<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　3　周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第　1-2　次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">第一章　向量与坐标
§1.1 向量的概念</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">1. 理解向量的概念
2. 掌握单位向量、零向量、自由向量、相等向量、反向量等特殊向量。
3、能判别共线向量，共面向量</td></tr>
<tr><td>思政育人
目标</td><td colspan="4">培养学生的文化自信与学科信仰</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲授法</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：相等向量、共面向量、共线向量
难点：共面向量</td></tr>
</table>

日常生活与自然科学中存在着两种量：向量与数量．向量并不陌生，在初中物理中我们就接触过它，位移、力、速度等就是向量，他们既有大小，又有方向．而长度、面积、体积等量，它们只有大小，是数量，又称标量．

定义1.1.1 既有大小又有方向的量叫向量，或称矢量，简称矢．

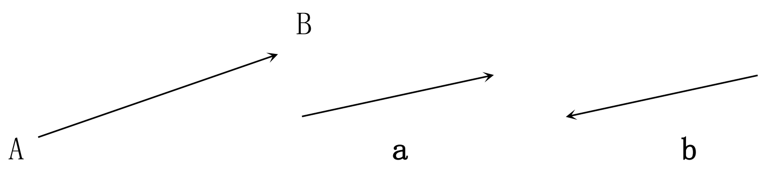
一般两向量不能比较大小.

向量的几何表示：有向线段.用 $\overrightarrow{AB},\vec{a},\vec{x},\cdots$ 或用黑体字母$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x},\cdots$来记向量.

向量的始点与终点：有向线段的始点与终点.

向量的大小：向量的模．记为$\left|\overrightarrow{AB}\right|,\left|\vec{a}\right|,\cdots$

向量的方向：有向线段的方向.



模等于1，模等于0的向量是特殊向量：单位向量与零向量.

向量 $\vec{a}$ 的单位向量 $\overrightarrow{a^0}$：与同方向的单位向量.（此指非零向量的单位向量）

用有向线段表示向量，与线段一样，向量亦有平行关系，相等关系．（简介正交关系） 两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$平行：$\vec{a}$，$\vec{b}$所在的直线相互平行, 记做$\vec{a} \parallel \vec{b}$． **定义1.1.2** 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫相等向量，所有的零向量都相等．向量$\vec{a}$与 $\vec{b}$相等，记做$\vec{a}=\vec{b}$． 两向量是否相等与始点无关，只与模和方向有关．始点位置任意，模和方向确定的向量叫自由向量． **定义 1.1.3** 两个模相等方向相反的向量叫互为反向量；$\vec{a}$ 的反向量记做$-\vec{a}$． 显然，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量，即$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$． 若将彼此平行的一组向量归结到共同的始点,这组向量一定在同一直线上;若把平行于同一平面的一组向量归结到同一始点,这组向量一定在同一个平面上． **定义 1.1.4** 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量． 零向量与任何共线的向量组共线． **定义 1.1.5** 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量． 易知，一组共线向量一定是共面向量；任意两向量必共面；三向量中若有两向量共线,则三向量共面．
复习思考题、作业题： P3-4
下次课预习要点 向量加法的两个法则

教　学 后　记	通过实例引入、新课讲授、概念辨析、课堂练习等环节，使学生逐步理解向量的概念和表示方法。在教学过程中，注重培养学生的观察、类比、归纳、抽象的思维能力，以及自主学习和合作学习能力。同时，通过例题和练习巩固所学知识，提高学生的解题能力。在课后作业中，引导学生思考向量在实际生活中的应用，提高学生的综合素质。

授课时间	第 4 周	课 次	第 1-2 次
章 节 名 称	§1.2 向量的加法		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1.掌握向量加法与减法的概念 2.理解向量加法的运算规律 3.能利用向量法证明简单的几何问题		
思政育人 目标	培养学生的哲学思维与建模思想		
教 学 方 法	讲授法		
教 学 重 点 难 点	重点：向量加法的三角形法则 难点：几何运用		

一． 向量的加法

1．实例

作用于同一点不共线两力$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的合力（平行四边形法则）

两个位移$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$的合成 （三角形法则）

二者关系：在自由向量的意义下,两向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则 .

2，加法的概念

1）定义

设$\vec{a}$，$\vec{b}$以空间一点 O 为始点作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则折线 OAB 中$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$叫作$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记作$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ （三角形法则）

2）定理

定理 1.2.1 平行四边形法则

以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边组成平行四边形 OACB，则对角线向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,易知共线两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的和且 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$，$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

2．加法的运算律

二． 向量的减法

1．减法定义（加法的逆运算）

当$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$时，称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记为$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

2．向量减法作图法：

三角形法则（由向量加法三角形法则而来）

自空间一点 O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，

则 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$.

三、向量加减法的关系

任意两向量$\vec{a}$,$\vec{b}$,有

$$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \le |\vec{a}\pm\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

推广 $\left|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\cdots+\overrightarrow{a_n}\right| \le |\overrightarrow{a_1}|+|\overrightarrow{a_2}|+\cdots|\overrightarrow{a_n}|$

四． 例题

例 1. 设互不共线的三向量$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 试证明顺次将它们的终点与始点于终点相连而成一个三角形的 充要条件是他们的和是零向量.

例 2. 用向量方法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边.

复习思考题、作业题：

用作图法求两个向量的加法与减法。

下次课预习要点

单位向量的表示形式

教 学 后 记	

授课时间	第 5 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	§1.3 数量乘向量		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1.掌握数乘运算的概念 2.理解数乘运算的运算规律 3.会运用数乘运算证明几何问题		
教 学 方 法	讲练结合法		
教 学 重 点 难 点	重点：数乘运算的运算规律 难点：单位向量的表示形式		

一、向量的数乘运算

定义 1. 3.1 实数λ与向量$\vec{a}$的乘积是一个向量,记做$\lambda\vec{a}$,它的模是$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向,当$\lambda>0$时与$\vec{a}$相同,当$\lambda<0$时与$\vec{a}$的方向相反.这种运算叫做数量与向量的乘法,简称为数乘.

可见: 当$\lambda=0$或$\vec{a}$=0 时, $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$=0, $\lambda\vec{a}$=0; 当$\lambda=-1$时, $\lambda\vec{a}$就是$\vec{a}$的反向量.

向量$\vec{a}$和它的单位向量$\overrightarrow{a^0}$存在着如下关系:

$\vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a^0}$,或$\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (一个非零向量乘以它的模的倒数得一个与之同方向的单位向量).

二、运算规律

定理 1.3.1 数量与向量的乘法满足下面的运算规律:

1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$；

2) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

3) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

4) 第二分配律 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$。（其中$\lambda$，$\mu$为任意实数）

从向量的加法与数乘向量的运算规律可可看出,向量也可以象实数及多项式那样去运算.

例 1.设 AM 是△ABC 的中线,求证 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

练习 P13-1、6、7	
复习思考题、作业题： P14-11、12	
下次课预习要点 向量的线性运算	
教　学 后　记	

授课时间	第　5　周	课　次	第　2　次
章　节 名　称	§1.4 向量的线性关系与向量的分解		
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1.掌握共线向量、共面向量的线性表示 2.学会如何将有关的几何图形看成特定的向量集合		
教　学 方　法	讲授法		
教　学 重　点 难　点	重点：运用向量的线性运算把几何图形中特定向量之间的关系表示出来 难点：向量的线性表示法及向量在直角标架下的分解		

一．线性组合

1. 定义

由向量 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 与数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的向量 $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots\lambda_n\overrightarrow{a_n}$ 叫做 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的线性组合.(或称线性表示,可分解为 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的线性组合)

2. 概念应用:相关的判别条件

(1) 若 $\vec{e}\neq\vec{0}$,则 $\vec{r}$ 与 $\vec{e}$ 共线 $\Leftrightarrow$ $\vec{r}=x\vec{e}$, x 唯一.($\vec{e}$,直线上向量基底)

证 $\Rightarrow$ 显然;

$\Leftarrow$ $\vec{r}$ 与 $\vec{e}$ 共线,取 $x=\dfrac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|}$,同向 $x=-\dfrac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|}$,反向;唯一性易证.

(2) 若 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ 不共线,则 $\vec{r}$ 与 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$, x,y 唯一确定. ($\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ 平面上向量的基底)

证

$$\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2},\left\{\begin{array}{l} xy=0,\vec{r}\text{与}\overrightarrow{e_1}\text{或}\overrightarrow{e_2}\text{共线，从而共面.}\\ xy\neq0,\text{ 由矢量加法平行四边形法则},\vec{r}\text{与}x\overrightarrow{e_1},y\overrightarrow{e_2}\text{共面},\\ \text{而}x\overrightarrow{e_1}\,//\,\overrightarrow{e_1},y\overrightarrow{e_2}\,//\,\overrightarrow{e_2}.\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{若}\vec{r}\text{与}\overrightarrow{e_1}(\text{或}\overrightarrow{e_2})\text{共线，则}\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2},y=0(\text{或}x=0)\\ \text{若}\vec{r}\text{与}\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\text{都不共线，把它们归结到共同始点，且设}\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{OP}=\vec{r}\end{array}\right.$$ 作

出 A，B 点，⋯. 即得.

