揭阳职业技术学院

师范教育系

授课教案

（2025-2026 第一学期）

课程名称： 小学数学解题研究

班　　级：小学教育 241 班

授课教师：　　卢潮辉

授课时间	第 1 周	课 次	第 1，2 次	
章 节 名 称	**第一章 小学数学解题概述**			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	掌握小学数学解题的相关概念；了解小学数学解题的意义和作用。			
教 学 方 法	讲授			
教 学 重 点 难 点	重点：解题教学对小学生学习数学的作用。			

教学步骤及内容：

第一节 有关概念的初步界定

一、数学题

1.数学题的定义

数学题（简称题）是指数学上要求回答或解释的题目、需要研究或解决的矛盾。

$$\text{数学题}\begin{cases}\text{未知的数学题}\rightarrow\text{数学家的工作}\\\text{已知结论的数学题}\rightarrow\text{师生解答的问题}\end{cases}$$

从古至今有许多有趣的数学名题，如：鸡兔同笼问题，《孙子算经》卷下第 31 题：今有鸡兔同笼，上有 35 头，下有 94 足，问鸡兔各有几只？此题对小学生构成问题，是奥数题，可用假设法解答。但对已经学过方程的你们就不再是问题了。

牛顿的牛吃草问题，兔子数列问题等。

2.数学题的特点

★传统的数学练习题:

学生通过对教材例题的模仿和操作练习就能完成;

结构是常规的，答案是确定的，条件不多不少;

可以按照现成的公式或常规的思路得到解决。

★传统数学题的主要目的在于巩固基础和变式训练，具有接受性、封闭性和确定性的特点。

★新课标背景下的数学题更重视生活会、更强化探究。

3.小学数学题的种类

小学数学题按不同的标准有不同的分类方式，其主要有:

按形式差异分：式题、文字题、应用题、作图题等。

按结构差异分：封闭题和开放题等。

按功能差异分：基本题、拓展题、探究题等。

按教学需要的差异分：基本性练习题、单一性练习题、综合性练习题、准备性练习题、针对性练习题、对比性练习题、尝试性练习题、发展性练习题、创造性练习题、诊断性练习题、变式性练习题、实践性练习题等。

二、解数学题

解题就是解决问题，即求出数学题的答案，这个答案在数学上也叫作“解”。所以，数学解题就是根据数学知识和数学方法，通过思维找出解的活动。数学家的解题是一个创造和发现的过程——发现定理或公式，数学教学中的解题是一个再创造和再发现的过程——用已知定理或公式求出问题的答案。所以，数学解题教学的基本含义与意义就是：

通过典型数学题的学习、解答，掌握数学问题解决的基本规律，学会像数学家那样有创造性地进行思维和解决数学问题，培养数学能力。

三、解题教学

1.解题教学的基本含义

解题教学是指通过对典型数学题的学习，去探究数学问题解决的基本规律，引导学生学会“数学思维”的教学过程。

2.解题教学的基本形式

解题教学包括例题教学和习题教学。例题教学是以教师为主导的示范性活动，教师应正确引导学生掌握解题的基本方法。习题教学是以学生为主体的活动，学生按照教师的师范和通过对例题的模仿，把数学知识应用于解题实践中。

3.解题教学的基本原则

目的性；教师在选配例题、习题时要有目的性、针对性，根据学生的知识水平选取适应的题目，特别是例题，要做到循序渐进。

示范性：教师在进行示范教学时，要保证解题格式与解题过程的正确性，千万不要出现错误的示范，这就要求教师课前认真钻研教材，备好每一节课。

启发性：解题教学应充满启发性思维，用活动启发，安排教学活动时，往往会考虑这个知识点怎样才能让学生更好的掌握，怎样才能取得最佳的效果，我们需要去思考，寻找方法，这个时候就是启发性教学原则。设计活动的启发点要有适度性，深浅适度，以防过难或过易。如提问。

变通性：教师要采用一题多解、变式训练等不同的方式和角度分析问题、解决问题，以培养学选择最优解法的能力。

方法性：教师在解题教学时，要注重讲解解法的发现，避免学生只知其然而不知其所以然，只会简单机械地模仿。如分数应用题解答，在学生难以理解时，可用方程法求解，思路比较清晰。

四、解题策略

策略是指导行动的方针(战略性的)，同时也是增强效果、提高效率的艺术，它区别于具体的途径或方式(战术性的)．数学解题的策略是为了实现解题目标而采取的方针．

★《数学习题理论》(戴再平，1991 年)中提出了八个解题策略：

枚举法、模式识别、问题转化、中途点、以退求进推进到一般、从整体看问题、正难则反．

★《数学思维论》(任樟辉，1990 年)中提出了十个解题策略：

以简驭繁、进退互用、数形迁移、化生为熟、正难则反、倒顺相通、动静转换、分合相辅、引参求变、以美启真。

★《数学解题学引论》(罗增儒，1997 年)中提出了十个解题策略

模式识别、映射化归、差异分析、分合并用、进退互化、正反相辅、动静转化、数形结合、有效增设、以美启真。

第二节 **小学数学解题的作用及意义**

乔治。波利亚认为：掌握数学就是意味着善于解题。所以解题在小学数学教育中有着重要的作用及意义。题海战术对小学生学习数学是有一定的作用的，但不能过了，打压学生学习的积极性。

一、解题是数学的核心内容

对于数学教学而言，不仅要把“题”作为研究的对象，把“解”作为研究的目标，而且要把“解

题”也作为研究的对象，把“开发智力、促进人的发展”作为数学学习活动的目标解题是真正发生在数学教育中的关键环节。

二、解题是学生掌握知识、形成数学能力的基本途径

解题思路的形成、解题技巧的掌握是离不开解题实践活动的。数学解题加深对基础知识的理解，有助于牢固掌握所学知识，有助于逐步形成合理的数学认知结构。

三、解题是培养学生思维能力和良好心理品质的的重要方法

四、解题是评价学生学习效果的重要方式

解题在目前仍是检验学生学习数学效果的主要方式——小考、中考、高考都是以解题分数作为录取的依据。作为数学教师，最简单的检查学生认知水平的手段就是让学生解题作业。

思考题：你如何看待小学生学习奥数？

奥数全称叫“中学生国际奥林匹克数学竞赛”，是开始于 20 年前的中学生学科竞赛，它只是针对极少数有这方面天赋的学生 而举办的国际大赛。后来那些参赛获奖的同 学纷纷被大学破格录取，使奥数带上了功利性。从最初的中学生学科竞赛，到现在的全民参与，蜂拥而上，奥数成了家长为孩子择校的一种简便方式，更是一些奥数培训学校大肆牟利的工具。

那么，就小学生而言，学习奥数到底是利大还是弊大呢？

利：学习奥数能够激发小学生的创造；学习奥数能够培养小学生良好的思维习惯， 有利于智力开发；学习奥数能够使小学生获得心理上的优势，培养自信。

对于极少数有奥数方面特长的学生来讲，参加奥数训练是件快乐的事。解开一道道难题的过程，对于他们来说是一次次快乐的体验，能让他们获得心理上的优势，获得自信。另外，对于有奥数方面特长的学生来讲，及早发现，及早培养，中学后能参加国际大赛取得优异的比赛成绩，更是在增强民族自信心、提高学生学习兴趣与动力方面起到了积极的作用，也向世人展示了我国基础教育的实力。

弊：奥数降低普通孩子学数学的积极性。很多家长反映，“孩子参加奥数培训班后，变得不自信了，总是抱怨自己不够聪明，学习数学的积极性也不及从前了”。原因很简单奥数作为竞赛数学，其思维方式和普通数学有很大差别。奥数竞赛获奖的比率通常只有千分之四，大概只有 5%的数学尖子生适合学习奥数，95%的孩子学奥数只是为尖子生做“陪读”。

第三节 小学数学解题的要求及步骤

一、解题程序

1. 国外对解题程序的研究

在数学史中，数学问题解决的过程，对于数学发展的作用不亚于问题解决的结果。例如，寻找求解五次方程一般公式的过程，导致了数论的重大发展；证明欧氏几何平行公理的各种尝试，启迪了非欧几何的创立；解答哥尼斯堡七桥问题的过程，引出了一笔画问题，导致了图论的产生。在数学学习中，问题解决的过程，对于强化已有知识的理解和掌握，对于解题策略的形成，对于能力的提高，都有显而易见的作用。数学问题解决是一种高级形式的学习活动，它既期望获得数学问题结

果，又重视获得数学问题结果的过程。

美籍匈牙利数学教育家波利亚在《怎样解题》中将解数学问题（解答题）划分为四个阶段，可以作为小学数学解题的一般步骤。

（1）“弄清问题”，这是解题的起点。我们必须清楚地了解问题内容，搞清问题的主要部分。

（2）“拟定计划”，这是解题的关键。我们必须清楚理解已知条件与问题之间是的关系，结合问题目标制定一个解题计划。

（3）“实现计划”，这是解题的具体表述。逐步实现制定的解题计划，认真运算，并仔细检查每一步的解题过程。

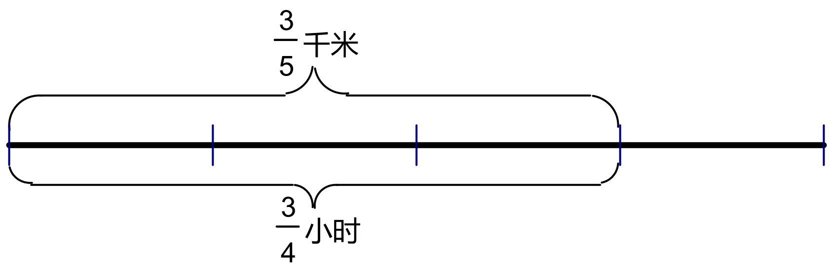
（4）“回顾”，这是解题的检验、反思与推广。认真回顾所作的解题步骤，检查解题的过程，并进行讨论，如果可能的话可以将结论作适当的推广应用。

波利亚还把数学习题分为证明题和求解题两大类，并针对它们设计了“怎样解题表”并对一些数学问题的解答进行了详细的讲解。波利亚的这一解题的划分思想，比较简明、清晰，便于把握，对数学问题解决影响较大，对我们有一定的启发性。

例 小学生在学习分数除以分数的计算法则时引入了一道应用题：

“修路队 3/4 小时修路 3/5 千米，修路队平均每小时修路多少千米？”

第一步，弄清问题。修路队 3/4 小时修路 3/5 千米，已知修路时间和相应的修路长度，要求平均每小时修路多少千米？



第二步，拟定计划。根据整数应用题的数量关系已知数与未知数之间的数量关系是：修路长度÷修路时间=平均修路数。同时还可以这样思考：因为 3/4 小时修路 3/5 千米，因此 1/4 小时修了 1/5 千米；所以 1 小时修了 4/5 千米。

