angle NMT$ 也趋于零。

现在就曲线C为函数 $y = f(x)$的图形的情形来讨论切线问题。设$M(x_0, y_0)$是曲线C上的一个点（图 2-2），则 $y_0 = f(x_0)$。根据上述定义要定出曲线C在点 M 处的切线，只要定出切线的斜率就行了。为此，在点 M 外另取C上的一点 $N(x, y)$，于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

其中φ为割线 MN 的倾角。当点N沿曲线C趋于点 M 时，$x \to x_0$。如果当 $x \to x_0$时，上式的极限存在，设为 k，即

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则此极限 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率。这里 $k = \tan\alpha$，其中α是切线 MT 的倾角。于是，通过点 $M(x_0, f(x_0))$且以k 为斜率的直线 MT 便是曲线C 在点 M 处的切线。事实上，由$\angle NMT = \varphi - \alpha$以及 $x \to x_0$时$\varphi \to \alpha$，可见 $x \to x_0$时（这时 $|MN| \to 0$），$\angle NMT \to 0$。因此直线 MT 确为曲线C在点 M 处的切线。

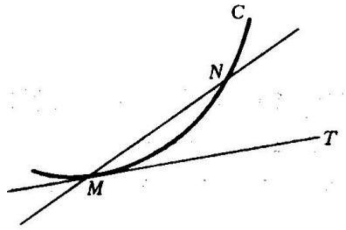


图 2-1

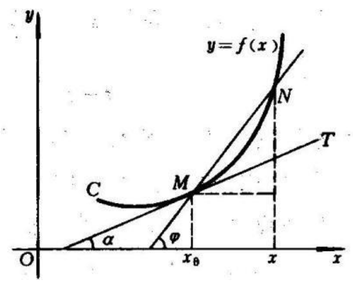


图 2-2

我们撇开这些量的具体意义，抓住它们在数量关系上的共性给出导数的概念。

2、定义 **设函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y = f(x)$在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$在点 x_0 处的导数，记为 $y'\big|_{x=x_0}$，即**

$$y'\big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad ③$$

也可记作 $f'(x_0)$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$。

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在。

注 1、导数的常见形式还有：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};\quad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

2、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映的是曲线在$[x_0,x]$上的平均变化率，而 $f'(x)=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 是在点 x_0 的变化率，它反映了函数 $y=f(x)$ 随 $x\to x_0$ 而变化的快慢程度。

3、这里 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 与 $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 中的 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{df}{dx}$ 是一个整体记号，而不能视为分子 dy 或 df 与分母 dx，待到后面再讨论。

4、若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，就称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不可导。特别地，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$，也可称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数为∞，因为此时 $y=f(x)$ 在 x_0 点的切线存在，它是垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$。

5、$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $y=f'(x)$ 在 $x=x_0$ 点的值，不要认为是 $[f(x_0)]'$。

左导数：$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

右导数：$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的左、右导数均存在且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。

若 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处均可导，就称 $y=f(x)$ 在 I 内可导，且对$\forall x\in I$，均有一导数值 $f'(x)$，这时就构造了一新的函数，称之为 $y=f(x)$ 在 I 内的导函数，记为 $y=f'(x)$，或 y'，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{df(x)}{dx}$ 等。

事实上，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，

如果函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上可导。

【例1】 求 $y=c$ (c为常数)的导数

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}=0$

$\therefore c'=0$ (常数的导数等于零)

【例2】求函数 $f(x)=x^n$ 在 $x=a$ 的导数。

解 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\quad+a^{n-1})=na^{n-1}$

把上面结果中 a 换成 x，得：$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$

一般地 $y=x^{\mu}$，$\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$。例如($\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$。

【例3】求 $f(x)=a^x$ （a>0,a不等于1）导数。

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$

令 $t=a^h-1$，$h=\log_a(1+t)$，且当 $h\to 0$ 时，$t\to 0$。由此

$\lim\limits_{h\to o}\dfrac{a^h-1}{h}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1}{\log_a e}=\ln a$

所以 $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\left(e^x\right)'=e^x$。

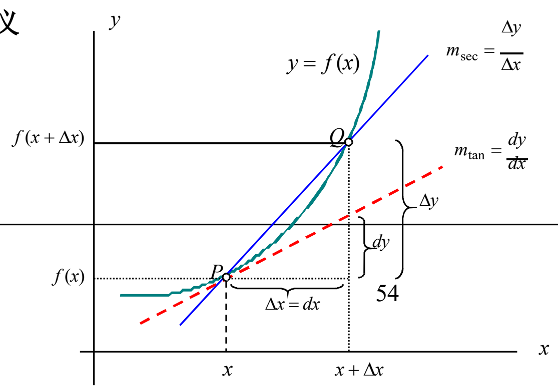
【例4】求 $f(x)=\sin(x)$的函数

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$

$\therefore(\sin x)'=\cos x$ $\qquad(\cos x)'=-\sin x$

二、导数的几何意义



$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\tan\alpha$$

$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点M（x_0，$f(x_0)$）处的切线的斜率。

切线方程　　　　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程　　　　$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

如果 $f'(x_0)$=0，法线方程为 $x=x_0$ 。

【例 5】 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点$(\dfrac{1}{2}, 2)$处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解: $y'=-\dfrac{1}{x^2}$，所求切线及法线的斜率分别为

$$k_1=(-\frac{1}{x^2})\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4，k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4}.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $4x+y-4=0$.

所求法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$, 即 $2x-8y+15=0$.

【例 6】 求曲线 $y=x\sqrt{x}$ 的通过点(0, −4)的切线方程.

解 设切点的横坐标为 x_0, 则切线的斜率为

$$f'(x_0)=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线的方程可设为

$$y-x_0\sqrt{x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x-x_0).$$

根据题目要求, 点(0, −4)在切线上, 因此

$$-4-x_0\sqrt{x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(0-x_0),$$

解之得 $x_0=4$. 于是所求切线的方程为

$$y-4\sqrt{4}=\frac{3}{2}\sqrt{4}(x-4)，即 3x-y-4=0.$$

三、函数的可导性与连续性之间的关系

定理　如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，那么在该点必连续。

证明：由条件知：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$是存在的，其中$\Delta x=x-x_0$,，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，由具有极限的函数与无穷小的关系，得

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$ （α为无穷小）$\Rightarrow \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$

显然当$\Delta x\to 0$时，有$\Delta y\to 0$，函数 $y=f(x)$在$x=x_0$点连续，证毕。

本定理的逆定理不成立，即连续未必可导。例如

（1） 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续, 但在点 x=0 处不可导. 这是因为函数在点 x=0 处导数为无穷大