唯一性.（同一法（反证））

(3) 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 不共面，则空间任一向量 $\vec{r}$： $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$， x, y, z 唯一确定.

例题 1、2.

二．线性相关与线性无关.

1.定义

n 个向量 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ 线性相关（无关）

2.有关结论

(1) $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ ($n \geqslant 2$)线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有一个向量是其余向量的线性组合.

(2)若一组向量中一部分向量线性相关,则这组向量线性相关.

$(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_s}, \cdots, \vec{a_r} \qquad (s \le r))$

可见:一组向量中若有 $\vec{0}$,则必线性相关.

(3)判别条件(根据线性相关的概念)

a. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 线性相关.

证 $\Rightarrow \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, $\vec{b} \neq \vec{0}$,则 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ 相关; $\vec{b} = 0$ 显然相关.

$\Leftarrow \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 线性相关, $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0$,不妨设 $\lambda \neq 0$, $\vec{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\vec{b}\,(\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{b} = \vec{0})$

b. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关.

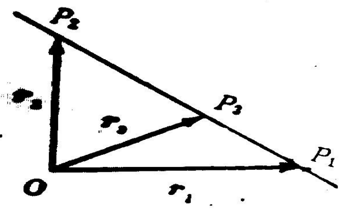
c. 空间任何四向量总是线性相关的.

证 设空间四向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$,若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面,则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关,从而四向量线性相关;若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面,则 $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$,线性相关.

思考:三个以上的向量是否总是线性相关的?

例 3. 设 $OP_i = \vec{r_i}$ $(i = 1,2,3)$,试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1\vec{r_1} + \lambda_2\vec{r_2} + \lambda_3\vec{r_3} = 0$,且

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.



证 设 P_1, P_2, P_3 三点共线,那么 $\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}$ 两向量共线,因两向量 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 与 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 线性相关,存在不全为 0 的数 m, n,使

$m\overrightarrow{P_1P_3} + n\overrightarrow{P_2P_3} = 0$.即 $m(\vec{r_3} - \vec{r_1}) + n(\vec{r_3} - \vec{r_2}) = 0$,

例 4．已知 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 不共面，问 $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$， $\vec{b} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$， $\vec{c} = \vec{e_2} - 3\vec{e_3}$ 是

否共面.   （设有三实数l,m,n，s.t. $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$,   即$(l+2m)\overrightarrow{e_1}+(-2l-m+n)\overrightarrow{e_2}+(l+3m-3n)\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$，…）
复习思考题、作业题：   P23-6（2）,8
下次课预习要点   向量的坐标表示

教 学 后 记	

授课时间	第 6 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	§1.5 标架与坐标		
授 课 方 式	理论课（ ）、实践课（ ）、习题题（ √ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1. 将全体向量或点的集合与全体有序实数 X，Y，Z 的集合进行一一对应 2.会用坐标进行向量运算		
教 学 方 法	讲授法		
教 学 重 点 难 点	重点： 用坐标进行向量的运算 难点：向量的运算与向量坐标的关系。		

思政元素：介绍数学家笛卡尔的故事，他是解析几何的奠基人之一，他提出了坐标几何的概念，将几何问题转化为代数问题。（激发学生学习数学的兴趣及科学探索的热情）。

一、 标架

取定空间点 O，引入三不共面向量 $\overrightarrow{OE_i}=\overrightarrow{e_i}(i=1,2,3)$，则由定理 1.4.3 知空间任一向量 $\vec{r}$ 都可分解成 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 的线性组合：$\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$ (x,y,z 是确定实数).

空间一点 O 及三个不共面的有序向量 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 叫空间的一个标架（仿射标架），记为 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$.

Descartes 标架：$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 为单位向量.

Descartes 直角标架：$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 为单位向量，且两两垂直.

左旋标架、右旋标架：$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 间的相互关系和左（右）手的拇指、食指、中指相同.

一. 坐标

向量的坐标(分量) $\vec{r}$ 关于标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$，$\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$,系数 x,y,z 称为 $\vec{r}$ 关于此标架的坐标或分量，记为 $\vec{r}=\{x,y,z\}$.

(1) 标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ 下，$\vec{r}=\{x,y,z\}\Leftrightarrow\vec{r}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$.

(2) 不管 $\vec{r}$ 始点是否在点 O,特别地把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的径矢.

若标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ 下，点 P 对应的的径矢 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$,则点 P 关于此标架的坐标为 x,y,z,记为 $P(x,y,z)$.

二. 空间坐标系

1. 空间坐标系取定标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ 后,空间向量集(点集)与有序数组 $x,y,z,$ 集一一对应,这种关系称为空间向量(点)的一个坐标系.

表示法：常用标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ 表示，O 叫坐标原点，$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 叫坐标向量.

几种坐标系:右旋(右手)坐标系、左旋(左手)坐标系、仿射坐标系、笛卡儿坐标系、直角坐标系.

特别约定:以后用直角坐标系时,坐标向量用 $\vec{i}\,\vec{j},\vec{k}$ 表示,即 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

坐标轴表示 $o-xyz$, 点 0 叫空间坐标系的原点,三条坐标轴 0x, oy, 0z 依次叫做 x 轴, y 轴, z 轴.

3. 卦限

三个坐标平面分空间为八个区域,每一个区域都叫卦限,卦限不包括坐标平面.

(1)卦限的排列顺序

八个区域按顺序排列, Ⅰ, Ⅱ, …, Ⅷ, 依次第Ⅰ卦限, 第二Ⅱ卦限, …, 第八卦限Ⅷ.

(2)卦限内点的坐标如下表.

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

四. 向量运算的坐标表示

1. 向量的坐标

若 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$,则 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

2. 向量的线性运算

$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 则 $\vec{a}\pm\vec{b}=\{X_1\pm X_2,Y_1\pm Y_2,Z_1\pm Z_2\}$, $\lambda\vec{a}=\{\lambda X_1,\lambda Y_1,\lambda Z_1\}$

3. 向量的共线、共面

(1)两非零向量 $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 共线的充要条件是对应分量成例,即

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$$

三个点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ 共线的充要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$

(2) 三非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面

$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\},\vec{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0$$

四个点 $A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0\text{或}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

4. 线段的定比分点

(1)对 $\overrightarrow{P_1P_2}(P_1\neq P_2)$,若点$P:\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 则称点 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 成定比 λ 的分点. 分点 P 由 λ 唯一确定; λ>0, 内分; λ<0(λ≠-1), 外分;

(2) 若 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 成定比 λ 的分点的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},x=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

中点坐标 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\ ,y=\dfrac{y_1+y_2}{2},z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$

例 已知三角形三顶点 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$,求△$P_1P_2P_3$的重心坐标.

练习：P32-3，8

复习思考题、作业题：
P32-10

下次课预习要点
向量在轴上的射影的要素。

教 学 后 记	

授课时间	第 6 周	课 次	第 2 次
章节名称	§1.6 向量在轴上的射影		
授课方式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	1.将空间向量的运算转化成线的向量的运算 2.会求向量的射影		
教学方法	讲授法		
教学重点难点	重点：利用向量间角度的关系将射影向量转化为射影 难点：射影向量与射影的区别		

一. 射影的定义

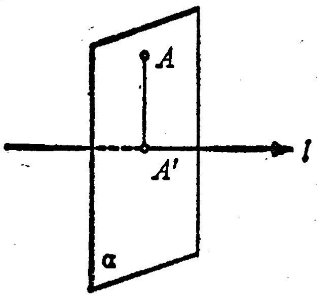
1. 点 A 在轴 L 上的射影

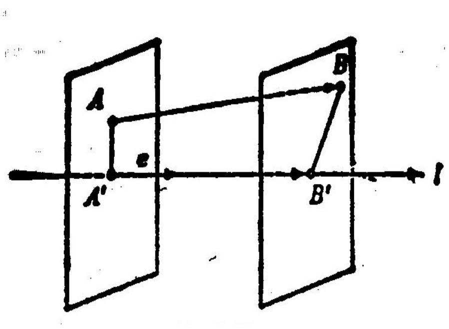
空间一点 A 与一轴l,过 A 作垂直于轴l的平面α,平面与轴l的交点A'叫点A在轴l上的射影.

2. 向量在轴上的射影

向量$\overrightarrow{AB}$的始点 A 和终点 B 在轴l上的射影分别为A',B',那么向量$\overrightarrow{A'B'}$叫作向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的射影向量. 射影向量$_l\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=x\vec{e}$.($\vec{e}$是与轴同方向的单位向量), x叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的射影, 射影$_l\overrightarrow{AB}=x$.

射影向量$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$=(射影$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$)$\vec{e}$





二. 射影的计算

1.两非零向量的夹角

$\vec{a}$,$\vec{b}$是两个非零向量,自空间任意点 O 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 到$\pi$之间，叫向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角,记做$\angle(\vec{a},\vec{b})$.

若$\vec{a}$,$\vec{b}$同向则$\angle(\vec{a},\vec{b})$=0;反向$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$;$\vec{a}$不平行于$\vec{b}$则 $0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi$.