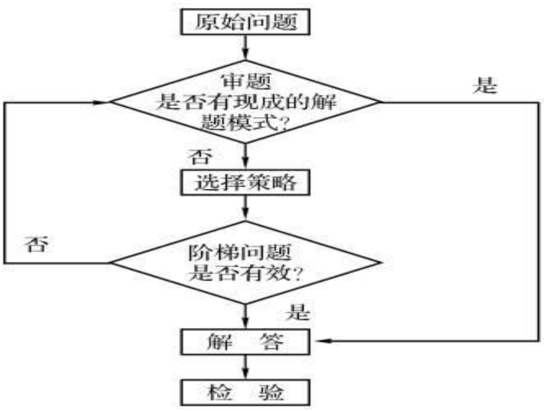
第三步，实现计划。3/5÷3/4=4/5（千米）。

第四步，回顾。由于把整数应用题的数量关系迁移到分数的应用，可以列出算式 3/5÷3/4，但是如何进行分数除法计算又是一个新问题；在分析过程中，我们已经推算出结果是 4/5 千米，那么算式与结果之间有什么联系？我们又可以进行如下研讨：

3/5÷3/4=3/5÷(3÷4)=3/5÷3×4=3/5×1/3×4=3/5×4/3

把一个分数除以分数的计算问题转化为乘以这个分数的倒数的形式，找到了分数除以分数的计算方法。这就是通过解题的检验与反思，解决了一种运算方法问题，思维的结果也得到应用与推广。

在小学数学解题中，如果解答的是应用题，其解答步骤与上面叙述的解题步骤类似。但是为了通俗，便于学生理解和掌握，我们结合小学数学教学可以作如下的整理，在解题学习中要掌握解答

应用题的一般步骤。 解答应用题的一般步骤： （1）理解题意。这是解答应用题的基础。读题（审题），摘抄（分离）已知条件和问题。要注意克服“理解题意”中的干扰和障碍：第一，经验和知识的局限；第二，数据的干扰；第三，原有思维定势的影响；最后是学生不善于分离已知条件和问题。 （2）分析数量关系。这是解答应用题的关键。分析应用题的方法有综合法、分析法和线段图示法等，我们将在后面再作专题介绍。分析数量关系的目标是要寻找解答应用题的思路和方法。 （3）列式解答。这是解答应用题的主体。根据上面的分析与解题思路，分步列出算式并进行计算。 （4）检查和书写答句。这是解答应用题的目标。认真检查分析过程，检验每一步的计算过程，确认分析正确、计算无误后，写出应用题的答句。应用题的检验方法有估算法、多解法、代入法、编题法和比较法等等。 2.国内对解题程序的研究，解题动态流程。  二、解题训练 模仿、变式、领悟、提升
复习思考题、作业题： 思考题：1.**在解题教学过程中教师应该注意哪几个问题？** **2.你如何看待小学生学习奥数？**
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　　周	课　次	第 3-11 次		
章　节 名　称	**第二章 小学数学解题常用的思想方法**				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	18
教　学 目　的 要　求	了解小学数学解题常用的思想方法； 能合理运用正确的思想方法解答小学数学问题。				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：掌握分析与综合、观察与归纳、枚举与筛选、化归、假设、数形结合、类比与猜想、逆推与还原等小学数学解题中常用的思想方法 难点：能合理运用正确的思想方法解答小学数学问题。				

教学步骤及内容：

第一节　　分析法与综合法

分析与综合是思维的基本方法，在形成和发展科学理论、研究和解决实际问题的过程中，都离不开分析与综合。分析与综合属于哲学方法论的范畴。在数学解题过程中所用的“分析法”与“综合法”则有较为具体的特定含义

1.分析法：

分析法是指从求解的问题出发，正确选择所需要的两个条件，依次推导，一直到问题得到解决的解题方法。分析法适用于解答数量关系比较复杂的应用题。

分析法在数学问题解决中还特指从问题入手，根据数量关系，逐步追溯问题解决的条件的思维方法，也就是“执果索因”的过程，在数学解题中又称逆推法。

用分析法解应用题时，如果解题所需要的两个条件（或其中的一个条件）是未知的，就要分别求解找出这两个（或一个）条件，一直到所需要的条件都是已知的为止。

例： 玩具厂计划每天生产 200 件玩具，已经生产了 6 天，共生产 1260 件。问平均每天超过计划多少件？（适于三年级程度）

解：这道题是求平均每天超过计划多少件。要求平均每天超过计划多少件，必须具备两个条件（图 5-1）：①实际每天生产多少件；②计划每天生产多少件。

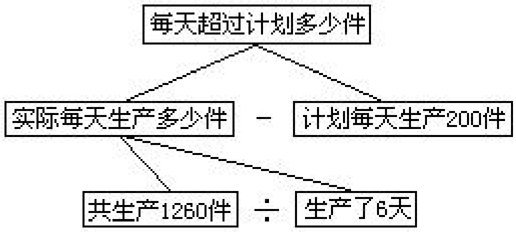


图 5-1

计划每天生产 200 件是已知条件。实际每天生产多少件，题中没有直接告诉，需要求出来。

要求实际每天生产多少件，必须具备两个条件（图 5-1）：①一共生产了多少件；②已经生产了多少天。这两个条件都是已知的：①一共生产了 1260 件；②已经生产了 6 天。分析到这里，问题就得到解决了。

此题分步列式计算就是：

（1）实际每天生产多少件？

1260÷6=210（件）

（2）平均每天超过计划多少件？

210-200=10（件）

综合算式：1260÷6-200=210-200=10（件）

从而完成了用分析法进行思考解题的过程。

例：四月上旬，甲车间制造了 257 个机器零件，乙车间制造的机器零件是甲车间的 2 倍。四月上旬两个车间共制造多少个机器零件？（适于三年级程度）

解：要求两个车间共制造多少个机器零件，必须具备两个条件（图 5-2）：①甲车间制造多少个零件；②乙车间制造多少个零件。已知甲车间制造 257 个零件，乙车间制造多少个零件未知。

下面需要把“乙车间制造多少个零件”作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

这两个条件（图 5-2）是：①甲车间制造多少个零件；②乙车间制造的零件是甲车间的几倍。这两个条件都是已知的：①甲车间制造 257 个，乙车间制造的零件数是甲车间的 2 倍。

分析到此，问题就得到解决了。

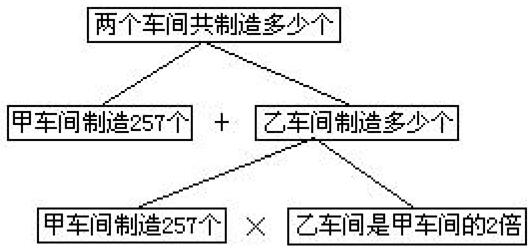


图 5-2

此题分步列式计算就是：

（1）乙车间制造零件多少个？

257×2=514（个）

（2）两个车间共制造零件多少个？

257+514=771（个）

综合算式：257+257×2=257+514=771（个）

答略。

例： 某车间要生产 180 个机器零件，已经工作了 3 天，平均每天生产 20 个。剩下的如果每天生产 30 个，还需要几天才能完成？（适于四年级程度）

解：要求还需要几天才能完成，必须具备两个条件（图 5-3）：①还剩下多少个零件；②每天生产多少个零件。在这两个条件中，每天生产 30 个零件是已知条件，还剩多少个零件未知。

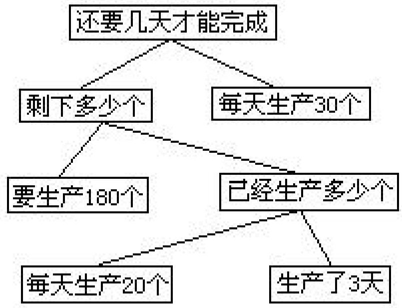


图 5-3

先把“还剩多少个零件”作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

要算出还剩下多少个零件，必须具备的两个条件（图 5-3）是：①要生产多少个零件；②已经生产了多少个零件。要生产 180 个零件是已知条件，已经生产多少个零件未知。

然后把“已经生产多少个零件”作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

要算出已生产多少个零件，必须知道的两个条件（图 5-3）是：①每天生产多少个零件；②生产了几天。这两个条件题中都已经给出：每天生产 20 个零件，生产了 3 天。

分析到此，问题就得到解决。

上面的思考过程，分步列式计算就是：

（1）已经生产了多少个零件？

20×3=60（个）

（2）剩下多少个零件？

180-60=120（个）

（3）还要几天才能完成？

120÷30=4（天）

综合算式：（180-20×3）÷30=（180-60）÷30=120÷30=4（天）

答略。

例： 王明买了 24 本笔记本和 6 支铅笔，共花了 9.60 元钱。已知每支铅笔 0.08 元，每本笔记本多少钱？（适于五年级程度）

解：要算出每本笔记本多少钱，必须具备两个条件（图 5-4）：①买笔记本用了多少钱；②买了多少本笔记本。从题中已知买了 24 本笔记本，买笔记本用的钱数未知。

先把买笔记本用的钱数作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

要算出买笔记本用多少钱，必须知道的两个条件（图 5-4）是：①买笔记本、铅笔共用多少钱；②买铅笔用多少钱。已知买笔记本、铅笔共用 9.60 元，买铅笔用去多少钱未知。

然后找出“买铅笔用多少钱”所需要的两个条件。

要算出买铅笔用多少钱，必须知道的两个条件（图 5-4）是：①买多少支铅笔；②每支铅笔多少钱。这两个条件在题中都是已知的：买 6 支铅笔，每支 0.08 元。

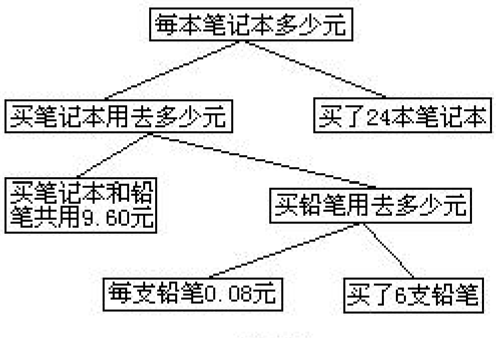


图 5-4

分析到此，问题就得到解决。

此题分步列式计算就是：

（1）买铅笔用去多少元？

0.08×6=0.48（元）

（2）买笔记本用去多少元？

9.60-0.48=9.12（元）

（3）每本笔记本多少元？

9.12÷24=0.38（元）

列综合算式计算：（9.60-0.08×6）÷24＝（9.60-0.48）÷24=9.12÷24

=0.38（元）

答：每本笔记本 0.38 元。

例：仓库里共有化肥 2520 袋，两辆车同时往外运，共运 30 次，每次甲车运 51 袋。每次甲车比乙车多运多少袋？（适于五年级程度）

解：求每次甲车比乙车多运多少袋，必须具备两个条件（图 5-5）：①甲车每次运多少袋；②乙车每次运多少袋。甲车每次运 51 袋已知，乙车每次运多少袋未知。

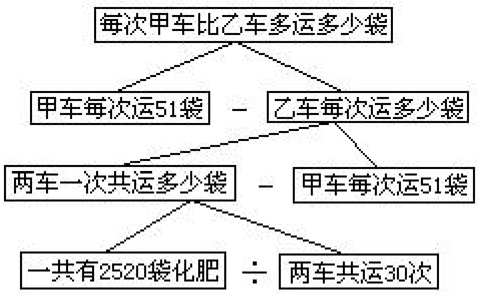


图 5-5

先找出解答“乙车每次运多少袋”所需要的两个条件。

要算出乙车每次运多少袋，必须具备两个条件（图 5-5）：①两车一次共运多少袋；②甲车一次运多少袋。甲车一次运 51 袋已知；两车一次共运多少袋是未知条件。

然后把“两车一次共运多少袋”作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

要算出两车一次共运多少袋，必须具备两个条件（图 5-5）：①一共有多少袋化肥；②两车共运多少次。这两个条件都是已知的：共有 2520 袋化肥，两车共运 30 次。