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=+\infty .$$

（2） $y=|x|$在$x=0$点连续，但不可导。

解 $f(0)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ $x=0$连续；

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

$\therefore$ $f'(0)$不存在 $f(x)$在$x=0$不可导

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教 学 后 记

授课时间	第 12 周	课 次	第 1 次		
章 节 名 称	§2.2 导数的求导法则				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1.知识目标：使学生掌握函数的和、差、积、商的求导法则，反函数的导数法则、复合函数的求导法则； 2. 能力目标： 熟练掌握初等函数的求导公式。 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4. **课程思政：**树立正确的世界观和价值观，人生观。				
教 学 方 法	讲授				
教 学 重 点 难 点	重点：初等函数的求导公式、复合函数的求导法则。 难点：复合函数的求导法则。				

一、函数求导的四则运算法则

准则 1：若函数$u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 都可导，则 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在 x_0 点也可导，且

$$f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)\text{。}$$

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{[u(x)\pm v(x)]-[u(x_0)\pm v(x_0)]}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\pm\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0)$

所以 $f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)$ 。

注　1：本定理可推广到有限个可导函数上去。

2：本定理的结论也常简记为$(u\pm v)'=u'\pm v'$ 。

【例1】　$y=3x^3-5x^2+3x-7$　　求 y'

法则 2：若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，则 $f(x)=u(x)v(x)$ 在 x_0 点可导，且有 $f'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)'$。

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+\lim_{x\to x_0}u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}v(x)+u(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$$

$$=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$$

即 $f'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$。

注 1：若取 $v(x)\equiv c$ 为常数，则有： $(cu)'=cu'$；

2：本定理可推广到有限个可导函数的乘积上去，例如：

$(uvw)'=u'vw+uv'w+ucw'$

【例 2】 $y=e^x(\sin x+\cos x)$ 求 y'

法则 3：若 $u(x),v(x)$ 都在 $x=x_0$ 点可导，且 $v(x_0)\neq 0$，则 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在 x_0 点也可导，且

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}。$$

证明：$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x)}{(x-x_0)v(x)v(x_0)}$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{v(x)}-u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{v(x)v(x_0)}\right]$$

$$=u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)}-u(x_0)v'(x_0)\frac{1}{v^2(x_0)}$$

$$=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

即 $f'(x_0)=\dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$

注 1：本定理也可通过 $f(x)=u(x)\cdot\dfrac{1}{v(x)}$，及 $[\dfrac{1}{v(x)}]$ 的求导公式来得；

2：本公式简化为 $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$；

3：以上定理 1~3 中的 x_0，若视为任意，并用 x 代替，使得函数的和、差、积、商的求导函数公式。

【例 3】 $y=\tan x$ 求y'

解 $y'=(\tan x)'=(\dfrac{\sin x}{\cos x})'=\dfrac{\cos^2 x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$ $\qquad\qquad$ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

【例 4】 $y=\sec x$ 求y'

解 $y'=(\sec x)'=(\dfrac{1}{\cos x})'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$

$(\sec x)'=\tan x\sec x$ $\qquad\qquad$ $(\csc x)'=-\cot x\csc x$

二、反函数的导数法则

定理 2 如果函数 $x=f(y)$在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$, 那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应区间 $I_x=\{x|x=f(y), y\in I_y\}$内也可导, 并且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}. \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

证明: 由于 $x=f(y)$在 I_y 内单调、可导(从而连续), 所以 $x=f(y)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$存在, 且 $f^{-1}(x)$在 I_x 内也单调、连续.

任取 $x\in I_x$, 给 x 以增量$\Delta x(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$, 由 $y=f^{-1}(x)$的单调性可知

$$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0,$$

于是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. 因为 $y=f^{-1}(x)$连续, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\Delta y=0$，从而

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

上述结论可简单地说成: 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 5．设 $x=\sin y$, $y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$为直接函数, 则 $y=\arcsin x$ 是它的反函数. 函数 $x=\sin y$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内单调、可导, 且

$$(\sin y)'=\cos y>0.$$

因此, 由反函数的求导法则, 在对应区间 $I_x=(-1, 1)$内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地有: $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

例 6．设 $x=\tan y$, $y\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 为直接函数，则 $y=\arctan x$ 是它的反函数．函数 $x=\tan y$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，且

$$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0.$$

因此，由反函数的求导法则，在对应区间 $I_x=(-\infty, +\infty)$内有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

类似地有：$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

例 7 设 $x=a^y(a>0, a\neq 1)$为直接函数，则 $y=\log_a x$ 是它的反函数．函数 $x=a^y$ 在区间 $I_y=(-\infty, +\infty)$内单调、可导，且

$$(a^y)'=a^y\ln a\neq 0.$$

因此，由反函数的求导法则，在对应区间 $I_x=(0, +\infty)$内有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

到目前为止，所基本初等函数的导数我们都求出来了，那么由基本初等函数构成的较复杂的初等函数的导数如可求呢？如函数 $\ln\tan x$ 、e^{x^3} 、的导数怎样求？

三、复合函数的求导法则

定理 3 如果 $u=g(x)$在点 x 可导，函数 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

证明：当 $u=g(x)$在 x 的某邻域内为常数时，$y=f[\varphi(x)]$也是常数，此时导数为零，结论自然成立．

当 $u=g(x)$在 x 的某邻域内不等于常数时，$\Delta u\neq 0$，此时有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[g(x+\Delta x)]-f[g(x)]}{\Delta x}=\frac{f[g(x+\Delta x)]-f[g(x)]}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(u)\cdot g'(x).$$

简要证明：

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)g'(x).$$

例 8 $y=e^{x^3}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 函数 $y=e^{x^3}$ 可看作是由 $y=e^u$, $u=x^3$ 复合而成的，因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}.$$

例 9 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 函数 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$ 是由 $y=\sin u$，$u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成的，

因此 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}$.

对复合函数的导数比较熟练后， 就不必再写出中间变量，

例 10．$\ln\sin x$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x$.

例 11． $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形．例如，设 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$.

例 12．$y=\ln\cos(e^x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=[\ln\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[-\sin(e^x)]\cdot(e^x)'=-e^x\tan(e^x)$.

例 13． $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=(e^{\sin\frac{1}{x}})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$.

例 14 设 $x>0$，证明幂函数的导数公式 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$.

解 因为 $x^\mu=(e^{\ln x})^\mu=e^{\mu\ln x}$，所以

$(x^\mu)'=(e^{\mu\ln x})'=e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=e^{\mu\ln x}\cdot\mu x^{-1}=\mu x^{\mu-1}$.