2.向量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦

$$射影_l\ \overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta,\ \theta=\angle(l,\ \overrightarrow{AB}).$$

证 当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,结论成立. $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$时,过A,B二点分别作垂直于l轴的平面α,β它们与轴的交点分别是A',B',那么$\overrightarrow{A'B'}$=射影向量$_l$ $\overrightarrow{AB}$.作$\overrightarrow{A'B_1}=\overrightarrow{AB}$,终点$B_1$在β平面上(图1). 因β⊥$l$, 则$B_1B'\perp l$, △$A'B'B_1$为直角三角形,且

$\angle(l,\ \overrightarrow{A'B'})=\angle(l,\ \overrightarrow{AB})=\theta$,设$\vec{e}$为$l$上与$l$同方向的单位向量, 那么$\overrightarrow{A'B'}=x\vec{e}$.

所以 射影$_l$ $\overrightarrow{AB}=x$

当$0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$时, $\overrightarrow{A'B'}$与$\vec{e}$同向, $x=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta$

当$\dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi$时, $\overrightarrow{A'B'}$与$\vec{e}$反向, $x=-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|\cos(\pi-\theta)=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta$

从而当$0\le\theta\le\pi$时,总有 射影$_l$ $\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta$

可见相等的向量在同一轴上的射影相等,互反向量在同一轴上的射影互为相反数,同一向量在两方向相同的轴上的射影相等.

三. 射影的性质

1. 射影$_l$($\vec{a}+\vec{b}$)=射影$_l$ $\vec{a}$+射影$_l$ $\vec{b}$

2. 射影$_l$(λ$\vec{a}$)=λ射影$_l$ $\vec{a}$

证 1. 取$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,(图2)则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$,设$A'$,$B'$,$C'$分别是A,B,C在轴$l$上的射影,则显然有 $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.

因$\overrightarrow{A'C'}$=射影$_l$ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$=射影$_l$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}$=射影$_l$ $\overrightarrow{BC}$

所以 射影$_l$ $\overrightarrow{AC}$=射影$_l$ $\overrightarrow{AB}$+射影$_l$ $\overrightarrow{BC}$

(射影$_l$ $\overrightarrow{AC}$)$\vec{e}$=(射影$_l$ $\overrightarrow{AB}$)$\vec{e}$+(射影$_l$ $\overrightarrow{BC}$)$\vec{e}$($\vec{e}$是轴l上与轴l同方向的单位)

所以 射影$_l$($\vec{a}+\vec{b}$)=射影$_l$ $\vec{a}$+射影$_l$ $\vec{b}$

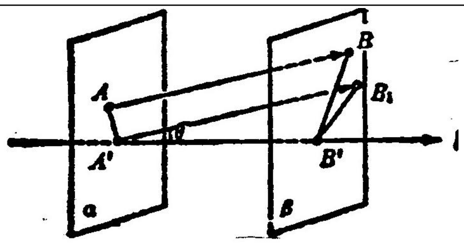


图 1

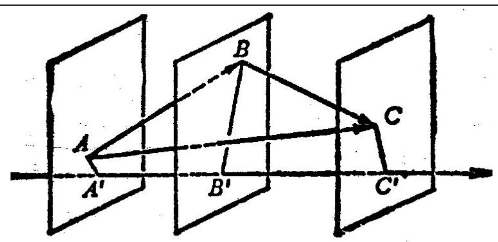


图 2

3. 如果 λ=0 或 $\vec{a}=\vec{0}$,命题成立.设 λ≠0, $\vec{a}\neq\vec{0}$,且 $\theta=\angle(l,\vec{a})$ 则当 λ>0 时,有 $\angle(l,\lambda\vec{a})=\angle(l,\vec{a})=\theta$

射影$_l$（$\lambda\vec{a}$）$=\left|\lambda\vec{a}\right|\cos\theta=\lambda\left|\vec{a}\right|\cos\theta=\lambda$ 射影$_l$ $\vec{a}$

当 λ<0 时,有 $\angle(l,\lambda\vec{a})=\pi-\angle(l,\vec{a})=\pi-\theta$

射影$_l$（$\lambda\vec{a}$）$=\left|\lambda\vec{a}\right|\cos(\pi-\theta)=\lambda\left|\vec{a}\right|\cos\theta=\lambda$ 射影$_l$ $\vec{a}$.

例 设在直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下,向量 $\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{J}+Z\vec{k}$,试证明:

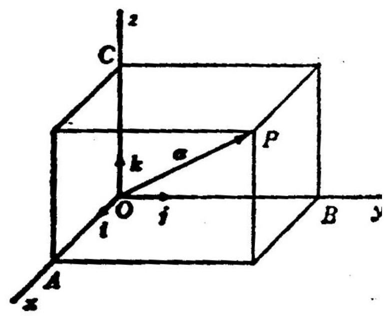
射影$_{\vec{i}}$ $\vec{a}$=X, 射影$_{\vec{j}}$ $\vec{b}$=Y, 射影$_{\vec{k}}$ $\vec{c}$=Z.

证 设径矢 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$,那么 $\vec{a}$ 在坐标轴上的射影即为 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标轴上的射影.设点 P 在 x 轴,y 轴,z 轴上的射影分别为 A,B,C,那么

射影$_{\vec{i}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$=X$\vec{i}$,

射影$_{\vec{j}}$ $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$=Y$\vec{j}$,

射影$_{\vec{k}}$ $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$=Z$\vec{k}$



由向量在轴上的射影定义得

射影$_{\vec{i}}$ $\vec{a}$=X, 射影$_{\vec{j}}$ $\vec{b}$=Y, 射影$_{\vec{k}}$ $\vec{c}$=Z.

复习思考题、作业题:

P37-1

下次课预习要点

向量的数量积的定义，结果是向量还是数量？

教 学 后 记	

授课时间	第　7　周	课　次	第　1-2 次
章　节 名　称	§1.7 两向量的数量积		
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1. 理解数量积概念及其几何意义, 2.掌握数量积的运算规律, 3.在笛卡儿直角标架中的表示法		
教　学 方　法	讲练结合法		
教　学 重　点 难　点	重点：用向量的分量表示数量积 难点：在直角坐标下讨论向量的方向余弦、交角问题		

一. 数量积概念

1.物理实例

2.数量积定义

向量$\vec{a}$,$\vec{b}$的模和它们夹角的余弦的乘积叫做向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$的数量积(内积), 记做 $\vec{a}\cdot\vec{b}$或$\vec{a}\vec{b}$, 即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

注：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

证 $\Rightarrow$由定义易知.$\Leftarrow$ 若$\vec{a}$,$\vec{b}$ 均不为$\vec{0}$时, 则有$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=0$,从而$\vec{a}\perp\vec{b}$;若$\vec{a}$,$\vec{b}$中有零向量,由于零向量的方向不定,可以把它看成与任意向量垂直, 所以$\vec{a}\perp\vec{b}$,得证.

二.运算规律

1）交换律　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2）关于数因子的结合律　　$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

3）分配律　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

推论: $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})+\mu(\vec{b}\cdot\vec{c})$

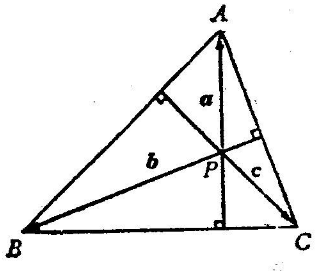
由上可知,向量数量积的运算可以象多项式的乘法那样进展开

例 1 证明平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和.

证　如图, 在平行四边形 OACB 中, 设两边为$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,

对角线$\overrightarrow{OC}=\vec{m},\overrightarrow{BA}=\vec{n}$,那么$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$,

于是 $\vec{m}^2+\vec{n}^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ 即 $|\vec{m}|^2+|\vec{n}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$.



例 3 三角形的三条高交于一点.

证 设三角形 ABC 的 BC,CA 两条边上的高交于 P 点,再设 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}, \overrightarrow{PB}=\vec{b}, \overrightarrow{PC}=\vec{c}$,则 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$

因 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$,所以 $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$=0,即 $\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$;又因为 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$,

所以 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$, $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}$;从而 $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$ 即 $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$,所以 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$. 如此证明了点 P 在三角形 ABC 的第三条边 AB 的高线上,命题得证.

4) 课堂练习 • 判断下列关系式是否成立. ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为两两不共线的向量)

① $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$　　　　② $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}^2\vec{b}$

③ 若 $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}$,则 $\vec{a}=\vec{b}$.

二、**内积的坐标表示**

1.内积的表示(在直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下,用向量的分量表示数量积.)

设 $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$, $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$,那么 $\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$

推论 设 $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$,那么 $\vec{a}\cdot\vec{i}=X$, $\vec{a}\cdot\vec{j}=Y$, $\vec{a}\cdot\vec{k}=Z$.

2.两点距离与方向余弦

(1) 设 $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$,那么 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$;空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离是 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(2)向量与坐标轴(或坐标向量)所成的角叫做向量的*方向角*,方向角的余弦叫做向量的*方向余弦*.一个向量的方向完全可由它的方向角确定,向量的方向余弦也可用向量的分量来表示.