分析到此，问题就得到解决。

此题分步列式计算就是：

①两车一次共运多少袋？

2520÷30=84（袋）

②乙车每次运多少袋？

84-51=33（袋）

③每次甲车比乙车多运多少袋？

51-33=18（袋）

综合算式：51-（2520÷30-51）=51-33=18（袋）

答略。

***例：** 把 627.5 千克梨装在纸箱中，先装 7 箱，每箱装梨 20 千克，其余的梨每箱装 37.5 千克。这些梨共装多少箱？（适于五年级程度）

解：要算出共装多少箱，必须具备两个条件（图 5-6）：①先装多少箱。②后装多少箱。先装 7 箱已知，后装多少箱未知。

先把“后装多少箱”作为一个问题，并找出解答这个问题所需要的两个条件。

要算出后装多少箱，必须具备两个条件（图 5-6）：①后来一共要装多少千克；②后来每箱装多少千克。后来每箱装 37.5 千克已知，后来一共装多少千克未知。

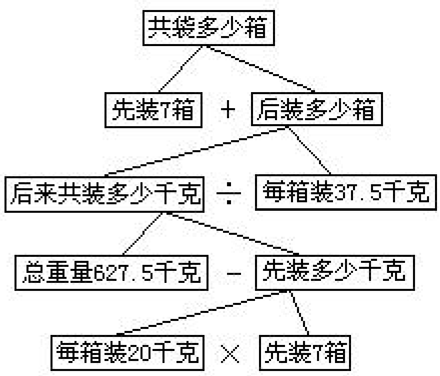


图 5-6

要把“后来一共要装多少千克”作为一个问题提出，并找出回答这一问题所需要的两个条件。要求后来一共要装多少千克，必须具备两个条件（图 5-6）：①梨的总重量；②先装了多少千克。梨的总重量是 627.5 千克已知的；先装了多少千克是未知的，要把它作为一个问题提出来，并找出回答这个问题所需要的两个条件。

这两个条件（图 5-6）是：①先装的每箱装梨多少千克；②装了多少箱。这两个条件都是已知的：先装的每箱装梨 20 千克，装了 7 箱。

分析到此，问题就得到解决了。

此题分步列式计算就是：

①先装多少千克？

20×7=140（千克）

②后来共装多少千克？

627.5-140=487.5（千克）

③后来装了多少箱？

487.5÷37.5=13（箱）

④共装多少箱？

7+13=20（箱）

综合算式：7+（627.5-20×7）÷37.5

=7+（627.5-140）÷37.5

=7+487.5÷37.5

=7+13=20（箱）

答略。

注意：开始学习用分析法解应用题时，一定要画思路图，当对分析法的解题方法已经很熟悉时，可不再画思路图，而直接分析解答应用题了。

***例7** 某发电厂五月份用煤3200吨，比四月份节约了$\frac{1}{9}$，六月份又比五月份节约了15%。问六月份比四月份少用煤多少吨？（适于六年级程度）

解：此题中出现两个标准量：“四月份的用煤量”和“五月份的用煤量”。四月份的用煤量和六月份的用煤量都与五月份的用煤量有直接联系。

要算出六月份比四月份少用煤多少吨，必须知道六月份、四月份各用煤多少吨。

要算出六月份用煤多少吨，必须知道两个条件：①五月份用煤多少吨；②六月份比五月份节约多少。这两个条件都是已知的。六月份用煤的吨数是：

3200×（1-15%）=2720（吨）

要算出四月份用煤多少吨，必须知道两个条件：①五月份用煤多少吨；②五月份比四月份节约

多少。这两个条件都是已知的。四月份用煤的吨数是：

$$3200 \div \left(1-\frac{1}{9}\right) = 3600\text{（吨）}$$

知道了六月份、四月份用煤的吨数，就可以求出六月份比四月份少用煤多少吨。

3600-2720=880（吨）

综合算式：$3200 \div \left(1-\frac{1}{9}\right) - 3200 \times (1-15\%)$

=3600-2720

=880（吨）

答略。

2.综合法：

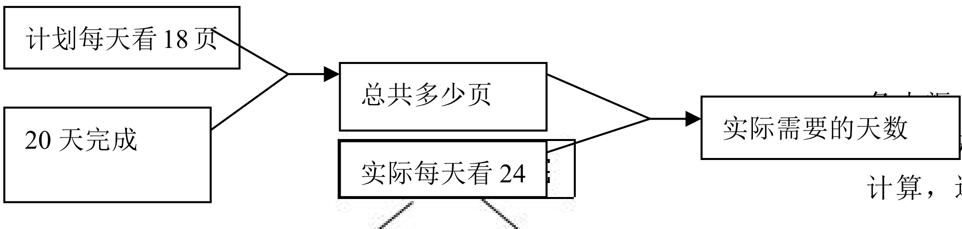
综合法从已知数量与已知数量的关系入手，逐步分析，一直到求出未知量的解题方法。应用此法时应明确两个已知条件可以解决什么问题，然后才能从已知推到未知。此法适用于已知条件比较少，数量关系比较简单的应用。

以综合法解应用题时，先选择两个已知数量，并通过这两个已知数量解出一个问题，然后将这个解出的问题作为一个新的已知条件，与其它已知条件配合，再解出一个问题……一直到解出应用题所求解的未知数量。

综合是把事物的各个部分、方面或要素，有机联合成整体进行考察的思维方法。综合是从已知条件出发逐步推理求出未知的思维方法，也就是"由因导果"的过程。综合思维是一种侧重于整体性的思维，是数学求解和数学证明的基本方法。

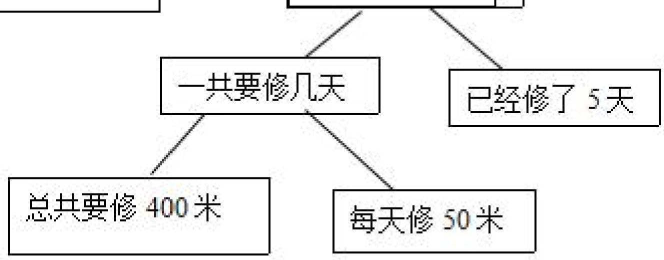
【例】小红看一本故事书，计划每天看 18 页，20 天完成，实际每天看了 24 页，他实际用了多少天看完这本书？

解法一：综合思路（画出解题思路图）

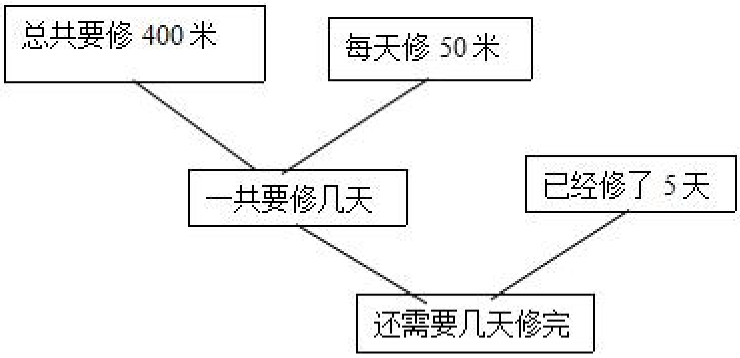


【例】一 400 米，已经修了 5 天修 50 米，照这样计算，还需要几天修完？

分析法：



综合法：



例： 甲、乙两个土建工程队共同挖一条长 300 米的水渠，4 天完成任务。甲队每天挖 40 米，乙队每天挖多少米？（适于三年级程度）

解：根据“甲、乙两个土建工程队共同挖一条长 300 米的水渠”和“4 天完成任务”这两个已知条件，可以求出甲乙两队每天共挖水渠多少米（图 4-1）。

300÷4=75（米）

根据“甲、乙两队每天共挖水渠 75 米”和“甲队每天挖 40 米”这两个条件，可以求出乙队每天挖多少米（图 4-1）。

75-40=35（米）

综合算式：300÷4-40=75-40=35（米）

答：乙队每天挖 35 米。

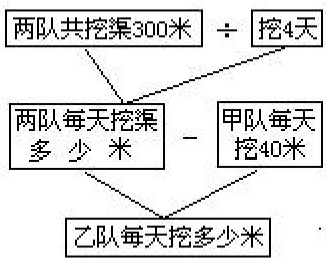


图 4-1

例： 两个工人排一本 39500 字的书稿。甲每小时排 3500 字，乙每小时排 3000 字，两人合排 5 小时后，还有多少字没有排？（适于四年级程度）

解：根据甲每小时排 3500 字，乙每小时排 3000 字，可求出两人每小时排多少字（图 4-2）。

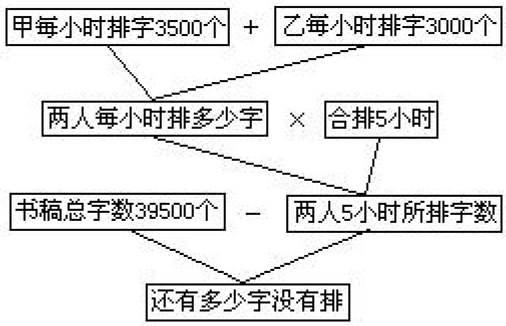


图 4-2

3500+3000=6500（字）

根据两个人每小时排 6500 字，两人合排 5 小时，可求出两人 5 小时已排多少字（图 4-2）。

6500×5=32500（字）

根据书稿是 39500 字，两人已排 32500 字，可求出还有多少字没有排（图 4-2）。

39500-32500=7000（字）

综合算式：39500-（3500+3000）×5

=39500-6500×5

=39500-32500

=7000（字）

答略。

例： 客车、货车同时由甲、乙两地出发，相向而行。客车每小时行 60 千米，货车每小时行 40 千米，5 小时后客车和货车相遇。求甲、乙两地之间的路程。（适于四年级程度）

解：根据“客车每小时行 60 千米”和“货车每小时行 40 千米”这两个条件，可求出两车一小时共行多少千米（图 4-3）。

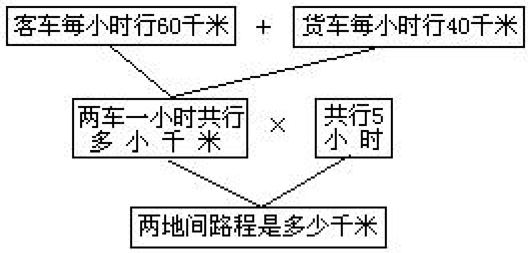


图 4-3

60+40=100（千米）

根据“两车一小时共行 100 千米”和两车 5 小时后相遇，便可求出甲、乙两地间的路程是多少千米（图 4-3）。

100×5=500（千米）

综合算式：（60+40）×5=100×5=500（千米）

答：甲、乙两地间的路程是 500 千米。

例： 一个服装厂计划做 660 套衣服，已经做了 5 天，平均每天做 75 套。剩下的要 3 天做完，问平均每天要做多少套？（适于四年级程度）

解：根据“已经做了 5 天，平均每天做 75 套”这两个条件可求出已做了多少套（图 4-4）。

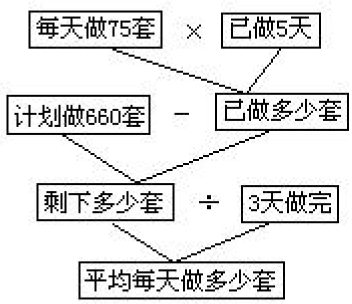


图 4-4

75×5=375（套）

根据“计划做 660 套”和“已经做了 375 套”这两个条件，可以求出还剩下多少套（图 4-4）。

660-375=285（套）

再根据“剩下 285 套”和“剩下的要 3 天做完”，便可求出平均每天要做多少套（图 4-4）。

285÷3=95（套）

综合算式：（660-75×5）÷3=285÷3=95（套）

答略。

例： 某装配车间，甲班有 20 人，平均每人每天可做 72 个零件；乙班有 24 人，平均每人每天可做 68 个零件。如果装一台机器需要 12 个零件，那么甲、乙两班每天生产的零件可以装多少台机器？（适于四年级程度）