由此可见，初等函数的求导数必须熟悉(i)基本初等函数的求导；(ii)复合函数的分解；(iii)复合函数的求导公式；只有这样才能做到准确。在解题时，若对复合函数的分解非常熟悉，可不必写出中间变量，而直接写出结果。

【例 15】 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，求 y' 。

解：$y'=(\sqrt{1-x^2})'=[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

【例 16】 $y=e^{\sqrt{1-\sin x}}$，求 y' 。

解： $y'=(e^{\sqrt{1-\sin x}})'=e^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot(\sqrt{1-\sin x})'=e^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\sin x)'}{\sqrt{1-\sin x}}$

$=\frac{1}{2}e^{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}e^{\sqrt{1-\sin x}}$ 。

【例 17】 $y=\ln[\ln(\ln x)]$，求 y'。

【例 18】求幂指函数 $y=[f(x)]^{g(x)}(f(x)>0)$ 的导数。

$$y'=(e^{g(x)\ln f(x)})'=e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]'=[f(x)]^{g(x)}[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}]$$

【例 19】 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 求y′

【例 20】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 求y′

【例 21】 $y=\log_a(x^2+x+1)$, 求y′. $y'=\dfrac{1}{(x^2+x+1)\ln a}(2x+1)$

【例 22】 $y=\arcsin(2\cos(x^2-1))$，求 y'。

解： $y'=(\arcsin(2\cos(x^2-1))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-[2\cos(x^2-1)]^2}}(2\cos(x^2-1))'$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}}\cdot 2[-\sin(x^2-1)]\cdot(x^2-1)'$$

$$=\frac{-2\sin(x^2-1)}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}}\cdot 2x=-\frac{4x\sin(x^2-1)}{\sqrt{1-4\cos^2(x^2-1)}}。$$

【例 23】 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'。

解： $y'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}[1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(arshx)'。$$

同理： $(\ln(x+\sqrt{x^2-1})'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(archx)'$。

复习思考题、作业题：

<table>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

授课时间	第 13 周	课 次	第 1 次
章节名称	**§ 2.3 高阶导数**		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	1，知识目标：使学生掌握高阶导数运算法则，熟记一些常见函数的高阶导数公式 2，能力目标： 熟练应用求导公式。 3，素养目标：具备严谨的学习态度。 4，**课程思政：**理解“科学探索需要不断突破直观认知，追求逻辑严谨”的精神。		
教学方法	讲授		
教学重点难点	重点：高阶导数的求法。 难点：高阶导数的求法。		

教学步骤及内容

一、高阶导数的定义

前面讲过，若质点的运动方程 $s = s(t)$，则物体的运动速度为$v(t) = s'(t)$，或$v(t) = \frac{ds}{dt}$，而加速度 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率，即 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的导数：$\alpha = a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt})$ 或$\alpha = v'(t) = (s'(t))'$，由上可见，加速度$\alpha$是 $s(t)$ 的导函数的导数，这样就产生了高阶导数，一般地，先给出下列定义：

定义：若函数 $y = f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点可导，就称 $f'(x)$ 在点 x_0 的导数为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记为 $f'(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$，此时，也称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导。

注 1：若 $y = f(x)$ 在区间 I 上的每一点都二次可导，则称 $f(x)$ 在区间 I 上二次可导，并称 $f'(x), x \in I$ 为 $f(x)$ 在 I 上的二阶导函数，简称二阶导数；

2：相应地，把 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做 $y = f(x)$ 一阶导数。类似地，二阶导数的导数为三阶导数，三阶导数的导数为四阶导数，一般地，$n-1$ 阶导数的导数为 n 阶导数，分别记为：

$$y', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}；或 \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

3：函数 $y = f(x)$ 具有 n 阶导数，也常称 $f(x)$ 为 n 阶可导。如果 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，

那么 $f(x)$ 在点 x 的某一领域内必定具有一切低于 n 阶的导数。二阶及二阶以上的导数称为高阶导数。

4：未必任何函数所有高阶都存在；

【例 1】$y = ax^2 + bx + c$，求 $y', y'', y^{(4)}$。

解：$y' = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad y' = 2a \quad \Rightarrow \quad y'' = 0$， $y^{(4)} = 0$。

【例 2】$y = e^x$，求各阶导数。

解：$y' = e^x$，$y' = e^x$，$y'' = e^x$，$y^{(4)} = ex$，显然易见，对任何 n，有 $y^{(n)} = ex$，即

$(e^x)^{(n)} = e^x$。

【例 3】$y = \sin x$，求各阶导数。

解：$y = \sin x, \qquad y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\cos x = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \pi) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2})$$

……

一般地，有 $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$，即 $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$。

同样可求得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$。

【例 4】$y = \ln(1 + x)$，求各阶导数。

解：$y = \ln(1 + x)$，$y' = \dfrac{1}{1 + x}$，$y' = -\dfrac{1}{(1 + x)^2}$，$y'' = \dfrac{1 \cdot 2}{(1 + x)^3}$，

$y^{(4)} = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1 + x)^4}$，……

一般地，有 $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1 + x)^n}$

即 $(\ln(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1 + x)^n}$。

【例 5】 幂函数 $y=x^{\mu}$，μ为任意常数，求各阶导数。

解：$y=x^{\mu}$，$y'=\mu x^{\mu-1}, y'=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$，$y''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$，

$$y^{(4)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般地，$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\quad(\mu-n+1)x^{\mu-n}$ 即

$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\quad(\mu-n+1)x^{\mu-n}$。当$\mu=k$为正整数时，

a) $n<k$ 时，$(x^{k})^{(n)}=k(k-1)(k-2)\quad(k-n+1)x^{k-n}$；

$n=k$ 时，$(x^{k})^{(k)}=k!(=n!)$；

$n>k$ 时，$(x^{k})^{(n)}=0$；

(ii) 当μ为正整数时，必存在一自然数 k，使得当 $n>k$，$(x^{\mu})^{(n)}$ 在$x=0$处不存在。如：

$y=x^{\frac{3}{2}}$，$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$，$y'=\frac{3}{2}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，然而，$x^{-\frac{1}{2}}$在$x=0$处是无意义，即说明$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$在$x=0$处无导数，或$y'$在$x=0$处不存在。

二、高阶导数的运算法则

(1) $[u(x)\pm v(x)]^{(n)}=u^{(n)}(x)\pm v^{(n)}(x)$，

(2) $(uv)'=u'v+uv'$，$(uv)'=u'v+2u'v'+uv'$，，

$(uv)'=u'v+3u'v'+3u'v'+uv'$ ……，

$[u(x)v(x)]^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v'+\quad +C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\quad +u^{(0)}v^{(n)}$。其中

$u^{(0)}=u, v(0)=v$。称为为莱布尼兹（Leibinz）公式，即

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$$

【例 6】$y=e^{x}\cos x$，求 y''。

解：$y'=e^{x}\cos x+e^{x}(-\sin x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$，

$$y' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = e^x(-2\sin x),$$

$$y'' = -2(e^x \sin x + e^x \cos x) = -2e^x(\sin x + \cos x)\text{。}$$

【例 7】上例中，求 $y^{(5)}$。

解： $y^{(5)} = (e^x \cos x)^{(5)} = (e^x)^{(5)} \cdot \cos x + C_5^1 (e^x)^{(4)} (\cos x)' + C_5^2 (e^x)''(\cos x)''$