①非零向量 $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\cos\beta=\frac{Y}{|\vec{a}|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\cos\gamma=\frac{Z}{\vec{a}}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 其中 α,β,γ 分别为向量 $\vec{a}$ 与 x 轴, y 轴, z 轴的交角, 即向量的三个方向角.

推论 向量 $\vec{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec{b}\{X_2,Y_2,Z_2\}$ 相互垂直 $\Leftrightarrow X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$

③ 在平面直角坐标系下,平面的向量也有完全类似的结论.

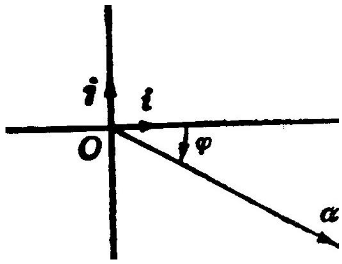
设$\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}$,$\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}$,那么$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2$,$\vec{a}\cdot\vec{i}=X$,$\vec{a}\cdot\vec{j}=Y$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$;平面两点$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的距离是$P_2(x_2,y_2,z_2)$的距离是$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.向量$\vec{a}$的方向余弦$\cos\alpha,\cos\beta$可以表示为:

$$\cos\alpha=\frac{X_1}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^{\ 2}+Y_1^{\ 2}}},\ \cos\beta=\frac{Y_1}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^{\ 2}+Y_1^{\ 2}}},\ 且\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1.$$

④在平面的情形,还可以单独用从$\vec{i}$到$\vec{a}$的有向角(P_{35}脚注)来决定向量$\vec{a}$的方向.设$\angle(\vec{i},\vec{a})=\varphi$,那么$\cos\alpha=\cos\varphi$,$\cos\beta=\cos\angle(\vec{j},\vec{a})$

$=\cos\angle(\vec{j},\vec{a})=\cos(\angle(\vec{j},\vec{i})+\angle(\vec{i},\vec{a}))=\cos(-\frac{\pi}{2}+\varphi)=\sin\varphi$.



因此,平面上的向量$\vec{a}$可写成$\vec{a}=\left|\vec{a}\right|(\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi)$

向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的交角的余弦为$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^{\ 2}+Y_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{X_2^{\ 2}+Y_2^{\ 2}}}$.

向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直的充要条件为$X_1X_2+Y_1Y_2=0$.

例 1 已知三点 A(1,0,0),B(3,1,1),C(2,0,0),且 $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{c}$,求:

(1) $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角, (2) $\vec{a}$在$\vec{c}$上的射影.

复习思考题、作业题:
P46-1(2)2

下次课预习要点
向量积与数量积的区别

教 学 后 记	

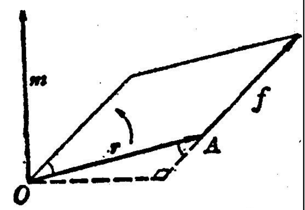
授课时间	第　8 周	课　次	第 1-2 次
章　节 名　称	§ 1.8 两向量的向量积 习题课		
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1.了解向量积的定义 2.理解向量积的运算规律及应用		
教　学 方　法	讲练结合法		
教　学 重　点 难　点	重点：向量积的运算规律及应用 难点：向量积运算规律的证明		

教学步骤及内容：

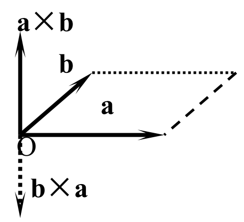
一. 向量积的概念

1. 定义

物理中的力矩是一个向量,它实际是两向量的向量积的运算果.如果力 $\vec{f}$ 的作用点是 A, $\overrightarrow{OA}=\vec{r}$,那么力矩 $\vec{m}=\vec{r}\times\vec{f}$.其大小为 $|\vec{r}||\vec{f}|\sin\angle(\vec{r},\vec{f})$.



两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积(外积)是一个向量, 记做 $\vec{a}\times\vec{b}$ ($[\vec{a}\vec{b}]$), 它的模是 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ 方向与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都垂直,并且按 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 这个顺序构成右手标架.



考察以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积可知:

2. 两不共向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积的模,等于以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为边构成的平行四边形的面积.

3. 两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

二. 运算规律

1. 反交换律性　　$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

2. 数乘因子的结合律　　$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

3. 分配律　　$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

推论 1 $(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b})$

推论 2 $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}$

证 3. 分配律. 如果$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中至少有一个零向量,或$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为一组共线向量,则显然成立.下证不是在这种情况.

设$\overrightarrow{c^0}$为$\vec{c}$的单位向量,先证明$(\vec{a}+\vec{b})\times\overrightarrow{c^0}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^0}+\vec{b}\times\overrightarrow{c^0}$成立. 用作图法作出向量$\vec{a}\times\overrightarrow{c^0}$. 通过向量$\vec{a}$与$\overrightarrow{c^0}$的公共始点 O 作平面$\pi$垂直于$\overrightarrow{c^0}$(如图 1),自向量$\vec{a}$的终点 A 引$AA_1\perp\pi$, A_1为垂足,由此得向量$\vec{a}$在平面π上的射影向量$\overrightarrow{OA_1}$,再将$\overrightarrow{OA_1}$在平面π上绕 O 点依顺时针方向(自$\overrightarrow{c^0}$的终点看平面)旋转90°,得$\overrightarrow{OA_2}$,那么$\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^0}$.

设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$那么$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$,并设$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$分别为$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OB}$在垂直于$\overrightarrow{c^0}$的平面$\pi$上的射影向量(图2),再将$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$在平面π内分别绕点O依顺时针方向(自$\overrightarrow{c^0}$的终点看平面)旋转90°,得$\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{OB_2}$依上述作图法可知,

$\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^0}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=\vec{b}\times\overrightarrow{c^0}$, $\overrightarrow{OB^2}=(\vec{a}+\vec{b})\times\overrightarrow{c^0}$,又$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$所以有

$(\vec{a}+\vec{b})\times\overrightarrow{c^0}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^0}+\vec{b}\times\overrightarrow{c^0}$. 两边同乘$|\vec{c}|$, $(\vec{a}+\vec{b})\times|\vec{c}|\overrightarrow{c^0}=\vec{a}\times|\vec{c}|\overrightarrow{c^0}+\vec{b}\times|\vec{c}|\overrightarrow{c^0}$所以有$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}$.

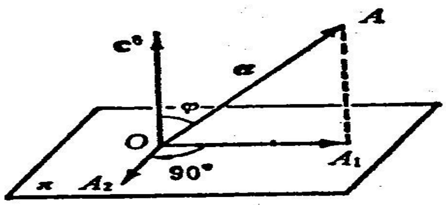


图 1

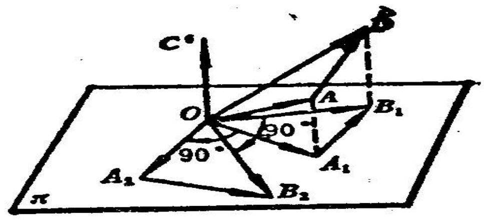


图 2

向量的向量积可以象多项式的乘法那样进行展开,只不过要注意反交换律.

三. 向量积的坐标表示

如果$\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k},\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$,那么$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\end{vmatrix}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}Y_1&Z_1\\Y_2&Z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}Z_1&X_1\\Z_2&X_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1&Y_1\\X_2&Y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

例 3 已知空间三点 $A(1,2,3), B(2,-1,5), C(3,2,-5)$, 试求(1)ΔABC 的面积;

(2) ΔABC 的 AB 边上的高.

成相应的练习题

二、评讲习题

1.(1)$\vec{a}+2\vec{b}=\{-1,2,1\}+2\{0,1,1\}=\{-1,2,1\}+\{0,2,2\}=\{-1,4,3\}$

(2)$\vec{a}-\vec{b}=\{-1,2,1\}-\{0,1,1\}=\{-1,1,0\}$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

(3)$\vec{a}\bullet\vec{b}=-1\times0+2\times1+1\times1=3$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\left|\vec{\mathrm{b}}\right|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{\mathrm{b}}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle(\vec{a},\vec{b})=30^0$

$$(4)\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=\{1,1,-1\}$$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

(此题也可以用公式$S_{\square}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{\mathrm{b}}\right|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$求得)

(5)$\because\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$且$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{\mathrm{b}}$

设单位向量为$\vec{\mathrm{c}}$,则

$$\vec{\mathrm{c}}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\pm\frac{\{1,1,-1\}}{\sqrt{3}}=\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

2.$\vec{p}\perp\vec{q}\Leftrightarrow\vec{p}\bullet\vec{q}=0$

$\because\ \vec{p}\bullet\vec{q}=\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)(\lambda\vec{a}+17\vec{b})$

$=3\lambda\vec{a}^2+(51-\lambda)\vec{a}\vec{b}-17\vec{b}^2$

$=3\lambda\left|\vec{a}\right|^2+(51-\lambda)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2}{3}\pi-17\left|\vec{b}\right|^2$