解：根据“甲班有 20 人，平均每人每天可做 72 个零件”这两个条件可求出甲班一天生产多少个零件（图 4-5）。

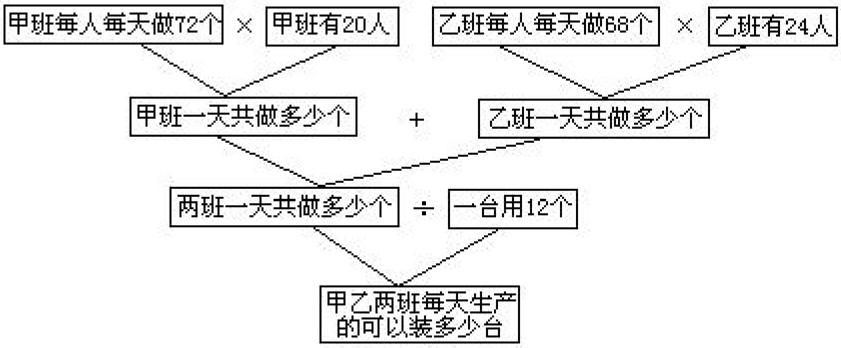


图 4-5

72×20=1440（个）

根据“乙班有 24 人，平均每天每人可做 68 个零件”这两个条件可求出乙班一天生产多少个零件（图 4-5）。

68×24=1632（个）

根据甲、乙两个班每天分别生产 1440 个、1632 个零件，可以求出甲、乙两个班一天共生产多少个零件（图 4-5）。

1440+1632=3072（个）

再根据两个班一天共做零件 3072 个和装一台机器需要 12 个零件这两条件，可求出两个班一天生产的零件可以装多少台机器。

3072÷12=256（台）

综合算式：（72×20+68×24）÷12

=（1440+1632）÷12

=3072÷12

=256（台）

答略。

例： 一个服装厂计划加工 2480 套服装，每天加工 100 套，工作 20 天后，每天多加工 20 套。提高工作效率后，还要加工多少天才能完成任务？（适于四年级程度）

解：根据每天加工 100 套，加工 20 天，可求出已经加工多少套（图 4-6）。

100×20=2000（套）

根据计划加工 2480 套和加工了 2000 套，可求出还要加工多少套（图 4-6）。

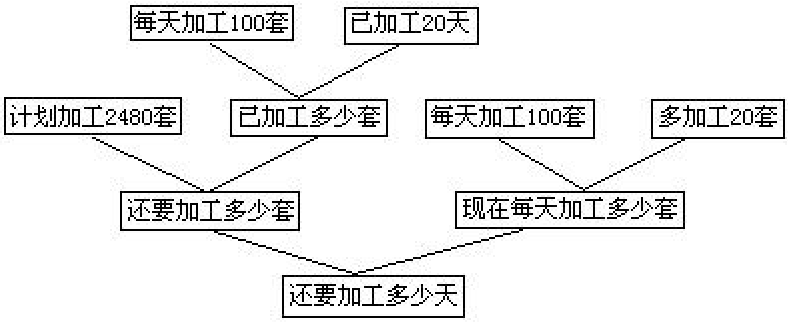


图 4-6

2480-2000=480（套）

根据原来每天加工 100 套，现在每天多加工 20 套，可求出现在每天加工多少套（图 4-6）。

100+20=120（套）

根据还要加工 480 套，现在每天加工 120 套，可求出还要加工多少天（图 4-6）。

480÷120=4（天）

综合算式：（2480-100×20）÷（100+20）=480÷120=4（天）

答略。

刚开始学习以综合法解应用题时，一定要画思路图，当对综合法的解题方法已经很熟悉时，就可以不再画思路图，而直接解答应用题了。

例7 有三桶油，第一桶重50千克，第二桶比第一桶重 $\frac{1}{10}$，第三桶比第二桶轻 $\frac{1}{10}$。问第三桶重多少千克？（适于六年级程度）

解：此题先后出现了两个标准量：“第一桶的重量”和“第二桶的重量”。

从“第一桶重50千克，第二桶比第一桶重$\frac{1}{10}$”，可先求出第二桶的重量：

$$50\times\left(1+\frac{1}{10}\right)=55\text{（千克）}$$

根据“第三桶比第二桶轻$\frac{1}{10}$”，可求出第三桶的重量：

$$55\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=49.5\text{（千克）}$$

综合算式：

$$50\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

$$=55\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

=49.5（千克）

答略。

***例8** 在甲、乙、丙三块地种高粱。乙块地比甲块地多产高粱$\frac{2}{13}$，丙块地比乙块地少产高粱$\frac{2}{7}$，丙块地产高粱450千克。问甲块地产高粱多少千克？（适于六年级程度）

解：此题先后出现两个标准量：“甲块地产高粱的重量”和“乙块地产高粱的重量”。

将题中已知条件的顺序变更一下：丙块地产高粱 450 千克，丙块地比乙块地少产高粱$\frac{2}{7}$，乙块地比甲块地多产高粱$\frac{2}{13}$。

这样，便可用综合法解答。

根据“丙块地产高粱450千克，丙块地比乙块地少产高粱$\frac{2}{7}$”，这两个条件，可求出乙块地产高粱是：

$$450\div\left(1-\frac{2}{7}\right)=630\text{（千克）}$$

（这里乙块地的产量是标准量 1）

根据“乙块地的产量”和“乙块地比甲块地多产高粱$\frac{2}{13}$”这两个条件，可求出甲块地的产量是：

$$630\div\left(1+\frac{2}{13}\right)=546\text{（千克）}$$

（这里甲块地的产量是标准量 1）

综合算式：

$$450\div\left(1-\frac{2}{7}\right)\div\left(1+\frac{2}{13}\right)$$

$$=630\div\frac{15}{13}$$

=546（千克）

答略。

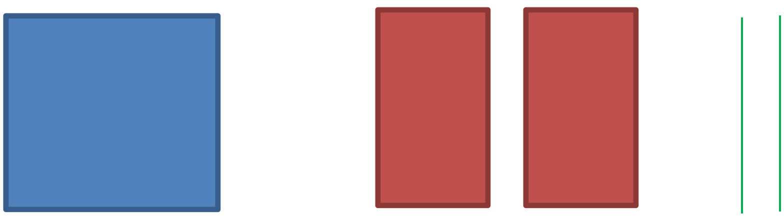
3. 分析-综合法

在小学数学解题中，综合与分析是密切联系的，不可分割的。在解决问题的过程中，常在分析后进行综合。如将组合图形分解成几个简单图形并分别计算它们的面积后，再将各简单图形的面积合并起来得到组合图形的面积。

分析与综合是统一在具体的思考问题过程中，分析是综合的基础，综合是分析的合成，分析的目的是走向综合。分析侧重于探索性和发展性，而综合侧重于整理性。在具体问题的解答思维过程中，分析与综合是互相补充、相互渗透、辨证统一的两个方面。如果思维只限于分析，那么就只能获得一些事物的枝节，不可能在思维中再现具体的整体，犹如只见树木不见森林；如果思维只限于综合，那么只能对事物有个表面的笼统的印象，不能揭示其内部联系和规律。因此，必须将两种思维方法配合使用，才能使问题很快得到解决。

例如，在解答小学数学应用题的过程中，通过读题，弄清条件与问题，对应用题有一个整体的了解，这是综合思维；在这个思维的基础上，研究已知数量与未知数量之间的关系，这就是分析思维；然后再考虑先算什么、后算什么，这又是再一次的综合思维，从而找到了解答应用题的思路和方法。

例：将两个大小相同的正方形拼成一个长方形后，它的周长比原来两个正方形的周长的和减少了 4 厘米。原来正方形的周长是多少厘米？



例：李师傅加工一批零件，如果每天做 50 个，要比原计划推迟 8 天完成；如果每天做 60 个，就可以提前 5 天完成，问这批零件共有多少个？

分析：由题意，在原计划的日期内完成，第一种情况少做了 400 个；第二种情况多做了 300 个；两

者之间的差距为：400+300=700 个。造成这个差距的原因是李师傅两种情况每天的工作量不同，根据公式：工作总量=工作效率×工作时间。
可以求出原计划的工作时间，接着可以求出这批零件的总数。

***例：** 运输队要把 600 吨化肥运到外地，计划每天运 22 吨。运了 15 天以后，剩下的化肥要在 10 天内运完。这样每天要比原计划多运多少吨？（适于五年级程度）

解：解此题要运用分析法和综合法去思考。

先用综合法思考。根据“原计划每天运 22 吨”和“运了 15 天”这两个条件，可以求出已经运出的吨数（图 6-1）。

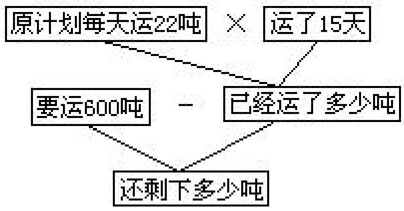


图 6-1

根据要“运 600 吨”和已经运出的吨数，可以求出剩下化肥的吨数（图 6-1）。

接下去要用哪两个数量求出什么数量呢？不好思考了。所以用综合法分析到这儿，接着要用分析法思考了。

要求“每天比原计划多运多少吨”，必须知道“后来每天运多少吨”和“原计划每天运多少吨”。“原计划每天运 22 吨”是已知条件，“后来每天运多少吨”不知道，这是此题的中间问题（图 6-2）。

图 6-2

要知道“后来每天运多少吨”，必须知道“剩下多少吨”和“要在多少天内运完”。这两个条件中，第二个条件是已知的，“要在 10 天内运完”，“剩下多少吨”是未知的中间问题。