$+ C_5^3 (e^x)'(\cos x)'' + C_5^4 (e^x)'(\cos x)^{(4)} + e^x(\cos x)^{(5)}$

$= e^x \cos x + 5e^x(-\sin x) + 10e^x(-\cos x) + 10e^x \sin x + 5e^x \cos x + e^x(-\sin x)$

$= e^x[\cos x - 5\sin x - 10\cos x + 10\sin x + 5\cos x - \sin x]$

$= e^x(4\sin x - 4\cos x)$

$= 4e^x(\sin x - \cos x)$ 。

【例 8】验证 $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$ 满足关系式： $y' - \lambda^2 y = 0$（其中 c_1, c_2 为任意常数）。

解： $y' = \lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y' = \lambda^2 c_1 e^{\lambda x} + \lambda^2 c_2 e^{-\lambda x}$

所以 $y' = \lambda^2 (c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}) = \lambda^2 y \quad \Rightarrow \quad y' - \lambda^2 y = 0$。

复习思考题、作业题：

1. 求 $y = x^n$（n 为正整数）的 n 阶导数，n+1 阶导数，并求 $y^{(n)}|_{x=0}$， $y^{(n)}|_{x=1}$；
2. 求 $y = \sin x$ 的 n 阶导数；
3. 证明函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足关系式 $y^3 y'' + 1 = 0$；
4. 设 f二阶可导，求 $y = f(e^x) + e^{f(x)\text{或}y=f(\sin 2}x) + \sin f(x)^2$ 的一阶、二阶导数；
5. 设 f 二阶可导，求 $y = f(x^3)$ 的二阶导数。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 14 周	课 次	第 1次
章 节 名 称	**§ 2.4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	1，知识目标：使学生掌握隐函数的导数，由参数方程所确定的函数的导数以及相关变化率 2，能力目标： 熟练应用公式。 3，素养目标：具备严谨的学习态度。 4，**课程思政：**树立“实践出真知”的认知理念。		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 难 点	重点：隐函数导数的求法。 难点：由参数方程所确定的隐函数的求导方法。		

教学步骤及内容：

一、 隐函数的导数

函数 $y = f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以用各种不同方式表达。

前面我们遇到的函数，例如 $y=\sin x$， $y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 等，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时，由这式子能确定对应的函数值。用这种方式表达的函数叫做显函数。有些函数的表达方式却不是这样，例如，方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty，+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应。

例如，当 $x=0$ 时， $y=1$；当 $x=-1$ 时， $y=\sqrt[3]{2}$，等等。这样的函数称为隐函数。

1．隐函数求导

一般地，如果在方程 $F(x，y) = 0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x，y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数。

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化。例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数。隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的。但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来。下面通过具体例子来说明这种方法。

例 1 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：我们把方程两边分别对 x 求导数，注意 y 是 x 的函数。方程左边对 x 求导得

$$\frac{d}{dx}\left(e^y+xy-e\right)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}，$$

方程右边对求导得 $(0)'=0$。

由于等式两边对 x 的导数相等，所以

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

从而 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}\ (x+e^y\neq 0)。$$

在这个结果中，分式中的 y 是由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数。

例 2. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的导数 $y'|_{x=0}$.

解: 把方程两边分别对 x 求导数得 $5y\cdot y'+2y'-1-21x^6=0$,

由此得 $y'=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$.

因为当 $x=0$ 时, 从原方程得 $y=0$, 所以 $y'|_{x=0}=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

例 3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在 $(2, \dfrac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 把椭圆方程的两边分别对 x 求导, 得 $\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{9}y\cdot y'=0$.

从而 $y'=-\dfrac{9x}{16y}$.

当 $x=2$ 时, $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, 代入上式得所求切线的斜率

$$k=y'|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

所求的切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$, 即 $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$.

例 4. 求由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

解: 方程两边对 x 求导, 得 $1-\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2}\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$,

于是 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2-\cos y}$.

上式两边再对 x 求导, 得 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\cdot\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

隐函数求导方法小结:

① 方程两端同时对 x 求导数, 注意把 y 当作复合函数求导的中间变量来看待, 例如 $(\ln y)_x'=\dfrac{1}{y}y'$。

② 从求导后的方程中解出 y' 来。

③ 隐函数求导允许其结果中含有 y 。但求一点的导数时不但要把 x 值代进去，还要把对应的 y

值代进去。

自我训练：（1）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，求 y'。

（2）$x^3+y^3=a^3$，求 y'。

（3）$xy+\ln y=1$，求 $y'(0)$。

（4）$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 y'。

2．取对数求导法

对于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 是没有求导公式的，我们可以通过方程两端取对数化幂指函数为隐函数，从而求出导数 y'。

例 5 求 $y=x^{\sin x}\quad(x>0)$ 的导数。

解：这函数既不是幂函数也不是指数函数，通常称为幂指函数。为了求这函数的导数，

可以先在两边取对数，得 $\ln y=\sin x\cdot\ln x$；

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

于是
$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)。$$

由于对数具有化积商为和差的性质，因此我们可以把多因子乘积开方的求导运算，通过取对数得到化简。

例 6 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数。

解：先在两边取对数（假定 $x>4$），得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right],$$

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

于是
$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)。$$

当 $x<1$ 时，$y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$；

当 $2<x<3$ 时，$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$；

用同样方法可得与上面相同的结果。

注：关于幂指函数求导，除了取对数的方法也可以采取化指数的办法。例如 $x^x = e^{x\ln x}$，这样就可把幂指函数求导转化为复合函数求导；例如求 $y=x^{e^x}+e^{x^e}$ 的导数时，化指数方法比取对数方法来得简单，且不容易出错。

二、由参数方程确定的函数的导数

若由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，如果函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续反函数 $t=\overline{\varphi}(x)$，且此反函数能与函数 $y=\psi(t)$ 复合成复合函数，那么由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的函数可以看成是由函数 $y=\psi(t)$、$t=\overline{\varphi}(x)$ 复合而成的函数 $y=\psi\left[\overline{\varphi}(x)\right]$。现在，要计算这个复合函数的导数。为此，再假定函数 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，而且 $\phi'(t)\neq 0$。于是根据复合函数的求导法则与反函数的导数公式，就有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$。上式也可写成 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$。

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 还是二阶可导的，由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 还可导出 y 对 x 的二阶导数公式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

即
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【例 7】求曲线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解： $t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \begin{matrix} x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}b \end{matrix}$，所以 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，对应的切点坐标（$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$）。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t\ ,\quad k=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=-\dfrac{b}{a}(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$，即 $bx+ay-\sqrt{2}ab=0$

【例 8】抛射体运动的参数方程 $\begin{cases} x=v_1t \\ y=v_2t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$，求时刻 t 的运动速度 $\vec{v}$；

解 水平分量 $x_t'=v_1$，铅直分量 $y_t'=v_2-gt$，

大小 $|\vec{v}|=\sqrt{{x_t'}^2+{y_t'}^2}=\sqrt{{v_1}^2+(v_2-gt)^2}$

再求速度的方向，也就是轨道的切线方向，而切线方向可由切线斜率来反映，所以：

$$\tan\alpha=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{v_2-gt}{v_1}$$