$=17\lambda-680$

$=0$

$\therefore\lambda=40$

3.$\vec{a}-\vec{d}$与$\vec{b}-\vec{c}$共线$\Leftrightarrow\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$ $\because\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ $\therefore\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\times(\vec{b}-\vec{c})$ $=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$ $=\vec{c}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$ $=\vec{c}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d}$ $=\vec{0}$ 结论得证。
复习思考题、作业题： P52-2（1）（2）
下次课预习要点 混合积的概念及几何意义

教　学 后　记	

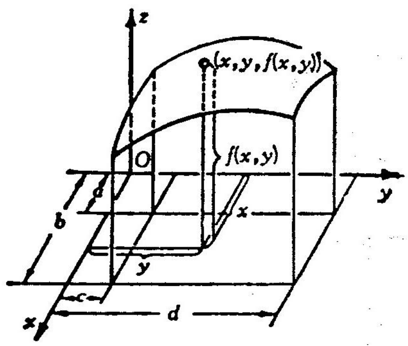
授课时间	第 9 周	课 次	第 1-2 次
章节名称	第二章 轨迹与方程		
授课方式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	4
教学目的要求	1 正确理解空间曲面与曲面方程的意义 2 了解空间曲线的一般方程		
教学方法	讲授法		
教学重点难点	重点：据已知条件建立空间曲面方程与曲线方程 难点：几何条件转化为向量		

教学步骤及内容：

思政元素：从“动”与“静”的辩证思维角度出发，结合数学科学的发展史，引导学生树立正确的世界观、人生观。

一.曲面的一般方程：

1. 空间中建立直角坐标系，把曲面（作为点的轨迹）上的点的特征性质，用点的坐标 x, y 与 z 之间的关系式来表达，一般用方程



$$F(x,y,z)=0 \qquad （1）$$

或者 $$z=f(x,y) \qquad （2）$$

来表达.

2. 定义 2.2.1 如果一个方程(1)或(2)与一个曲面 $\sum$ 有着关系: **a.** 满足方程(1)或者(2)的 (x,y,z) 是曲面 $\sum$ 上的点的坐标; **b.** 曲面 $\sum$ 上任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程(1)或(2),那么方程(1)或(2)就叫做**曲面 $\sum$ 的方程**,而曲面 $\sum$ 就叫做**方程(1)或(2)的图形.**

例 1 求连结两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

例 2 求坐标面 xoz 和 yoz 所成二面角的平分面方程.

3.球面方程的特征

球面方程：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

二、曲线的一般方程

空间曲线,通常视为两个曲面的交线,设两曲面 $F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$ 交于曲线 L.

L 上的 (x,y,z) 点满足 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$,上述方程叫**曲线 L 的一般方程**.

例 1、 写出 z 轴的方程。

解：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\end{cases}$

例 2、 求在 x0y 坐标平面上，半径等于 R，圆心为原点的圆的方程。

练习：P92-1，2（1）（2）

复习思考题、作业题：

P92-7，8

下次课预习要点

平面的一般方程

教　学 后　记	

授课时间	第 10 周	课 次	第 1-2 次
章 节 名 称	§3.1 平面的方程 §3.2 平面与点的相关位置		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1. 深刻理解并掌握平面和三元一次方程之间的相互关系 2. 掌握平面的各种形式的方程, 3. 熟记点到平面的距离公式 4. 了解离差的概念 5. 了解平面划分空间问题		
教 学 方 法	讲练结合法		
教 学 重 点 难 点	重点：平面的点位式方程 难点：各种形式方程的区分		

一. 平面的点位式方程

1. 平面π的方位向量:与π平行且不共线的任意两向量.

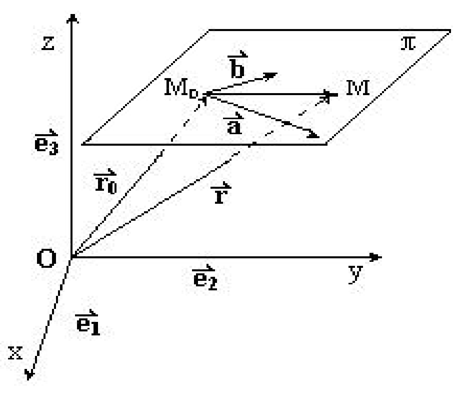
2. 平面π的点位式方程:

①任一向量可由通过它的一点即方位向量确定.

②设平面π过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,一对方位向量$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$

设点$M(x,y,z)$为平面π上任一点,$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}$，$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$根据$\overrightarrow{M_0M}$,$\vec{a}$,$\vec{b}$共面而$\vec{a}$,$\vec{b}$不共线,有$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$,即$\vec{r}-\vec{r_0}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 故

$$\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} \qquad (3.1\text{-}1)$$



这就是平面π的**向量式的参数方程**,（λ，μ为参数)。

平面π的**坐标式的参数方程**

$$\begin{cases} x=x_0+x_1\lambda+x_2\mu \\ y=y_0+y_1\lambda+y_2\mu \\ z=z_0+z_1\lambda+z_2\mu \end{cases}$$

（3.1-2）

将(1)式两边与$\vec{a}\times\vec{b}$作数性积得

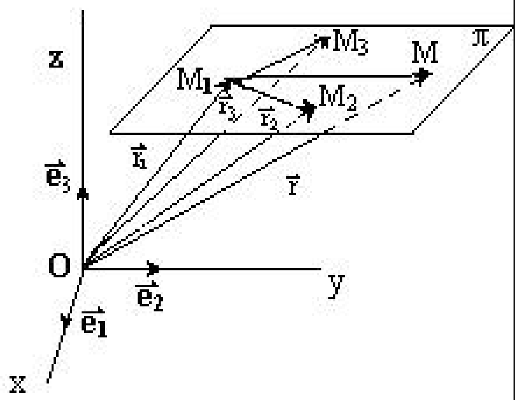
$$(\vec{r}-\vec{r_0},\vec{a},\vec{b})=0 \qquad （3.1-3）$$

从（3.1-20）消去参数 u ,v 得

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0 \qquad （3.1-4）$$

(3.1-1) (3.1-2) (3.1-3) (3.1-4)都叫做**平面π的点位式方程**

例 1、已知不共线三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$求通过这三点的平面方程。



③平面的**三点式方程**与**截距式方程**

(1)平面的三点式方程

平面π过不共线三点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$,有平面$\pi$的向量式参数方程

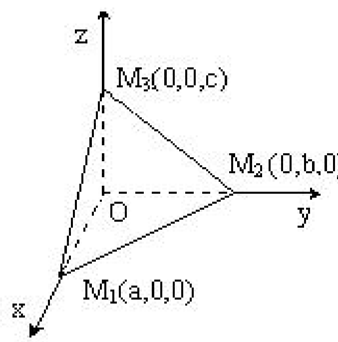
$$\vec{r}=\vec{r_1}+\lambda(\vec{r_2}-\vec{r_1})+\mu(\vec{r_3}-\vec{r_1}) \qquad 其中\ \vec{r}=\overrightarrow{OM},\vec{r_i}=\overrightarrow{OM_i}.$$

(2)平面的截距式方程

平面π与三坐标轴的交点

$M_1(a,0,0),M_2(0,b,0),M_3(0,0,c)$,其中$abc\neq 0$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



二. 平面的一般方程

1. 空间中平面的基本定理（**定理 3.1.1**）

①空间中任一平面可由点位确定,将其方程展开

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A,B,C不全为零) \qquad （3.1-10）$$

即空间的任一平面是关于 x,y,z 的三元一次方程.

②任一关于关于 x,y,z 的三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$,不妨 $A\neq 0$ 设可变为

$A^2(x^2+\frac{D}{A})+ABy+ACz=0$

即 $\begin{vmatrix} x+\dfrac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix}=0$ 它表示了一个平面由点 $M_0(-\dfrac{D}{A},0,0)$ 和方位向量 $\{B,-A,0\}$ 与 $\{C,0,-A\}$ 确定.

方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 叫平面的一般方程.

2. 特殊情形

①常数项为零, $Ax+By+Cz=0 \Leftrightarrow$ 平面过原点

② x,y,z 系数有一个为零

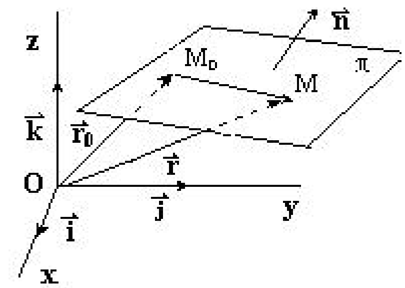
③ x,y,z 系数有两个为零

三. 平面的法式方程

任何一平面可由通过它的一点及垂直与它的一个向量确定.

1. 平面的法向量:与已知平面垂直的非零向量

2. 平面的点法式方程



设平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,法矢 $\vec{n}=\{A,B,C\}$;

记 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上任一点, $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$;

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$,即 $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0$.

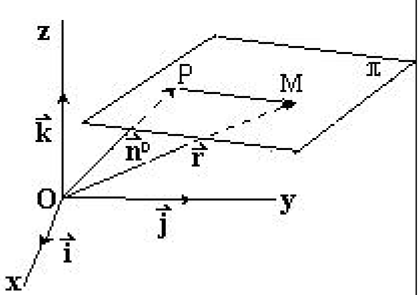
可表示成 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

可见,直角坐标系下平面的一般方程 x,y,z 前系数的几何意义.