我们在前面用综合法分析这道题时，已经得到求剩下吨数的方法了。

所以本题分析到这里就可以解答了。

此题分步列式解答时，要从图 6-1 的上面往下看，接着从图 6-2 的下面往上看。

（1）已经运多少吨？

22×15=330（吨）

（2）剩下多少吨？

600-330=270（吨）

（3）后来每天运多少吨？

270÷10=27 吨）

（4）每天比原计划多运多少吨？

27-22=5（吨）

综合算式：（600-22×15）÷10-22

=（600-330）÷10-22

=270÷10-22

=27-22

=5（吨）

答略。

***例：** 某鞋厂原计划 30 天做皮鞋 13500 双，实际上每天比原计划多做 50 双。问这个鞋厂提前几天完成原计划的任务？（适于五年级程度）

解：解答此题一般要运用分析法和综合法去思考。

先用分析法思考。要算出提前几天完成计划，必须知道“原计划天数”和“实际做鞋数”（图 6-3）。“原计划天数”是 30

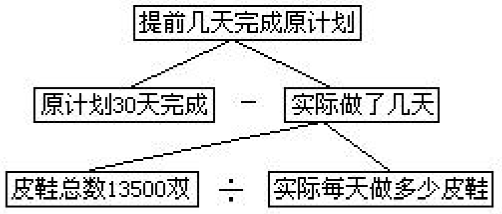


图 6-3

天，已经知道；“实际做鞋天数”不知道，是中间问题。

要知道“实际做鞋天数”必须知道“皮鞋总数”和“实际每天做的皮鞋数”（图 6-3）。

到此可以往下思考，要算出实际每天做的皮鞋数，必须具备哪两个条件？但有的人觉得这样思考时不顺当，思路会“卡壳”，这时就要换用综合法进行思考。

由“原计划 30 天做皮鞋 13500 双”，可求出“原计划每天做的皮鞋数”（图 6-4）。

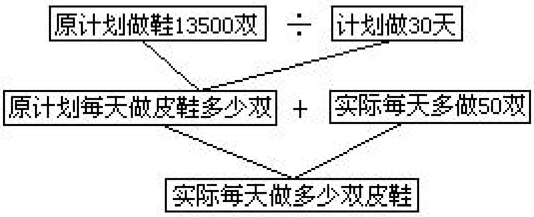


图 6-4

由“原计划每天做的皮鞋数”和“实际每天比原计划多做 50 双”，可用加法算出“实际每天做的皮鞋数”（图 6-4）。

分析到此，这道题的问题就得到解决了。此题用分步列式的方法计算时，得从图 6-4 的上面往下面推想，然后从图 6-3 的后面（下面）往前推想。

（1）看图 6-4 的思路图。通过把原计划做的 13500 双除以计划做的 30 天，可以得到原计划每天做多少双皮鞋。

13500÷30=450（双）

（2）在计划每天做的 450 双皮鞋上，加上实际每天多做的 50 双，得到实际每天做的皮鞋数。

450+50=500（双）

（3）接着看图 6-3 的思路图。从思路图的下面往上推想，皮鞋总数除以实际每天做的皮鞋数 500 双，得到实际制做的天数。

13500÷500=27（天）

（4）接着往上看，从原计划做的 30 天，减去实际做的天数 27 天，就得到提前完成计划的天数。

30-27=3（天）

把上面分步计算的算式综合为一个算式是：30-13500÷（13500÷30+50）

=30-13500÷500

=30-27

=3（天）

答略。

*例：甲、乙两队同时开凿一条 2160 米长的隧道，甲队从一端起，每天开凿 20 米，乙队从另一端起，每天比甲队多开凿 5 米。两队在离中点多远的地方会合？（适于五年级程度）

解：看图 6-5。要求两队在离中点多远的地方会合，需要知道隧道的中点及会合点离一端的距离（分析法）。

每天 20 米每天比甲队多 5 米

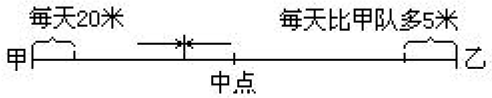


图 6-5

隧道全长 2160 米，中点到一端的距离可以通过 2160÷2 求得（综合法）。

要求出会合点（在甲队的一侧）距离甲队开凿点的距离，实际就是求甲队开凿的米数。要求甲队开凿的米数，就要知道甲队（或乙队）每天开凿的米数（已知）和开凿的天数（分析法）。甲队每天开凿 20 米已知，开凿的天数不知道。

要求出开凿的天数，需要知道隧道的全长（已知）和两队每天共开凿多少米（分析法）。

已知甲队每天开凿 20 米，乙队每天比甲队多开凿 5 米，这样可以求出乙队每天开凿多少米，从而求出甲、乙两队一天共开凿多少米（综合法）。

分析到此，这道题的问题就得到解决了。

此题用分步列式的方法计算时，还得从上面分析过程的后面往前推理。

（1）乙队每天开凿多少米？

20+5=25（米）

（2）甲乙两队一天共开凿多少米？

20+25=45（米）

（3）甲乙两队共同开凿这个隧道用多少天？

2160÷45=48（天）

（4）甲队开凿了多少米？（会合点与甲队开凿点的距离）

20×48=960（米）

（5）甲队到中点的距离是多少米？

2160÷2=1080（米）

（6）会合点与中点间的距离是多少米？

1080-960=120（米）

综合算式：2160÷2-20×[2160÷（20+20+5）]

=1080-20×48

=1080-960

=120（米）

答略。

***例：**某中队三个小队的少先队员采集树种。第一小队 8 名队员共采集 11.6 千克，第二小队 6 名队员比第一小队少采集 2.8 千克，第三小队 10 名队员采集的重量是第二小队的½，问三个小队平均每名队员采集多少千克？（适于五年级程度）

解：如果先用综合法分析，虽然已知数量间存在着一定的关系，但不容易选择出与所求数量有直接联系的数量关系。而用分析法分析，能立即找到与所求数量有直接联系的数量关系，找到解题所需要的数量后，再用综合法分析。

要求出三个小队平均每名队员采集多少千克，必需知道“三个小队共采集树种多少千克”和“全体队员的人数”（图 6-6）。

要求“三个小队共采集多少千克”，必须知道一、二、三这三个小队各采集多少千克；要求“全体队员人数”必须知道各小队的人数（图 6-6）。

三个小队的人数都已经知道，第一小队采集 11.6 千克也已知，只是第二、三小队各采集多少还不知道。

往下可用综合法得出二、三小队各采集多少千克（图 6-6）。

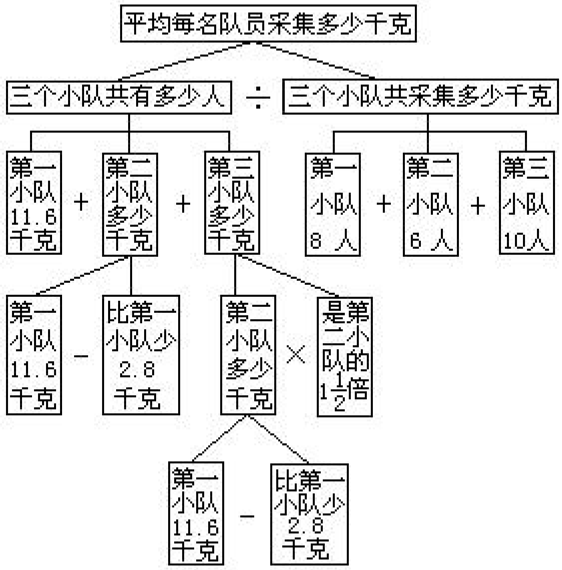


图 6-6

由“第一小队共采集 11.6 千克”和“第二小队比第一小队少采集 2.8 千克”，可求出第二小队采集多少千克；由“第二小队采集的重量”和“第

三小队采集的重量是第二小队的$1\frac{1}{2}$倍”，可求出第三小队采集多少千克。

往下可由三个小队各采集多少千克之和，求出三个小队共采集多少千克；也可以由各小队的人数之和求出“全体队员的人数”。

到此本题就可以解出来了。

本题分步列式解答的方法是：

（1）第二小队采集多少千克？

$$11.6-2.8=8.8\text{（千克）}$$

（2）第三小队采集多少千克？

$$8.8\times 1\frac{1}{2}=13.2\text{（千克）}$$

（3）三个小队共采集多少千克？

$$11.6+8.8+13.2=33.6\text{（千克）}$$

（4）三个小队有多少队员？

8+6+10=24（人）

（5）平均每人采集多少千克？

33.6÷24=1.4（千克）

综合算式：

$$[11.6+(11.6-2.8)+(11.6-2.8)\times 1\frac{1}{2}]\div(8+6+10)$$
$$=[11.6+8.8+8.8\times 1\frac{1}{2}]\div 24$$
$$=[11.6+8.8+13.2]\div 24$$

=33.6÷24

=1.4（千克）

答略。

***例：**甲、乙两城之间的路程是 210 千米，慢车以每小时 40 千米的速度由甲城开往乙城，行车 15 分钟后，快车由乙城开往甲城，经过 2 小时两车相遇。这时快车开到甲城还需要多少小时？（适于六年级程度）

解：运用分析法和综合法，分析此题的思路是：

先用分析法来思考。要求出“快车开到甲城还需要多少小时”，必须知道两个条件（图 6-7）：①相遇地点到甲城的距离；②快车每小时行多少千米。这两个条件题目中都没给出，应把它们分别作为中间问题。

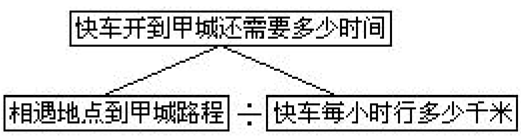


图 6-7

接着思考，要求相遇地点到甲城的路程必须具备哪两个条件？要求快车每小时行多少千米必须具备哪两个条件？……如果思路不“卡壳”，就一直思考下去，直到解答出所求问题。如果思路“卡壳”了，就改用综合法思考。另画一个思路图（图 6-8）。

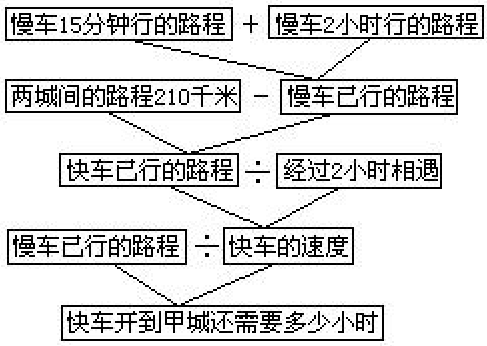


图 6-8

图 6-8 中慢车已行的路程，就是快车从相遇点到甲城的路程。这段路程是：

$$40\times\frac{1}{4}+40\times2=90\text{（千米）}$$

快车已行的路程是：

210-90=120（千米）

快车每小时所行的路程是：

120÷2=60（千米）

到此，我们可以把慢车走过的路程除以快车的速度，得到快车开到甲城还需要的时间是：

90÷60=1.5（小时）

综合算式：

$$\left(40\times\frac{1}{4}+40\times2\right)\div\left[\left(210-40\times\frac{1}{4}-40\times2\right)\div2\right]$$
$$=90\div60$$
$$=1.5\text{（小时）}$$

答略。

第二节　　观察与归纳

归纳是由部分到整体，由个别到一般的推理形式，是人类探索真理和发现真理的主要方法之一，许多数学概念和命题都是在归纳的基础上概括形成的一般结论。归纳往往从观察开始，观察是发现问题、解决问题的基础。在解题过程中的观察不是简单的观看，而是要搜索信息和捕获规律，发现题目中隐含着的某种特征，并由此进行分析、变换、归纳，获得解题方法。