【例 9】求椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(-\frac{b}{a}\cot t)\frac{dt}{dx}=\frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

三、相关变化率

设 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在函数关系，因而变化率 $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ 之间也存在函数关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率。相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率。

【例 10】一气球从离开观察员的水平距离 500m 处离地而铅直上升，其速度为 140m/min（分），当气球高度为 500m 时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解：设气球上升 t 秒后，其高度为 h，观察员视线的仰角为α，则

$\tan\alpha=\dfrac{h}{500}$ （其中α和 h 都是 t 的函数）

上式两边求导： $\sec^2\alpha\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\dfrac{dh}{dt}$ 当$\dfrac{dh}{dt}=140m/\min \quad h=500$时 $\tan\alpha=1 \quad \sec^2\alpha=2$ 代入上式得：$\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\times\dfrac{1}{2}\times140=\dfrac{70}{500}=0.14$(弧度/分) 即观察员视线的仰角增加率是 0。14rad/min。 **小结：**本节讲述了隐函数和参数方程确定的函数的求导方法，利用取对数的方法解决了幂指函数的求导问题。
复习思考题、作业题：
下次课预习要点
教 学 后 记

授课时间	第　15 周	课　次	第 1 次
章　节 名　称	§ 2.5　函数的微分		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：理解函数微分的定义；微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性 2，能力目标：会求函数的微分。 3，素养目标：具备严谨的学习态度。 4，**课程思政：**树立“实践出真知”的认知理念。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：求函数的微分。 难点：微分在近似计算中的应用		

教学步骤及内容：

一、函数的微分

1、微分的定义

引例　一正方形金属薄片受温度变化影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\triangle x$，问此薄片的面积改变了多少？

分析　面积　$A=x^2$，$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2$

一般 $f(x)$ 满足一定条件: $\Delta y=A\Delta x+0(\Delta x)$，其中 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数。

定义 1：设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\triangle x$ 在这区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为：

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\qquad(1)$$

其中 A 是与 x_0 有关而与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小量，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量△x 的微分，记作 dy 即：$dy=A\Delta x$。

那么，函数具有什么条件才可微呢，下面我们讨论可微的充要条件。

Th1、函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微分的充要条件是该函数在 x_0 处可导，且当 f(x) 在点 x_0 处可微时，有 $dy=f'(x_0)\Delta x$。

证明："$\Rightarrow$"（必要性）若 y=f(x) 在点 x_0 处可微，$\Delta y=A\Delta x+0(\Delta x)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$，于是，$A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$。

"$\Leftarrow$"（充分性）设 y=f(x)在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

根据极限与无穷小的关系有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，于是

$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$ $\alpha\Delta x=0(\Delta x)$，且 $f'(x_0)\Delta x$ 不依赖 Δx，即 $dy=f'(x_0)\Delta x$，所以 y=f(x)在点 x_0 处可微。

注 1、可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在；可导 $\Rightarrow$ 连续，反之不成立。

2、当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x_0)\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[1-\frac{f'(x_0)}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}]=0$

表明当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，$\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 不仅是比 Δx 高阶的无穷小，而且也是比 Δy 高阶的无穷小；因此，dy 是 Δy 的主部。从而当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$。

3、$dx=\Delta x$，dy=$f'(x)dx$，$\frac{dy}{dx}=f'(x)$ 微商。

【例 1】求函数 y=x^3 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处的微分。

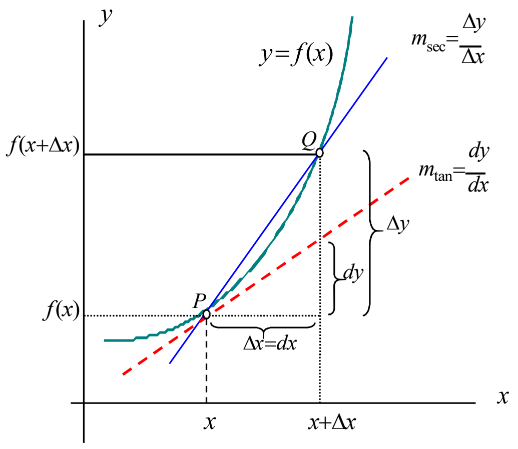
解：函数 y=x^3 在 $x=1$ 的微分为 $dy=(x^3)'|_{x=1}\,dx=3dx$

在 $x=2$ 处的微分为 $dy=(x^3)'|_{x=2}\,dx=12dx$。

【例 2】求函数 $y=\sin x$，当 $x=\frac{\pi}{3},\Delta x=0.02$ 时的微分。

解：$dy|_{x=\frac{\pi}{3},\Delta x=0.02}=\cos\frac{\pi}{3}\cdot 0.02=0.01$

2、微分的几何意义



$PQ=MQ\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x$ "以直代曲"，即 $y=f(x)$ 的微分 $dy=f'(x_0)dx$，在几何上就表示曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的纵坐标相应于 Δx 的增量。如图 2.5（P75）。

3、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

（1） 基本初等函数的微分公式

（2） 函数的和、差、积、商的微分法则

$d(u \pm v) = du \pm dv$；$d(uv) = vdu + udv$；$d(cu) = cdu$；

$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$。

（3） 复合函数的微分法则

设$y = f(u), u = \varphi(x), f'(u)$及$\varphi'(x)$存在，则复合函数 $y = f\left[\varphi(x)\right]$的微分为

$dy = f'(u)\varphi'(x)dx$。

由于$\varphi'(x)dx = du$，所以复合函数 $y = f\left[\varphi(x)\right]$的微分也可以写成：

$dy = f'(u)du$ 或 $dy = y_u' du$ 微分的形式不变性。

【例 3】 $y = \sin(2x+1)$, 求dy。

解：法 1： $y' = 2\cos(2x+1) \quad dy = 2\cos(2x+1)dx$。

法 2： $dy = d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x+1)d(2x+1) = 2\cos(2x+1)dx$

【例 3】 $y = \ln(1+e^{x^2})$, 求dy。

解： $dy = d\ln(1+e^{x^2}) = \frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2}) = \frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx^2 = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$

【例 4】 $y = e^{1-3x}\cos x$, 求dy。

解： $dy = d(e^{1-3x}\cos x) = \cos x d(e^{1-3x}) + e^{1-3x}d\cos x$

$= e^{1-3x}\cos x d(1-3x) - e^{1-3x}\sin x dx = -e^{1-3x}(3\cos x + \sin x)dx$

【例 5】填空：

（1）d(　　)=xdx （$\frac{x^2}{2}+c$） (2) d(　　)=$\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ （$\sqrt{x}+c$）

(3) d( )=$-\frac{dx}{x^2}$ （$\frac{1}{x}+c$） (4) $d($　　$)=\cos 5x dx$ （$\frac{\sin 5x}{5}+c$）

练习： $y = 1 + xe^y$, 求dy。 （$dy = e^y dx + xe^y dy$， $dy = \frac{e^y}{1-xe^y}dx$）

六、微分在近似计算中的应用

1．函数的近似计算

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$$

上式也可写成：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ （2）

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (3)$$

令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，（3）可以写成：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (4)$$

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x\quad (x_0=0)$$

例 6．有一批半径为 1cm 的球, 为了提高球面的光洁度, 要镀上一层铜, 厚度定为 0. 01cm. 估计一了每只球需用铜多少 g(铜的密度是 8. 9g/cm ³)?