3. 平面的法式方程

①法式方程

在确定平面的点法式方程时,若特别地点 M_0 取自原点 O 向平面 π 所引垂线的垂足 P ,平面 π 的法向量取单位法向量 $\overrightarrow{n_0}$,且 $\overrightarrow{n_0}$ 的正向与向量 $\overrightarrow{OP}$ 同(平面不过原点), $\overrightarrow{n_0}$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任选一个(平面过原点).



设点 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上任一点,

$\overrightarrow{OM}=\vec{r},\left|\overrightarrow{OP}\right|=p$ 则由于 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{n^0}p$,从而

平面 π 的方程 $\overrightarrow{n^0}\cdot(\vec{r}-\overrightarrow{n^0}p)=0$

即 $\overrightarrow{n^0}\cdot\vec{r}-p=0$ (向量式法矢方程)

若取 $\overrightarrow{n^o}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 则

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \quad \text{(坐标式法矢方程)}$$

②法式方程特点

(1)一次项系数是单位向量的分量,平方和等于 1;

(2)常数项 $-p\le 0$

③平面方程法式化

比较平面一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$,法矢 $\{A,B,C\},\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

可表 $\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0$,变化为法式方程 $\overrightarrow{n^0}\cdot\vec{r}-p=0$.

只需将上方程乘以 $\lambda=\pm\dfrac{1}{|\vec{n}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (法式化因子)

其中 λ 的符号选取一个,使得 $\lambda D=-p\le 0$ (当 $D\ne 0$ 时, λ 与 D 异号, $D=0$ 时 λ 符号可以任意选取)

. 点与平面间的距离

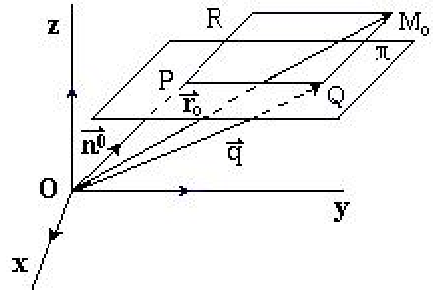
1. 概念

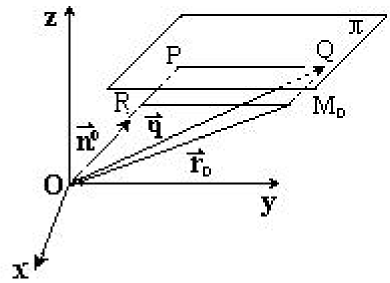
定义 3.2.1 一点与平面上的点之间的最短距离，叫做该**点与平面之间的距离**。

定义 3.2.2 自空间一点 M_0 到平面 π 引垂线,其垂足为 Q ,那么向量 $\overrightarrow{QM^0}$ 在平面 π 的单位法向量 $\overrightarrow{n^0}$ 上的射影叫做点与 M_0 的**离差**,记做 $\delta=\text{射影}_{\overrightarrow{n^0}}\overrightarrow{QM_0}$

可见,点关于的离差 δ : $\begin{cases}\delta>0 & M_0\text{位于}\overrightarrow{n^0}\text{所指向的一侧,即}\overrightarrow{QM^0}\text{与}\overrightarrow{n^0}\text{同向}\\ \delta<0 & M_0\text{位于平面}\pi\text{的另一侧,即}\overrightarrow{QM^0}\text{与}\overrightarrow{n^0}\text{反向}\\ \delta=0 & M_0\text{位于平面}\pi\text{上}\end{cases}$

离差的绝对值 $|\delta|$,就是 M_0 与平面 π 之间的**距离** d .





2. 离差的计算

定理 3.2.1 M_0与平面π间的离差为$\delta = \overrightarrow{n^0} \cdot \overrightarrow{r_0} - p$ （$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$）

证 根据离差的定义，$\delta =$ 射影$_{\overrightarrow{n^0}} \overrightarrow{QM_0} = \overrightarrow{n^0} \cdot (\overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{n^0} \cdot (\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{q})$,而点$Q$在平面$\pi$上,因此$\overrightarrow{n^0} \cdot \overrightarrow{q} = p$,所以 $\delta = \overrightarrow{n^0} \cdot \overrightarrow{r_0} - p$

推论 1 点$M_0(x_0, y_0, z_0)$与平面π间的离差 $\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$

推论 2 点$M_0(x_0, y_0, z_0)$与平面$Ax + By + Cz + D = 0$间的距离d为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

二. 平面划分空间问题(三元一次不等式的几何意义)

设平面π的一般方程为$Ax + By + Cz + D = 0$,那么空间任何一点$M(x, y, z)$对平面的离差为 $\delta = \lambda(Ax + By + Cz + D)$，式中$\lambda$为平面$\pi$的法化因子,又有

$$Ax + By + Cz + D = \frac{1}{\lambda}\delta$$

1. 平面划分空间问题

① 对于平面π同侧的点，离差δ符号相同(当M_1与M_2是π同侧的点时,$\overrightarrow{Q_1M_1}$与$\overrightarrow{Q_2M_2}$同向)

② 对于平面π异侧的点，离差δ有不同的符号(当M_1与M_2是π异侧的点时,$\overrightarrow{Q_1M_1}$与$\overrightarrow{Q_2M_2}$反向)

2. 二元一次不等式的几何意义

平面$Ax + By + Cz + D = 0$把空间划分为两个部分:

一侧的点: $Ax + By + Cz + D > 0$

另一侧的点：$Ax+By+Cz+D<0$ 平面上的点：$Ax+By+Cz+D=0$
复习思考题、作业题： P104-1，2 P109-2
下次课预习要点 点与平面的位置关系

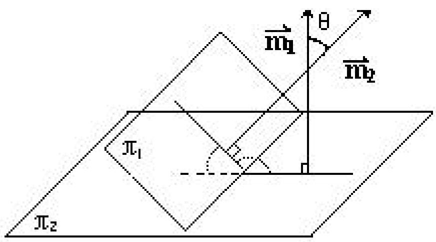
教　学 后　记	

授课时间	第 11 周	课 次	第 1-2 次
章 节 名 称	§3.3 两平面的相关位置		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1.会利用向量判断两平面的位置关系 2.会求两平面的夹角		
教 学 方 法	讲练结合法		
教 学 重 点 难 点	重点：平面的位置关系 难点：两平行平面的距离		

空间两个平面的相关位置有三种情况:相交、平行和重合. 当且仅当两平面由于一部分公共点时它们相交, 当且仅当两平面有一部分公共点时它们互相平行, 当且仅当一个平面上的所有点就是另一个平面上的所有点时, 这两平面重合.

设两平面的方程为 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



定理 3.3.1

两平面相交的充要条件是 $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

两平面平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$

两平面重合的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

直角坐标系下,两平面π_1与π_2的法向量分别为:

$$\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}，\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$$

当且仅当$\overrightarrow{n_1}$不平行于$\overrightarrow{n_2}$,两平面π_1与π_2相交;当且仅当$\overrightarrow{n_1}$平行于$\overrightarrow{n_2}$,π_1与π_2重合.

两平面π_1与π_2的二面角用$\angle(\pi_1,\pi_2)$来表示,两平面的法向量$\overrightarrow{n_1}$与$\overrightarrow{n_2}$的夹角记为$\theta=\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$. 显然有$\angle(\pi_1,\pi_2)=\theta$或（$\pi-\theta$).

因此 $\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+B_1{}^2}\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+B_2{}^2}}$

显然两平面π_1与π_2互相垂直的充要条件是$\angle(\pi_1,\pi_2)=0$($\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=0$).

或是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

定理 3.3.2 平面π_1与π_2互相垂直的充要条件是$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

复习思考题、作业题：

P111-2，3

下次课预习要点

空间直线的标准式方程

教　学 后　记	

授课时间	第　12　周	课　次	第　1-2　次		
章　节 名　称	§3.4 空间直线的方程				
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1.理解平面的标准式方程 2.掌握直线各种形式方程的转化				
教　学 方　法	讲练结合法				
教　学 重　点 难　点	重点：直线的标准方程 难点：将直线的一般式方程转化为标准方程				

一. 有直线上一点与直线的方向所决定的直线的方程

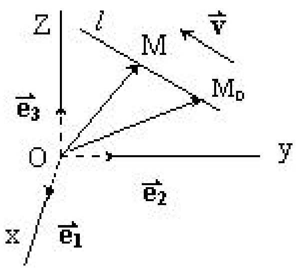
1. 直线的方向向量

空间给定了一点 M_0 与一个非零向量 $\vec{v}$,那么通过点 M_0 且与向量 $\vec{v}$ 平行的直线 l 就被唯一确定,向量 $\vec{v}$ 叫直线 l 的**方向向量**.

任何一个与直线 l 平行的非零向量都可以作为直线 l 的方向向量.