1.观察法

观察法是通过观察题目中数字的变化规律及位置特点，条件与结论之间的关系，题目的结构特点及图形的特征，从而发现题目中的数量关系吧题目解答出来的一种解题方法。

对数学问题的解答一般都是从观察开始的，通过观察逐步认识数学对象的属性，所以观察的方

法是解题思维过程中最基本的方法。观察要有次序，要看得仔细，在观察时要动脑，想出道理，找出规律。最后把零零碎碎的细节归纳成具有一般意义的结论。

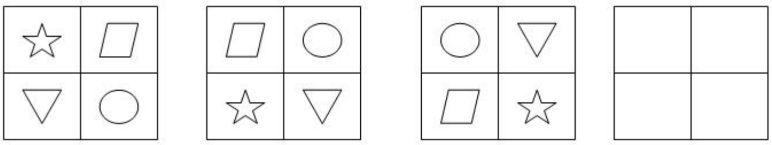
我们来解答下面的数学思考题。

例：有同样大小的红色、白色、黑色小球共 90 个，按先 3 个红色小球，后 2 个白色小球，最后 1 个黑色小球的顺序排列，如下图所示。第 70 个小球是什么颜色？

◎◎◎○○●◎◎◎○○●……

分析与解：通过观察可以看出，三种颜色的小球按一定的顺序排列，每 6 个小球可以看作一组，一组内先 3 个红色小球，后 2 个白色小球，最后是 1 个黑色小球。由于 70÷6＝11……4，所以，第 70 个小球的前面有 11 组，它是下一组的第 4 个，应该是白色的小球。

【例 2-5】观察 A、B、C 三幅图的图形变化，在 D 图中填上适当的图形。



A　　　B　　　C　　　D

【例 2-6】找出下列数的排列规律，在横线上填上合适的数。

（1）3，4，6，9，3，　　，　　，

（2）2，6，10，14，18，　　，　　，

（3）3，5，9，17，33，　　，　　，

【例 2-7】在一张白纸上画 30 条直线，它们最多能有几个交点？

【例 2-8】从 1 开始，每隔两个整数写一个整数，可得到一列数：1，4，7，10……问：第 100 个数是几？

***例：**（适于一年级程度）此题是九年义务教育六年制小学教科书数学

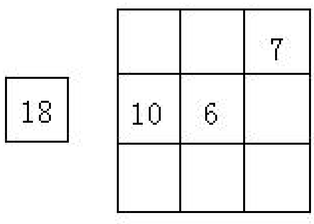


图 1-1

第二册，第 11 页中的一道思考题。书中除图 1-1 的图形外没有文字说明。这道题旨在引导儿童观察、思考，初步培养他们的观察能力。这时儿童已经学过 20 以内的加减法，基于他们已有的知识，能够判断本题的意思是：在右边大正方形内的小方格中填入数字后，使大正方形中的每一横行，每一竖列，以及两条对角线上三个数字的和，都等于左边小正方形中的数字 18。实质上，这是一种幻方，或者说是一种方阵。

解：现在通过观察、思考，看小方格中应填入什么数字。从横中行 10+6+□=18 会想到，18-10-6=2，

在横中行右面的小方格中应填入 2（图 1-2）。

从竖右列 7+2+□=18（图 1-2）会想到，18-7-2=9，在竖右列下面的小方格中应填入 9（图 1-3）。

		7
10	6	2

图 1-2

		7
10	6	2
		9

图 1-3

从正方形对角线上的 9+6+□=18（图 1-3）会想到，18-9-6=3，在大正方形左上角的小方格中应填入 3（图 1-4）。

从正方形对角线上的 7+6+□=18（图 1-3）会想到，18-7-6=5，在大正方形左下角的小方格中应填入 5（图 1-4）。

3		7
10	6	2
5		9

图 1-4

3	8	7
10	6	2
5	4	9

图 1-5

从横上行 3+□+7=18（图 1-4）会想到，18-3-7=8，在横上行中间的小方格中应填入 8（图 1-5）。

又从横下行 5+□+9=18（图 1-4）会想到，18-5-9=4，在横下行中间的小方格中应填入 4（图 1-5）。

图 1-5 是填完数字后的幻方。

例： 看每一行的前三个数，想一想接下去应该填什么数。（适于二年级程度）

6、16、26、____、____、____、____。

9、18、27、____、____、____、____。

80、73、66、____、____、____、____。

解：观察 6、16、26 这三个数可发现，6、16、26 的排列规律是：16 比 6 大 10，26 比 16 大 10，即后面的每一个数都比它前面的那个数大 10。

观察 9、18、27 这三个数可发现，9、18、27 的排列规律是：18 比 9 大 9，27 比 18 大 9，即后面的每一个数都比它前面的那个数大 9。

观察 80、73、66 这三个数可发现，80、73、66 的排列规律是：73 比 80 小 7，66 比 73 小 7，即后面的每一个数都比它前面的那个数小 7。

这样可得到本题的答案是：

6、16、26、36、46、56、66。

9、18、27、36、45、54、63。

80、73、66、59、52、45、38。

例： 将 1～9 这九个数字填入图 1-6 的方框中，使图中所有的不等号均成立。（适于三年级程度）

解：仔细观察图中不等号及方框的排列规律可发现：只有中心的那个方框中的数小于周围的四个数，看来在中心的方框中应填入最小的数 1。再看它周围的方框和不等号，只有左下角的那个方框中的数大于相邻的两个方框中的数，其它方框中的数都是一个比一个大，而且方框中的数是按顺时针方向排列越来越小。

所以，在左下角的那个方框中应填 9，在它右邻的方框中应填 2，在 2 右面的方框中填 3，在 3 上面的方框中填 4，以后依次填 5、6、7、8。

图 1-7 是填完数字的图形。

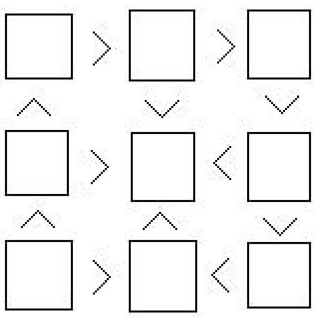


图 1-6

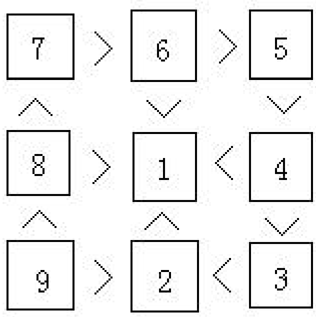


图 1-7

例； 从一个长方形上剪去一个角后，它还剩下几个角？（适于三年级程度）

解：此题不少学生不加思考就回答：“一个长方形有四个角，剪去一个角剩下三个角。”

我们认真观察一下，从一个长方形的纸上剪去一个角，都怎么剪？都是什么情况？

（1）从一个角的顶点向对角的顶点剪去一个角，剩下三个角（图 1-8）。

（2）从一个角的顶点向对边上任意一点剪去一个角，剩下四个角（图 1-9）。

（3）从一个边上任意一点向邻边上任意一点剪去一个角，

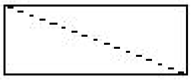


图 1-8

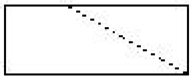


图 1-9

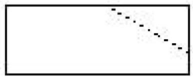


图 1-10

剩下五个角（图 1-10）。

例 5 甲、乙两个人面对面地坐着，两个人中间放着一个三位数。这个三位数的每个数字都相同，并且两人中一个人看到的这个数比另一个人看到的这个数大一半，这个数是多少？（适于三年级程度）

解：首先要确定这个三位数一定是用阿拉伯数字表示的，不然就没法考虑了。

甲看到的数与乙看到的数不同，这就是说，这个三位数正看、倒看都表示数。在阿拉伯数字中，只有 0、1、6、8、9 这五个数字正看、倒看都表示数。

这个三位数在正看、倒看时，表示的数值不同，显然这个三位数不能是 000，也不能是 111 和 888，只可能是 666 或 999。

如果这个数是 666，当其中一个人看到的是 666 时，另一个人看到的一定是 999，999-666=333，333 正好是 666 的一半。所以这个数是 666，也可以是 999。

***例:** 1966、1976、1986、1996、2006 这五个数的总和是多少？（适于三年级程度）

解：这道题可以有多种解法，把五个数直接相加，虽然可以求出正确答案，但因数字大，计算起来容易出错。

如果仔细观察这五个数可发现，第一个数是 1966，第二个数比它大 10，第三个数比它大 20，第四个数比它大 30，第五个数比它大 40。因此，这道题可以用下面的方法计算：

1966+1976+1986+1996+2006

=1966×5+10×（1+2+3+4）

=9830+100

=9930

这五个数还有另一个特点：中间的数是 1986，第一个数 1966 比中间的数 1986 小 20，最后一个数 2006 比中间的数 1986 大 20，1966 和 2006 这两个数的平均数是 1986。1976 和 1996 的平均数也是 1986。这样，中间的数 1986 是这五个数的平均数。所以，这道题还可以用下面的方法计算：

1966+1976+1986+1996+2006

=1986×5

=9930

例：你能从 400÷25=（400×4）÷（25×4）=400×4÷100=16 中得到启发，很快算出（1）600÷25（2）900÷25（3）1400÷25（4）1800÷25（5）7250÷25 的得数吗？（适于四年级程度）