解: 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, R_0=1cm, ΔR=0. 01cm.

镀层的体积为

$\Delta V=V(R_0+\Delta R)-V(R_0)\approx V'(R_0)\Delta R=4\pi R_0^2\Delta R=4\times 3.14\times 1^2\times 0.01=0.13(\text{cm}^3)$.

于是镀每只球需用的铜约为

$0.13\times 8.9=1.16(g)$.

例 7．利用微分计算 sin 30°30′的近似值.

解: 已知 $30°30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}$，$x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{360}$.

$\sin 30°30'=\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\Delta x\cos x_0$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.5076$.

即 $\sin 30°30'\approx 0.5076$.

常用的近似公式（假定$|x|$是较小的数值）:

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$;

(2) $\sin x\approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(3) $\tan x\approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(4) $e^x\approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x)\approx x$.

证明 (1)取 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, 那么 $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n}$, 代入 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 便得

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x.$$

证明(2)取 $f(x)=\sin x$, 那么 $f(0)=0$, $f'(0)=\cos x|_{x=0}=1$, 代入 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 便得

$$\sin x\approx x.$$

例 8. 计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解: 已知 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$, 故

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025.$$

直接开方的结果是$\sqrt{1.05}=1.02470$.

2. 误差估计

在生产实践中, 经常要测量各种数据. 但是有的数据不易直接测量, 这时我们就通过测量其它有关数据后, 根据某种公式算出所要的数据. 由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响, 测得的数据往往带有误差, 而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差, 我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样用微分来估计间接测量误差.

绝对误差与相对误差: 如果某个量的精确值为 A, 它的近似值为 a, 那么$|A-a|$叫做 a 的绝对误差, 而

绝对误差$|A-a|$与$|a|$的比值$\frac{|A-a|}{|a|}$叫做 a 的相对误差.

在实际工作中, 某个量的精确值往往是无法知道的, 于是绝对误差和相对误差也就无法求得. 但是根据测量仪器的精度等因素, 有时能够确定误差在某一个范围内. 如果某个量的精确值是 A, 测得它的近似值是 a, 又知道它的误差不超过δ_A: $|A-a|\le\delta_A$, 则δ_A叫做测量 A 的绝对误差限, $\frac{\delta_A}{|a|}$叫做测量 A 的相对误差限(简称绝对误差).

例 9. 设测得圆钢截面的直径 D=60.03mm, 测量 D 的绝对误差限δ_D=0.05. 利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢的截面积时, 试估计面积的误差.

解: $\Delta A\approx dA=A'\cdot\Delta D=\frac{\pi}{2}D\cdot\Delta D$,

$$|\Delta A|\approx|dA|=\frac{\pi}{2}D\cdot|\Delta D|\le\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D.$$

已知 D=60.03, δ_D=0. 05, 所以

$$\delta_A=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times 60.03\times 0.05=4.715\ (\text{mm}^2);$$

$$\frac{\delta_A}{A}=\frac{\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\cdot\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.03}\approx 0.17\%.$$

若已知A由函数$y=f(x)$确定: $A=y$, 测量x的绝对误差是δ_x, 那么测量y的δ_y=?

由$\Delta y\approx dy=y'\Delta x$, 有

$$|\Delta y|\approx|dy|=|y'|\cdot|\Delta x|\le|y'|\cdot\delta_x,$$

所以测量y的绝对误差$\delta_y=|y'|\cdot\delta_x$, 测量$y$的相对误差为

$$\frac{\delta_y}{|y|}=\left|\frac{y'}{y}\right|\cdot\delta_x.$$

练习：1、 求arctan1.02 的近似值。

解：取 $y = \arctan x$, 由于 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$，由公式（3）有：

$$\arctan(x_0 + \Delta x) \approx \arctan(x_0) + \frac{1}{1+x_0^{\ 2}}\Delta x$$

取 $x_0 = 1, \Delta x = 0.02$ 代入上式，即得 $\arctan 1.02 \approx \frac{\pi}{4} + 0.01$。

2、求 $\sqrt[3]{65}$ 的近似值。

解：因为 $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = 4\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{64}}$，所以 $x = \dfrac{1}{64}$，其值较小，$n = 3$ 时利用近似公式（1）便得：

$$\sqrt[3]{65} = 4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}} \approx 4(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}) = 4.021$$

直接开立方，得 $\sqrt[3]{65} = 4.02072$。

练习：计算 $\sqrt{26}$ 的近似值。

$$\sqrt{26} = \sqrt{1+25} = \sqrt{25(1+\frac{1}{25})} = 5\sqrt{1+\frac{1}{25}} \approx 5(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{25}) = 5.10$$

小结：本节讲述了微分的定义，练习了微分的运算和利用微分作近似计算
希望大家熟记微分公式，为以后学习积分大好基础。

复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学　后　记	

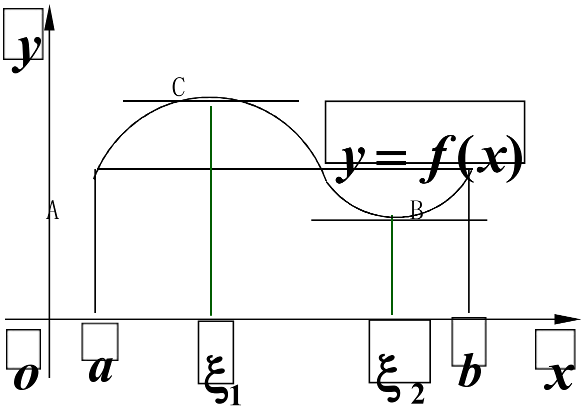
授课时间	第　16　周	课　次	第 1 次
章　节 名　称	**§ 3.1　　微分中值定理**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.知识目标：理解并会用罗尔定理、拉格朗日定理，了解柯西中值定理 2. 能力目标：熟悉中值定理。 3.素养目标：具备严谨的学习态度。 4. 课程思政：树立正确的世界观和价值观，人生观。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：罗尔定理、拉格朗日定理的应用。 难点：罗尔定理、拉格朗日定理的应用。		

教学步骤及内容：

一、罗尔定理

1. 罗尔定理

几何意义：对于在$[a,b]$上每一点都有不垂直于 x 轴的切线，且两端点的连线与 x 轴平行的不间断的曲线 $f(x)$ 来说，至少存在一点 C，使得其切线平行于 x 轴。



从图中可以看出：符合条件的点出现在最大值和最小值点，由此得到启发证明罗尔定理。为应用方便，先介绍费马（Fermat）引理

费马引理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），那么 $f'(x_0)=0$.