2. 直线的点向式方程

直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$. 设 $M(x,y,z)$ 为 l 上任意一点,$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$,由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{v}$(非零向量)共线,则



$$\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{v} \quad 即$$

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v} \qquad (3.4\text{-}1)$$

（3.4-1）叫做**直线 l 的向量式参数方程**，（其中 t 为参数）。

如果设 $\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ ， $\vec{r}=\{x,y,z\}$ 又设 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$，那么(3.4.1)式得

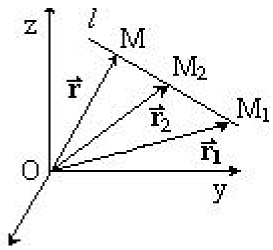
$$\begin{cases} x=x_0+Xt \\ y=y_0+Yt \\ z=z_0+Zt \end{cases} \qquad (3.4\text{-}2)$$

（3.4-1）叫做**直线 l 的坐标式参数方程。**

消参数 t 即得 $\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ (3.4-3)

(3.4-3)叫做**直线 l 的对称式方程**或称**直线 l 的标准方程**。

例 1 求通过空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程。



解 取 $\vec{v}=M_1\vec{M}_2$ 作为直线 l 的方向向量，设 $M(x,y,z)$ 为直线 l 上的任意点（如右图），那么 $\vec{r}=O\vec{M}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,所以直线 l 的向量式参数方程为:

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1);\qquad \text{（3.4-4）}$$

坐标式参数方程为 $\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1=(y_2-y_1)\\ z=z_1+t(z_2-z_1)\end{cases}$ （3.4-5）

对称式方程为 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ （3.4-6）

方程（3.4-4）（3.4-5）（3.4-6）都叫做**直线 l 的两点式方程**。

3. 直线的方向数

①取直线 l 的方向向量为 $\overrightarrow{v^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则直线的方程为

$\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\overrightarrow{v^0}$ (参数方程) 或 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\cos\beta\\ z=z_0+t\cos\gamma\end{cases}$

标准方程 $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta}=\dfrac{z-z_0}{\cos\gamma}$

由此可见参数 t 的几何意义: $|t|$ 为直线 l 上点 M 与点 M_0 之间的距离.

②直线的几个问题

Ⅰ. 直线的方向角与方向余弦:直线的方向向量的方向角与方向.

Ⅱ. 直线的方向数:直线的方向向量的分量 X,Y,Z 或与之成比例的一组数 l,m,n

Ⅲ. 直线的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 与方向数 l,m,n 之间的关系

$$\cos\alpha=\pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\cos\beta=\pm\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\cos\gamma=\pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

4. 直线的两点式方程

例:求空间直角坐标系中 X 轴的方程

参数方程 标准方程 $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$

二. 直线方程的一般形式

1. 一般方程:设有两平面的方程为

$$\left.\begin{aligned}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\}$$

其中, $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$. 则上述方程组称为**空间直线 l 的一般方程**.

2. 直线的射影式方程

由于直线的表示法不唯一,通常取简单的两平面来表示直线.

如 将一般方程(特殊的一般方程)化为 $\begin{cases}x=az+c\\ y=bz+d\end{cases}$ (**直线的射影式方程**).

3. 直线一般方程与标准方程的互化

① 标准方程化为一般方程.(方向数不全为零)

② 一般方程化为标准方程

一般方程 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

(1)确定直线的两平面法矢 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 的 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ 为直线的一个方向向量.

取方程组的一组特解得直线 l 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 化得直线标准方程:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

例题 P119-1、4

复习思考题、作业题:

P119-3

下次课预习要点

直线与平面的位置关系有哪些，怎么判断

教　学 后　记	

授课时间	第 13 周	课 次	第 1-2 次
章 节 名 称	§3.5 直线与平面的相关位置		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1. 会运用向量判断直线与平面的位置关系 2. 会求直线与平面的交角		
教 学 方 法	讲练结合法		
教 学 重 点 难 点	重点：直线与平面的位置关系 难点：直线与平面的交点与交角		

教学步骤及内容：

三. 有直线上一点与直线的方向所决定的直线的方程

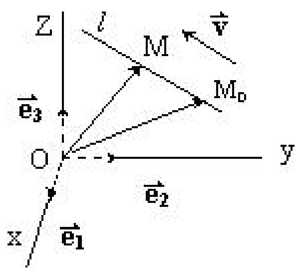
1. 直线的方向向量

空间给定了一点M_0与一个非零向量$\vec{v}$,那么通过点M_0且与向量$\vec{v}$平行的直线l就被唯一确定,向量$\vec{v}$叫直线l的**方向向量**.

任何一个与直线l平行的非零向量都可以作为直线l的方向向量.

2. 直线的点向式方程

直线l过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,方向向量$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$. 设$M(x,y,z)$为l上任意一点,$\overrightarrow{OM_0}=\overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$,由于$\overrightarrow{M_0M}$与$\vec{v}$(非零向量)共线,则



$\vec{r}-\overrightarrow{r_0}=t\vec{v}$ 即

$$\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\vec{v} \qquad (3.4\text{-}1)$$

（3.4-1）叫做**直线 l 的向量式参数方程**，（其中 t 为参数）。

如果设 $\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ ， $\vec{r}=\{x,y,z\}$ 又设 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$，那么(3.4.1)式得

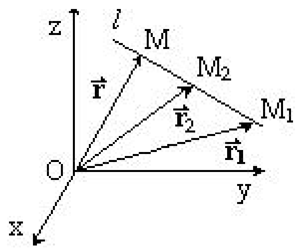
$$\begin{cases} x=x_0+Xt \\ y=y_0+Yt \\ z=z_0+Zt \end{cases} \qquad (3.4\text{-}2)$$

（3.4-1）叫做**直线 l 的坐标式参数方程**。

消参数 t 即得 $\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$ (3.4-3)

(3.4-3)叫做**直线 l 的对称式方程**或称**直线 l 的标准方程**。

例 1 求通过空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程。



解 取 $\vec{v}=M_1\vec{M}_2$ 作为直线 l 的方向向量，设 $M(x,y,z)$ 为直线 l 上的任意点（如右图），那么 $\vec{r}=O\vec{M}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,所以直线 l 的向量式参数方程为：

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t(\vec{r}_2-\vec{r}_1); \qquad (3.4\text{-}4)$$

坐标式参数方程为 $\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1=(y_2-y_1) \\ z=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}$ （3.4-5）

对称式方程为 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ （3.4-6）

方程（3.4-4）（3.4-5）（3.4-6）都叫做**直线 l 的两点式方程**。

3. 直线的方向数

①取直线 l 的方向向量为 $\overrightarrow{v^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则直线的方程为

$$\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\overrightarrow{v^0}\ (\text{参数方程})\ \text{或} \begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\cos\beta \\ z=z_0+t\cos\gamma \end{cases}$$

标准方程 $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta}=\dfrac{z-z_0}{\cos\gamma}$

由此可见参数 t 的几何意义: $|t|$ 为直线 l 上点 M 与点 M_0 之间的距离.

②直线的几个问题

Ⅰ. 直线的方向角与方向余弦:直线的方向向量的方向角与方向.

Ⅱ. 直线的方向数:直线的方向向量的分量 X,Y,Z 或与之成比例的一组数 l,m,n

III. 直线的方向余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$与方向数 l,m,n 之间的关系

$$\cos\alpha = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \pm\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

4. 直线的两点式方程

例:求空间直角坐标系中 X 轴的方程

参数方程 标准方程 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$

四. 直线方程的一般形式

1. 一般方程:设有两平面的方程为

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

其中, $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$. 则上述方程组称为**空间直线l的一般方程**.

2. 直线的射影式方程

由于直线的表示法不唯一,通常取简单的两平面来表示直线.

如 将一般方程(特殊的一般方程)化为$\begin{cases} x = az + c \\ y = bz + d \end{cases}$(**直线的射影式方程**).

3. 直线一般方程与标准方程的互化

③ 标准方程化为一般方程. (方向数不全为零)

④ 一般方程化为标准方程

一般方程$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

(1)确定直线的两平面法矢$\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$的$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$为直线的一个方向向量.

取 方 程 组 的 一 组 特 解 得 直 线 l 上 一 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 化 得 直 线 标 准 方 程 :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

例 P123-1、2

<table>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：
练习 P123-4</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点
直线与点的位置关系</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

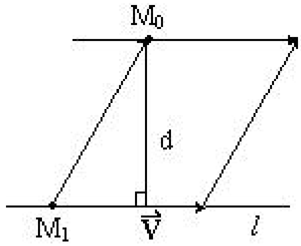
授课时间	第　14　　周	课　次	第 1- 2　次		
章　节 名　称	§3.6 空间直线与点的相关位置				
授　课 方　式	理论课（　√　）、实践课（　　）、习题题（　　）、其它（　　）			教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1. 会判断直线与点的位置关系 2. 理解点到直线距离的向量内涵。				
教　学 方　法	讲授法				
教　学 重　点 难　点	重点:点到直线的距离 难点:点到直线的距离				

空间直线与点的相关位置有两种情况,即点在直线上与点不在直线上,点在直线上时,点的坐标满足直线的方程.当点不在直线上时,则考察点到直线的距离.