解：我们仔细观察一下算式：

400÷25=（400×4）÷（25×4）=400×4÷100=16

不难看出，原来的被除数和除数都乘以 4，目的是将除数变成 1 后面带有 0 的整百数。这样做的根据是"被除数和除数都乘以一个相同的数（零除外），商不变"。

进行这种变化的好处就是当除数变成了 1 后面带有 0 的整百数以后，就可以很快求出商。按照这个规律，可迅速算出下列除法的商。

（1）600÷25　　　　（2）900÷25

=（600×4）÷（25×4）　　=（900×4）÷（25×4）

=600×4÷100　　　　=900×4÷100

=24　　　　　　　=36

（3）1400÷25　　　　（4）1800÷25

=（1400×4）÷（25×4）　　=（1800×4）÷（25×4）

=1400×4÷100　　　　=1800×4÷100

=56　　　　　　　=72

（5）7250÷25

=（7250×4）÷（25×4）

=29000÷100

=290

***例；**把 1～1000 的数字如图 1-11 那样排列，再如图中那样用一个长方形框框出六个数，这六个数的和是 87。如果用同样的方法（横着三个数，竖着两个数）框出的六个数的和是 837，这六个数都是多少？（适于五年级程度）

解：（1）观察框内的六个数可知：第二个数比第一个数大 1，第三个数比第一个数大 2，第四

个数比第一个数大 7，第五个数比第一个数大 8，第六个数比第一个数大 9。

假定不知道这几个数，而知道上面观察的结果，以及框内六个数的和是 87，要求出这几个数，就要先求出六个数中的第一个数：

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	999	1000

图 1-11

（87-1-2-7-8-9）÷6

＝60÷6

=10

求出第一个数是 10，往下的各数也就不难求了。

因为用同样的方法框出的六个数之和是 837，这六个数之中后面的五个数也一定分别比第一个数大 1、2、7、8、9，所以，这六个数中的第一个数是：

（837-1-2-7-8-9）÷6

＝810÷6

=135

第二个数是：135+1=136

第三个数是：135+2=137

第四个数是：135+7=142

第五个数是：135+8=143

第六个数是：135+9=144

答略。

（2）观察框内的六个数可知：①上、下两数之差都是 7；②方框中间坚行的 11 和 18，分别是上横行与下横行三个数的中间数。

11=（10+11+12）÷3

18=（17+18+19）÷3

所以上横行与下横行两个中间数的和是：

87÷3＝29

由此可得，和是 837 的六个数中，横向排列的上、下两行两个中间数的和是：

837÷3＝279

因为上、下两个数之差是 7，所以假定上面的数是 x，则下面的数是 x+7。

x+（x+7）=279

2x+7=279

2x=279-7

=272

x=272÷2

=136

x+7=136+7

=143

因为上一横行中间的数是 136，所以，第一个数是：136-1=135

第三个数是：135+2=137

因为下一横行中间的数是 143，所以，

第四个数是：143-1=142

第六个数是：142+2=144

答略。

***例：**如图 1-18 所示，某铸件的横截面是扇形，半径是 15 厘米，圆心角是 72°，铸件长 20 厘米。求它的表面积和体积。（适于六年级程度）

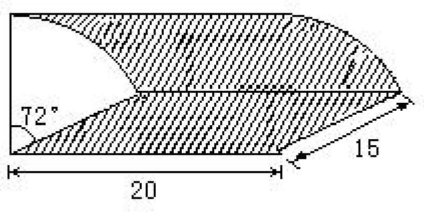


图 1-18

解：遇到这样的题目，不但要注意计算的技巧，还要注意观察的全面性，不可漏掉某一侧面。图 1-18 表面积中的一个长方形和一个扇形就容易被漏掉，因而在解题时要仔细。

求表面积的方法 1：

$$两个扇形面积+两个长方形面积+圆柱侧面积\times\frac{72}{360}$$

$$\frac{3.14\times15^2}{360}\times72\times2+20\times15\times2+15\times2\times3.14\times20\times\frac{72}{360}$$
$$=\frac{3.14\times225}{360}\times72\times2+300\times2+30\times3.14\times20\times\frac{18}{90}$$
$$=\frac{3.14\times225}{5}\times2+600+30\times3.14\times4$$

＝3.14×45×2+600+120×3.14

=3.14×90+3.14×120+600

=3.14×（90+120）+600

=659.4+600

=1259.4（平方厘米）

求表面积的方法 2：

$$（两个圆的面积+圆柱侧面积）\times\frac{72}{360}+两个长方形的面积$$
$$（3.14\times152\times2+2\times15\times3.14\times20）\times\frac{72}{360}+20\times15\times2$$
$$=3.14\times（225\times2+30\times20）\times\frac{72}{360}+40\times15$$

$=3.14\times(450+600)\times\frac{72}{360}+600$

$=3.14\times1050\times\frac{72}{360}+600$

=3.14×210+600

=659.4+600

=1259.4（平方厘米）

铸件的体积：

$3.14\times152\times20\times\frac{72}{360}$

$=3.14\times225\times20\times\frac{1}{5}$

=3.14×225×4

=3.14×900

=2826（立方厘米）

答略。

2. 归纳法

归纳是通过对某类事物中的若干特殊情况的分析，得出一般结论的思维方法。人们认识事物的一般规律，常常是通过认识具体的、个别的对象而实现的。这种思维方法也称作由特殊到一般的思维方法。

在小学数学解题中主要表现在两个方面。

第一，应用不完全归纳法获得有关结论。不完全归纳法是根据某类事物的部分对象具有（或不具有）某种属性而得到该事物的全体也具有（或不具有）这种属性。如，当 n＝1，2，3，……，39 时，n2＋n＋41 所得的值是质数。如果由此推出当 n 为任意自然数时 n2＋n＋41 的值都是质数”，那就不可靠了。因为 n＝40 时，是合数。尽管这种不完全归纳法需要经过严格证明才能确认其正确性，但这种方法符合人类认识事物的规律，更适合小学生的年龄特点，比较容易接受。这种方法的意义更在于猜测和发现，因此它是数学创造性思维的一种基本方法，在解决问题中有极重要的作用。

第二，应用完全归纳法获得有关结论。完全归纳法是根据某类事物的每个对象都具有（或不具有）某种属性而推出该类事物的全体具有（或不具有）这种属性。如，分别通过对直角三角形、锐角三角形、钝角三角形的面积的研究，得出面积都是底乘高的一半，而三角形只有这三种，因此归纳出“三角形的面积公式是底乘高的一半”的结论。由于这种方法考察了某类事物的所有对象，或一切特殊情况，所以得到的结论必定是正确的。

3. 用观察与归纳法解决问题的一般步骤为：

（1）观察若干具体实例，发现某些相同的性质。
（2）从相同的性质中归纳出具有一般意义的结论。

第三节　枚举与筛选

1.枚举法：在解决问题时把所有可能的情况不重复、不遗漏、有顺序地一一列举出来的解题方法。也称列举法。应用枚举法解题时，往往把题目中的条件以列表的形式排列起来，有时也要画图。

2.筛选法：在枚举过程中将重复的和不合要求的情况除去并将遗漏的情况找回来的解题方法。

在解题过程中，把满足题目要求的对象一一列举或分类列举出来，然后从中筛选出完全符合题目要求的答案，那么问题便可以很容易地获得解决。

3.运用枚举和筛选解题的关键在于以下两点：

（1）将整体分解成不重复地不遗漏的各种情况。
（2）对枚举的结果进行综合考查、筛选并得出结论。

在解答小学数学问题时，也要用枚举的思想方法对一些比较复杂的问题进行分析，分成若干类加以考察，从而使问题得到解决。

例：有一批气球，平均分给 9 个人还剩 2 个，如果平均分给 7 个人还剩 3 个，那么这批气球至少有多少个？

【例 2-10】某商店营业员只有 2 分和 5 分的两种硬币，若他要找给顾客 5 角钱，有几种找法（写出找的方法）？

【例 2-11】小明和小红玩掷骰子的游戏。将 2 枚骰子一起掷出，若点数和为 7 则小明胜；若点数和为 8 则小红胜。试判断他们两人谁获胜的可能性大。

【例 2-12】将 50 这个数拆成 10 个质数的和，要求其中最大的质数尽可能的大，那么这个最大的质数是几？

例：小于 1000 的自然数中，各数位上的数的和是 5 的自然数有多少个？

分析：可以按数位多少进行分类，分别考察满足条件的自然数各有多少个。

（1）符合条件的三位数。

百位数是 1 的三位数，其它两个数位上的数的和是 4，这些自然数是：104、140、113、131、122，有 5 个。

百位数是 2 的三位数，其它两个数位上的数的和是 3，这些自然数是：203、230、212、221，有 4 个。

百位数是 3 的三位数，其它两个数位上的数的和是 2，这些自然数是：302、320、311，有 3 个。

百位数是 4 的三位数，其它两个数位上的数的和是 1，这些自然数是：401、410，有 2 个。

百位数是 5 的三位数，只有 500，有 1 个。

因此，符合条件的三位数有：5＋4＋3＋2＋1＝15（个）。

（2）符合条件的两位数：14、41、23、32、50，有 5 个。

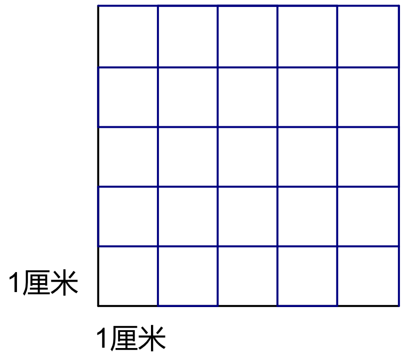
（3）符合条件的一位数只有 5，有 1 个。

解：综合以上的分析可知，符合条件的自然数一共有：

15＋5＋1＝21（个）

答：小于 1000 的自然数中，各数位上的数的和是 5 的自然数有 21 个。

例：下面的图形是由边长 1 厘米的正方形组成的，在这个图形中一共可以找出多少个正方形？



分析：直接去数难免有重复或遗漏的情况，我们可以按正方形的边长的多少进行分类，考察正方形的个数。

（1）边长是 1 厘米的正方形，从大正方形的一边看有 5 个，从另一边看也有 5 个，因此共有：5×5＝25（个）。

（2）边长是 2 厘米的正方形，从大正方形的一边看有 4 个，从另一边看也有 4 个，因此共有：4×4＝16（个）。

（3）边长是 3 厘米的正方形，从大正方形的一边看有 3 个，从另一边看也有 3 个，因此共有：3×3＝9（个）。

（4）边长是 4 厘米的正方形，从大正方形的一边看有 2 个，从另一边看也有 2 个，因此共有：2×2＝4（个）。

（5）边长是 5 厘米的正方形，只有 1 个。

所以，在这个图形中一共可以找出的正方形有：

5×5＋4×4＋3×3＋2×2＋1＝25＋16＋9＋4＋1＝55（个）

答：在这个图形中一共可以找出 55 个正方形。

例 1 一本书共 100 页，在排页码时要用多少个数字是 6 的铅字？（适于三年级程度）

解：把个位是 6 和十位是 6 的数一个一个地列举出来，数一数。

个位是 6 的数字有：6、16、26、36、46、56、66、76、86、96，共 10 个。

十位是 6 的数字有：60、61、62、63、64、65、66、67、68、69，共 10 个。

10+10=20（个）

答：在排页码时要用 20 个数字是 6 的铅字。

***例：** 从 A 市到 B 市有 3 条路，从 B 市到 C 市有两条路。从 A 市经过 B 市到 C 市有几种走法？（适于三年级程度）

解：作图 3-1，然后把每一种走法一一列举出来。

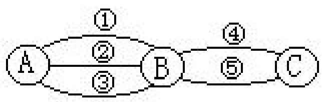


图 3-1

第一种走法：A ① B ④ C

第二种走法：A ① B ⑤ C

第三种走法：A ② B ④ C

第四种走法：A ② B ⑤ C

第五种走法：A ③ B ④ C

第六种走法：A ③ B ⑤ C

答：从 A 市经过 B 市到 C 市共有 6 种走法。

例： 印刷工人在排印一本书的页码时共用 1890 个数码，这本书有多少页？（适于四年级程度）

解：（1）数码一共有 10 个：0、1、2……8、9。0 不能用于表示页码，所以页码是一位数的页有 9 页，用数码 9 个。

（2）页码是两位数的从第 10 页到第 99 页。因为 99-9=90，所以，页码是两位数的页有 90 页，用数码：

2×90=180（个）

（3）还剩下的数码：

1890-9-180=1701（个）

（4）因为页码是三位数的页，每页用 3 个数码，100 页到 999 页，999-99=900，而剩下的 1701 个数码除以 3 时，商不足 600，即商小于 900。所以页码最高是 3 位数，不必考虑是 4 位数了。往下