证明：不妨设 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\le f(x_0)$（若 $f(x)\ge f(x_0)$，可以类似地

证明）.于是对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$,有 $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$, 从而当$\Delta x>0$时,

$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$; 而当 $\Delta x<0$ 时, $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$;

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导及极限的保号性的得

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$ ，所以 $f'(x_0)=0$, 证毕.

定义 导数等于零的点称为函数的驻点(或稳定点，临界点).

罗尔定理 如果函数 $f(x)$满足：（1）在闭区间$[a,b]$上连续,（2）在开区间(a,b) 内可导,（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$, 那么在(a,b) 内至少在一点$\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$.

证明：由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，因此必有最大值 M 和最小值 m，于是有两种可能的情形：

（1）$M=m$，此时 $f(x)$ 在$[a,b]$上必然取相同的数值 M，即 $f(x)=M.$

由此得 $f'(x)=0$.因此，任取$\xi\in(a,b)$，有 $f'(\xi)=0$.

（2）$M>m$，由于 $f(a)=f(b)$，所以 M 和 m 至少与一个不等于 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 端点处的函数值.不妨设 $M\ne f(a)$(若 $m\ne f(a)$,可类似证明),则必定在(a,b) 有一点ξ使 $f(\xi)=M$. 因此任取 $x\in[a,b]$有 $f(x)\le f(\xi)$, 从而由费马引理有 $f'(\xi)=0$. 证毕

【例 1】 验证罗尔定理对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间$[-1,3]$上的正确性

解 显然 $f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ 在 $[-1,3]$ 上连续，在 $(-1,3)$ 上可导，且 $f(-1)=f(3)=0$, 又 $f'(x)=2(x-1)$, 取$\xi=1$, $(1\in(-1,3))$,有 $f'(\xi)=0$.

说明：**1** 若罗尔定理的三个条件中有一个不满足， 其结论可能不成立;

2 使得定理成立的ξ可能多于一个，也可能只有一个.

【例 2】 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

证明：设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=1, f(1)=-3$.

由介值定理存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)=0$, 即 x_0 为方程的小于 1 的正实根.

设另有 $x_1 \in (0,1), x_1 \neq x_0$，使 $f(x_1)=0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件，所以至少存在一个 ξ（在 x_0, x_1 之间）使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$，矛盾，所以 x_0 为方程的唯一实根.

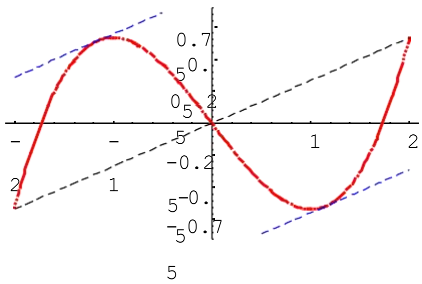
一、 拉格朗日（Lagrange）中值定理

在罗尔定理中，第三个条件为(iii) $f(a) = f(b)$，然而对一般的函数，此条不满足，现将该条件去掉，但仍保留前两个条件，这样，结论相应地要改变，这就是**拉格朗日**中值定理：

定理 2：若函数满足：

(i) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ；

(ii) $f(x)$ 在 (a,b) 上可导；



则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

即 $f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)$

若此时，还有 $f(a)=f(b)$， $\Rightarrow f'(\xi)=0$。可见罗尔中值定理是**拉格朗日**中值定理的一个特殊情况，因而用罗尔中值定理来证明之。

证明：上式又可写为 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ……(1)

作一个辅助函数：$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ……(2)

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$$

$\Rightarrow F(a)=F(b)$，所以由罗尔中值定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$F'(\xi)=0$。 又 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Rightarrow f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad \text{或} \quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

注 1：**拉格朗日**中值定理是罗尔中值定理的推广；

2：定理中的结论，可以写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\ (a<\xi<b)$，此式也称为**拉格朗日**

公式，其中ξ可写成：

$$\xi = a + \theta(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a) \qquad \cdots\cdots(3)$$

若令$b=a+h$, $\Rightarrow f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ ……(4)

3：若 $a>b$，定理中的条件相应地改为：$f(x)$ 在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，则结论为：

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$$

也可写成 $$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

可见，不论 a,b 哪个大，其**拉格朗日**公式总是一样的。这时，ξ为介于 a,b 之间的一个数，(4)中的 h 不论正负，只要 $f(x)$ 满足条件，(4)就成立。

4：设在点 x 处有一个增量Δx，得到点 $x+\Delta x$，在以 x 和$x+\Delta x$为端点的区间上应用**拉格朗日**中值定理，有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \qquad (0<\theta<1)$$

即 $\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ 这准确地表达了Δy和Δx这两个增量间的关系，故该定理又称为微分中值定理。

5：几何意义：如果曲线 $y=f(x)$在除端点外的每一点都有不平行于 y 轴的切线，则曲线上至少存在一点，该点的切线平行于两端点的连线。

由定理还可得到下列结论：

推论 1：如果$y=f(x)$在区间I上的导数恒为 0，则$f(x)$在I上是一个常数。

证明：在 I 中任取两点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，$y=f(x)$在$[x_1,x_2]$连续，在(x_1,x_2)可导，由拉格朗日中值定理，则在(x_1,x_2)内至少存在一点ξ，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

由假设可知在 I 上，$f'(x)\equiv 0$，从而在(x_1,x_2)上，$f'(x)\equiv 0$，

$\Rightarrow f'(\xi)=0$， 所以 $f(x)-f(x_0)=0 \quad \Rightarrow f(x)=f(x_0)$，

可见，$f(x)$ 在 I 上的每一点都有：$f(x)=f(x_0)$ （常数）。

8）【例 3】 证明当$x>0$时 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证： 设$f(x)=\ln(1+x)$，显然$f(x)$在[0，x]上满足拉格朗日中值定理条件，故至少存在一点$\xi\in(0,x)$使$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$

由于 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ，$f(0)=0$ ，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，代入上式有

$\dfrac{\ln(1+x)-Ln1}{x}=\dfrac{1}{1+x}$ 即 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{1+x}$

又由于$0<x<x$ $1<x+1<1+x$ 所以

$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+x}<1$ $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$ 即 $\dfrac{x}{1+x}<ln(1+x)<x$

注:（1）构造辅助函数$f(x)$；（2）正确确定区间左右端点，利用 TH2 可得.