定义 3.6.1　一点与空间直线上的点之间的最短距离叫做该点与空间直线间的**距离**。

在空间直角坐标系下,给定空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与直线

$$l:\quad \frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$$



$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线 l 上一点, $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 为直线 l 的方向向量.

考察 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 和向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形的面积 $\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|$.

显然,点 M_0 到直线 l 的距离 d 就是这平行四边的对应于以 $|\vec{v}|$ 为底的高.

$$d=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|v|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

<table>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：
P125-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点
空间两直线的相关位置</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

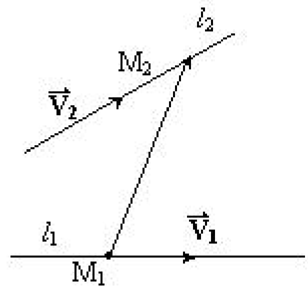
授课时间	第 15 周	课 次	第 1-2 次	
章 节 名 称	§3.7 空间两直线的相关位置			
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1.掌握第一类换元积分法 2.了解第二类换元积分法			
教 学 方 法	讲练结合法			
教 学 重 点 难 点	重点：第一类换元积分法 难点：如何凑微分			

一.空间两直线的相关位置

设直线l_1与l_2的方程为:

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \qquad (1)$$

$$l_2:\ \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2} \qquad (2)$$



定理 3.7.1 判断两直线（1）与（2）相关位置的充分必要条件是

1） 异面:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

2） 相交: $\Delta=0,\ X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$

3） 平行: $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

4） 重合: $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

二.空间两直线的夹角

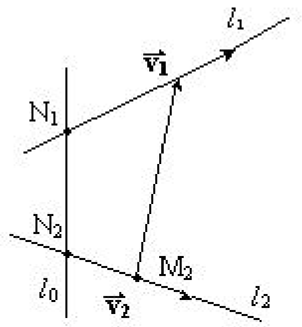
定义 3.7.1 平行于空间两直线l_1,l_2的两向量间的角,叫做**空间两直线的夹角**.记做$\angle(l_1,l_2)$。

定理 3.7.2 在直角坐标系里,空间两直线(1)与(2)的夹角的余弦为:

$$Cos\angle(l_1,l_2)=\pm\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$$

推论： 两直线(1)与(2)垂直的充要条件是:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$$



三. 两异面直线间的距离与公垂线方程

设两异面直线 l_1 与 l_2 与它们的公垂线 l_0 的交点分别为 N_1,N_2, 则 l_1 与 l_2 之间的距离

$$\text{d}=\left|\overrightarrow{N_2N_1}\right|=\text{射影}\,l_0\ \left|\overrightarrow{N_2N_1}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|.(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2})}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}$$

两异面直线(1)与(2)间的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_1-z_2\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}^2}}$$

公垂线 l_0 的方程为:
$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

例 P129-例 1，例 2

复习思考题、作业题：
P132-2（2）,3(1)

下次课预习要点
平面束的概念

教 学 后 记	

授课时间	第 16 周	课 次	第 1-2 次
章 节 名 称	4.1 柱面 4.2 锥面 4.3 旋转曲面		
式 课	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	4
要教学 目 的	1. 掌握消去参数法，能运用此法熟练地求出一般柱面的方程. 2. 能识别母线平行于坐标轴的柱面方程。		
教 学 方 法	讲练结合法		
难教学 重 点	重点：柱面的定义和一般方程的求法 难点：寻找柱面的准线		

教学步骤及内容：

一. 柱面的定义

空间中由平行于定方向且与定曲线相交的一族平行直线所产生的曲面叫**柱面**.

柱面的方向:定方向;**准线**:定曲线;**母线**:一族平行线中的每一条直线.

柱面由其准线和定方向唯一确定,但对于一柱面,准线不唯一.

二. 柱面的方程

在空间直角坐标系下,柱面准线Γ 方程 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

(1) 母线的方向数X, Y, Z. 即 $v=\{X,Y,Z\}$

(2) 任取柱面准线Γ 上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 则过此点的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$$

且有 $F_1(x_1,y_1,z_1)=0$, $F_2(x_1,y_1,z_1)=0$. 从而消去参数 x_1,y_1,z_1 最后得到一个三元方程

$F(x,y,z)=0$ ，这就是以 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 为准线，母线的方向数X, Y, Z 的柱面方程.

三. 例题讲解

例 1. 柱面的准线方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$母线的方向数为$-1,0,1$. 求这柱面的方程.

例 2. 已知圆柱面的轴为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$, 点$(-1,-2,1)$在此圆柱上，求这柱面的方程.

定理4.1.1 在空间直角坐标系中，只含两个元（坐标）的三元方程所表示的曲面是一个 柱面，它的母线平行于所缺元(坐标)的同名坐标轴。

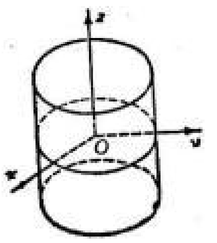
常见柱面方程

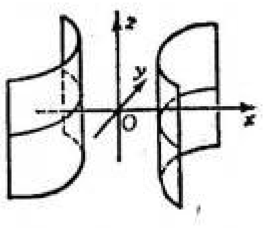
(1) 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0)$

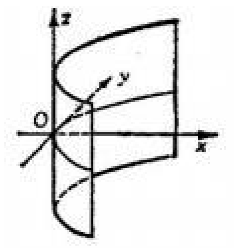
(2) 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

(3) 双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ (a,b>0)$

(4) 抛物柱面 $y^2=2px$







练习：
P100-1（1）

复习思考题、作业题：
P100-2

下次课预习要点
探索锥面方程、锥面方程与柱面方程的异同点。

教学后记	

授课时间	第 17 周	课 次	第 1-2 次	
章节名称	§4.4 椭球面 §4.5 双曲面 §4.6 抛物面			
授课方式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	4	
教学目的要	1. 掌握消去参数法，能运用此法熟练地求出一般锥面、旋转曲面的方程. 2. 能识别顶点在坐标原点的锥面方程,旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程			
教学方法	讲练结合法			
教学重点难点	重点：锥面、旋转曲面的定义和一般方程的求法 难点：寻找锥面、旋转曲面的准线			

教学步骤及内容：

一、锥面定义

空间中由通过一定点且与定曲线相交的一族直线所产生的曲面叫**锥面**.

锥面的顶点:定点;**母线**:一族直线;**准线**:定曲线.

二. 锥面的方程

空间直角坐标系下, 顶点为 $A(x_0, y_0, z_0)$, 准线方程 $\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$

任取准线上一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则过此点的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad 且 F_1(x_1,y_1,z_1)=0,\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0.$$

从而消去参数 x_1, y_1, z_1 最后得到一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 这就是以 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 为准线, $A(x_0, y_0, z_0)$ 为顶点的锥面方程.

例 1、 锥面的顶点在原点，且准线为$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$， 求锥面的方程。

三、旋转曲面的定义

空间一条曲线Γ 绕着定直线 l 旋转一周所产生的曲面叫**旋转曲面(回旋曲面)** **母线**： 曲线Γ ;**旋转轴(轴)**： 定直线 l.

纬线： 旋转曲面母线上任一点在旋转时所形成的一个圆,称之为线圆(纬线).

经线： 以轴 l 为界的每个半平面与曲面交成一条曲线,称为经线.（平面曲线）

四.旋转曲面的方程

1.一般情形下的曲面方程

空间直角坐标系下,旋转曲面

母线方程 $\Gamma:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

轴 l :

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

任取母线上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,则过此点的线圆方程为:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \\ X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0 \end{cases}$$

且有 $F_1(x_1,y_1,z_1)=0$,$F_2(x_1,y_1,z_1)=0$. 消去参数 x_1,y_1,z_1 最后得到一个三元方程 $F(x,y,z)=0$,此即为以Γ 为准线, l 为轴的旋转曲面的方程.

例 1 求直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

2.以坐标面上的曲线为准线、坐标轴为轴的旋转曲面的方程

旋转曲面的经线可作为母线,通常把母线所在平面取作坐标面而旋转轴取作坐标 轴,此时旋转曲面的方程具有特殊的形式.

例 2 将椭圆$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0(a>b)\\ z=0\end{cases}$分别绕长轴($x$ 轴)与短轴(y 轴)旋转,求所得旋转

曲面的方程.

上述二曲面分别叫**长形旋转椭球面,扁形旋转椭球面**.

例 3 将双曲线$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕虚轴(z 轴)旋转的旋转曲面方程为

$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 绕实轴(y 轴)旋转的旋转曲面方程为$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{c^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 分别称为

单叶旋转双曲面与**双叶旋转双曲面**.

练习:P108-1(2)

复习思考题、作业题: P08-2
下次课预习要点 总结二次曲面方程的特征

教学后记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 18 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 1-2 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">习题课</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">1.巩固直线、平面方程的求解
2.巩固向量法判断平面、直线、点的位置关系。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲练结合法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">重点：平面的方程、直线的方程
难点：点、线、面的度量关系。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学步骤及内容：
一、完成剩下习题中的指定题目
二、点评习题
三、总结方法</td></tr>
<tr><td colspan="6">复习思考题、作业题：
抄写本章整理的笔记公式</td></tr>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点
全面复习</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>