三、柯西中值定理

定理 3：若 $f(x),F(x)$ 满足：

(1)在$[a,b]$上连续； (2)在(a,b)内可导；(3) $\forall x\in(a,b)$ $F'(x)\neq 0$

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$。

证明：令$\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$，显然，$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，且$\varphi(x)$在$(a,b)$内可导，更进一步还有 $\varphi(a)=\varphi(b)$，事实上，

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(b)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-F(a)}F(a)+f(a)$$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}(F(b)-F(a))-(f(b)-f(a))=0$$

所以$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件，故在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\varphi'(\xi)=0$，又$\varphi'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(x)-f'(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)=0$$

因为$F'(\xi)\neq 0$， $\Rightarrow \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$

注 1：**柯西中值定理**是**拉格朗日**中值定理的推广，事实上，令 $F(x)=x$，就得到**拉格朗日**中值定理；

2：几何意义：若用$\begin{cases}X=f(x)\\ Y=F(x)\end{cases}$ （$a\le x\le b$）表示曲线c，则其几何意义同前一个。

【例 4】 证明$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$（$-1\le x\le 1$）。

证：令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$， $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，

由推论知 f(x)=常数！再由$f(0)=\dfrac{\pi}{2}$，故$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$。

【例 5】若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x=x_0$，

证明方程$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$必有一个小于$x_0$的正根。

证明：令$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x$，在闭区间$[0,x_0]$上满足罗尔定理的三个条件，故

$f'(\xi)=0\ (0<\xi<x_0)$

$$f'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_0n\xi^{n-1}+a_1(n-1)\xi^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$$

上式表明$x=\xi$（$0<\xi<x_0$）即为方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$的根。

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 17周	课 次	第 1 次
章节名称	**§ 3.2 洛必塔法则**		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	1，知识目标：使学生掌握利用洛必塔法则求未定式极限； 2，能力目标：熟悉应用洛必塔法则求未定式极限 3，素养目标：具备严谨的学习态度。 4，**课程思政：**学习数学家探索精神。		
教学方法	讲授		
教学重点难点	重点：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限； 难点：其他$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 类型的未定式极限的求法。		

教学步骤及内容：

在第一章中我们已经知道，当分子分母都是无穷小或都是无穷大时，两个函数之比的极限可能存在也可能不存在，即使极限存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一运算法则。这种极限称为未定式。记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$。

一 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

定理 1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

(1) 当$x\to a$时，函数$f(x)$与$g(x)$ 都趋于零;

(2) 在点a的某去心邻域内，$f'(x)$ 及$g'(x)$ 都存在且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大）;

那么， $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。

定义 1 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

证明：由于极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$与$f(x)$ 及$g(x)$ 在点 a 处的值无关，又由于 $x\to a$ 时

$f(x)\to 0, g(x)\to 0$，**故可以补充定义** $f(a)=g(a)=0$。**于是由条件（1）与（2）知，** $f(x), g(x)$

在点 a 的某一邻域内是连续的。设$\forall x\in U(a)$，那么在以 x 及 a 为端点的区间上，柯西中值定理的条件均满足，因此有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{（}\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间）}$$

令 $x\to a$，并对上式两端求极限，注意 $x\to a$ 时有$\xi\to a$，再条件（3）即证。

注 1．定理的条件：分子分母都是无穷小；分子分母都可导，且分母的导数不等于 0；导数之比的极限存在或为∞

2．定理的结论：函数之比的极限等于导数之比的极限；

若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$还是未定式，且$f'(x),g'(x)$满足定理中对$f(x),g(x)$所要求的条件，则可以继续使用罗必塔法则，直到不再是未定式为止，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=$$

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-1}=1$

【例 2】求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$

【例 3】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

【例 4】$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln\frac{a}{b}\quad(a>0,b>0)$

当$x\to\infty$时的$\frac{0}{0}$型未定式，以及$x\to a$或$x\to\infty$时未定式$\frac{\infty}{\infty}$也有相应的罗必塔法则，如下：

定理 2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

（1）$\lim f(x)=0$ 且 $\lim g(x)=0$（或 $\lim f(x)=\infty$ 且 $\lim g(x)=\infty$）

（2）$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq0$；　（3）$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$；

那么 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

【例 6】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n为正整数, $\lambda>0$) 。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=....=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$

【例 7】求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

解： $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 3x(-\sin 3x)3}{3\cdot 2\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin 6x}{3\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3$ 。

二、 其他类型的不定式

除了 $\frac{0}{0}$ **型和** $\frac{\infty}{\infty}$ **型两种基本未定式外，还有** $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型的未定式, **都可以通过通分或取对数**转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，**下面例子说明**

1、 $0\cdot\infty$ 型 **方法：** $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$, 或 $0\cdot\infty\Rightarrow 0\cdot\dfrac{1}{0}\Rightarrow\dfrac{0}{0}$.

【例 8】 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$ ($0\cdot\infty$型)

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=\mathbf{0}$.

2、 $\infty-\infty$ 型 **通分：** $\infty-\infty\Rightarrow\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}\Rightarrow\dfrac{0-0}{0\cdot 0}$.

【例 9】 求 $\lim\limits_{x\to 0}=(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$ ($\infty-\infty$型)

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{xe^x-e^x}=\dfrac{1}{2}$

【例 10】 求 $\lim\limits_{x\to 1}=(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})$ ($\infty-\infty$型) $\dfrac{1}{2}$

3、 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型　**（取对数）**

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$.　　0^0

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0$ **=1。**

【例 12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.　**解：** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

【例 13】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$　　**解：** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x}) = 1$；

若用罗必塔法则，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ 不存在。

【例 14】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{x\tan x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{x\tan x}$ =1　（若用罗必塔法则，比较繁琐。）

注 **1**、 L.Hospital 法则只是求未定式极限的一种有效方法，是充分条件，当定理的条件满足时，所求的极限存在或为∞，当定理的条件不满足时，主要是指（3）不成立，即导数之比的极限不易求出，或不存在但不∞，函数之比的极限未必不存在，此时 L.Hospital 法则：“失效”。

若出现$x\to0$时,$\sin x,\cos x$或$x\to\infty$时,$\sin\dfrac{1}{x},\cos\dfrac{1}{x}$，不宜使用罗必塔法则。

2、L.Hospital 法则只能对 $\dfrac{0}{0}$ 与$\dfrac{\infty}{\infty}$这两种基本未定式才可直接应用，其它类型的未定式必须先转化。

3、L.Hospital　法则与等价无穷小的代换结合使用效果会更好。

4、可考虑进行恒等变形或引入适当的变量代换，以简化计算。

练习：1、$\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$ =1 ；

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1-\sin x}$不存在 但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}} = 1$$

复习思考题、作业题：

思考题：设 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是不定型极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也一定不存在？举例说明.（不一定）

下次课预习要点	
教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 18 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 1 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">期末复习</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（）、实践课（ ）、习题题（）、其它（ √）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1，知识目标： 使学生掌握本学期的学习内容
2，能力目标：熟悉学习内容和了解期末考试
3，素养目标：具备严谨的学习态度。
4，课程思政：认识数学思维对认知世界的指导意义，树立“追求真理、脚踏实地”的学术价值观。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲授</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：
难点：</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>