要看 1701 个数码可以排多少页。

1701÷3=567（页）

（5）这本书的页数：

9+90+567=666（页）

答略。

***例：** 用一根 80 厘米长的铁丝围成一个长方形，长和宽都要是 5 的倍数。哪一种方法围成的长方形面积最大？（适于四年级程度）

解：要知道哪种方法所围成的面积最大，应将符合条件的围法一一列举出来，然后加以比较。因为长方形的周长是 80 厘米，所以长与宽的和是 40 厘米。列表 3-1：

表 3-1

	1	2	3	4
长	35	30	25	20
宽	5	10	15	20

表 3-1 中，长、宽的数字都是 5 的倍数。因为题目要求的是哪一种围法的长方形面积最大，第四种围法围出的是正方形，所以第四种围法应舍去。

前三种围法的长方形面积

分别是：

35×5=175（平方厘米）

30×10=300（平方厘米）

25×15=375（平方厘米）

答：当长方形的长是 25 厘米，宽是 15 厘米时，长方形的面积最大。

例： 如图 3-2，有三张卡片，每一张上写有一个数字 1、2、3，从中抽出一张、两张、三张，按任意次序排列起来，可以得到不同的一位数、两位数、三位数。请将其中的质数都写出来。（适于五年级程度）

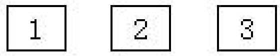


图 3-2

解：任意抽一张，可得到三个一位数：1、2、3，其中 2 和 3 是质数；

任意抽两张排列，一共可得到六个不同的两位数：12、13、21、23、31、32，其中 13、23 和 31 是质数；

三张卡片可排列成六个不同的三位数，但每个三位数数码的和都是 1+2+3=6，即它们都是 3 的倍数，所以都不是质数。

综上所说，所能得到的质数是 2、3、13、23、31，共五个。

***例：** 在一条笔直的公路上，每隔 10 千米建有一个粮站。一号粮站存有 10 吨粮食，2 号粮站存有 20 吨粮食，3 号粮站存有 30 吨粮食，4 号粮站是空的，5 号粮站存有 40 吨粮食。现在要把全部粮食集中放在一个粮站里，如果每吨 1 千米的运费是 0.5 元，那么粮食集中到第几号粮站所用的运费最少（图 3-3）？（适于五年级程度）

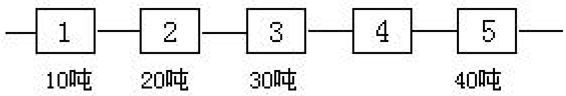


图 3-3

解：看图 3-3，可以断定粮食不能集中在 1 号和 2 号粮站。

下面将运到 3 号、4 号、5 号粮站时所用的运费一一列举，并比较。

（1）如果运到 3 号粮站，所用运费是：

0.5×10×（10+10）+0.5×20×10+0.5×40×（10+10）

=100+100+400

=600（元）

（2）如果运到 4 号粮站，所用运费是：

0.5×10×（10+10+10）+0.5×20×（10+10）+0.5×30×10+0.5×40×10

=150+200+150+200

=700（元）

（3）如果运到 5 号粮站，所用费用是：

0.5×10×（10+10+10+10）+0.5×20×（10+10+10）+0.5×30×（10+10）

=200+300+300

=800（元）

800＞700＞600

答：集中到第三号粮站所用运费最少。

***例：** 小明有 10 个 1 分硬币，5 个 2 分硬币，2 个 5 分硬币。要拿出 1 角钱买 1 支铅笔，问可以有几种拿法？用算式表达出来。（适于五年级程度）

解：（1）只拿出一种硬币的方法：

①全拿 1 分的：

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=1（角）

②全拿 2 分的：

2+2+2+2+2=1（角）

③全拿 5 分的：

5+5=1（角）

只拿出一种硬币，有 3 种方法。

（2）只拿两种硬币的方法：

①拿 8 枚 1 分的，1 枚 2 分的：

1+1+1+1+1+1+1+1+2=1（角）

②拿 6 枚 1 分的，2 枚 2 分的：

1+1+1+1+1+1+2+2=1（角）

③拿 4 枚 1 分的，3 枚 2 分的：

1+1+1+1+2+2+2=1（角）

④拿 2 枚 1 分的，4 枚 2 分的：

1+1+2+2+2+2=1（角）

⑤拿 5 枚 1 分的，1 枚 5 分的：

$$1+1+1+1+1+5=1（角）$$

只拿出两种硬币，有 5 种方法。

（3）拿三种硬币的方法：

①拿 3 枚 1 分，1 枚 2 分，1 枚 5 分的：

$$1+1+1+2+5=1（角）$$

②拿 1 枚 1 分，2 枚 2 分，1 枚 5 分的：

$$1+2+2+5=1（角）$$

拿出三种硬币，有 2 种方法。

共有：

$$3+5+2=10（种）$$

答：共有 10 种拿法。

***例：** 甲、乙、丙、丁与小强五位同学一起比赛象棋，每两人都要比赛一盘。到现在为止，甲赛了 4 盘，乙赛了 3 盘，丙赛了 2 盘，丁赛了 1 盘。问小强赛了几盘？（适于五年级程度）

解：作表 3-2。

表 3-2

	甲	乙	丙	丁	强
甲	\				
乙	✓	\			
丁	✓	○	○	\	
强	✓	✓	○	○	\

甲已经赛了 4 盘，就是甲与乙、丙、丁、小强各赛了一盘，在甲与乙、丙、丁、小强相交的那些格里都打上√；乙赛的盘数，就是除了与甲赛的那一盘，又与丙和小强各赛一盘，在乙与丙、小强相交的那两个格中都打上√；丙赛了两盘，就是丙与甲、乙各赛一盘，打上√；丁与甲赛的那一盘也打上√。

丁未与乙、丙、小强赛过，在丁与乙、丙与小强相交的格中都画上圈。

根据条件分析，填完表格以后，可明显地看出，小强与甲、乙各赛一盘，未与丙、丁赛，共赛 2 盘。

答：小强赛了 2 盘。

***例：** 商店出售饼干，现存 10 箱 5 千克重的，4 箱 2 千克重的，8 箱 1 千克重的，一位顾客要买 9 千克饼干，为了便于携带要求不开箱。营业员有多少种发货方式？（适于五年级程度）

解：作表 3-3 列举发货方式。

表 3-3

箱重	5 千克	2 千克	1 千克	方 法
所取的箱数	1	2	0	1
	1	1	2	2
	1	0	4	3
	0	1	7	4
	0	2	5	5
	0	3	3	6
	0	4	1	7

答：不开箱有 7 种发货方式。

***例：** 运输队有 30 辆汽车，按 1～30 的编号顺序横排停在院子里。第一次陆续开走的全部是单号车，以后几次都由余下的第一辆车开始隔一辆开走一辆。到第几次时汽车全部开走？最后开走的是第几号车？（适于五年级程度）

解：按题意画出表 3-4 列举各次哪些车开走。

表 3-4

汽车编号	1、2、3、…… 29、30
第一次开走后剩下的	2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30
第二次开走后剩下的	4、8、12、16、20、24、28
第三次开走后剩下的	8、16、24
第四次开走后剩下的	16

从表 3-4 中看得出，第三次开走后剩下的是第 8 号、16 号、24 号车。按题意，第四次 8 号、24 号车开走。到第五次时汽车全部开走，最后开走的是第 16 号车。

答：到第五次时汽车全部开走，最后开走的是第 16 号车。

***例：** 在甲、乙两个仓库存放大米，甲仓存 90 袋，乙仓存 50 袋，甲仓每次运出 12 袋，乙仓每次运出 4 袋。运出几次后，两仓库剩下大米的袋数相等？（适于五年级程度）

解：根据题意列表 3-5。

表 3-5

	甲仓存的袋数	乙仓存的袋数
原来存	90	50
第一次运走后剩	78	46
第二次运走后剩	66	42
第三次运走后剩	54	38
第四次运走后剩	42	34
第五次运走后剩	30	30

从表 3-5 可以看出，原来甲乙两仓库所存大米相差 40 袋；第一次运走后，两仓剩下的大米相差 78-46=32（袋）；第二次运走后，两仓剩下的大米相差 66-42=24（袋）；第三次运走后，两仓剩下的大米相差 54-38=16（袋）；第四次运走后，两仓剩下的大米相差 42-34=8（袋）；第五次运走后，两仓剩下的大米袋数相等。

40-32=8

32-24=8

24-16=8

……

从这里可以看出，每运走一次，两仓库剩下大米袋数的相差数就减少 8 袋。由此可以看出，两仓库原存大米袋数的差，除以每次运出的袋数差就得出运几次后两个仓库剩下大米的袋数相等。

（90-50）÷（12-4）=5（次）

答：运出 5 次后两个仓库剩下大米的袋数相等。

***例：** 有三组小朋友共 72 人，第一次从第一组里把与第二组同样多的人数并入第二组；第二次从第二组里把与第三组同样多的人数并入第三组；第三次从第三组里把与第一组同样多的人数并入第一组。这时，三组的人数一样多。问原来各组有多少个小朋友？（适于五年级程度）

解：三个小组共 72 人，第三次并入后三个小组人数相等，都是 72÷3=24（人）。在这以前，即第三组未把与第一组同样多的人数并入第一组时，第一组应是 24÷2=12（人），第三组应是（24+12）=36（人），第二组人数仍为 24 人；在第二次第二组未把与第三组同样多的人数并入第三组之前，第三组应为 36÷2=18（人），第二组应为（24+18）=42（人），第一组人数仍是 12 人；在第一次第一组未把与第二组同样多的人数并入第二组之前，第二组的人数应为 42÷2=21（人），第一组人数应为 12+21=33（人），第三组应为 18 人。

这 33 人、21 人、18 人分别为第一、二、三组原有的人数，列表 3-6。

表 3-6

	第一组	第二组	第三组
第三次并入后	24	24	24
第二次并入后	12	24	36
第一次并入后	12	42	18
每组原有人数	33	21	18

答：第一、二、三组原有小朋友分别是 33 人、21 人、 18 人

第四节　化归

曹冲称象的故事就是化整为零的转化思想，把一头大象的重量转化为一堆石头的重量。这就是化归

化归是转化和归纳的简称。化归的实质——把需要解决的新问题转化成已解决或容易解决的老问题，借助老问题的解法来解决新问题。

烧水问题也能形象的描述化归的意义：已有煤气灶，水龙头，水壶，要求烧一壶水。

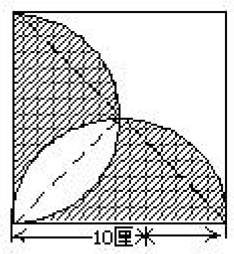
已解决的老问题：水壶里没水，已知可以用三个步骤烧开水。

新问题：水壶里已经装好水，请烧一壶水。用化归思想解决问题。

当数学问题情景陌生而且数量关系复杂时，要对题目进行“等效处理”，应用转化思想方法去解答问题。

在数学解题中应用转化的思想方法，其核心是把陌生的问题转化为熟悉的问题，或把数量关系复杂的问题转化为数量关系简单的问题，然后进行解答。在小学数学解题中，要着重考虑：从“未知”向“已知”转化；从“繁难”向“简易”转化； 从“一个量”向“另一个量”转化，从而找到解答问题的途径和方法。

例：如下图所示，求图中阴影部分的面积。



分析：从图中可知，正方形的边长是 10 厘米，正方形内阴影部分是由两个半圆相交所围成的图形，直接计算有困难。应用转化的思想，把阴影部分右侧两块虚线画出的弓形图形转动，补在图形中间，阴影部分正好转化成一个底和高都是 10 厘米的三角形，由此阴影部分的面积就可以求出来。

解：10×10÷2＝50（平方厘米）

答：阴影部分的面积是 50 平方厘米。

在这道题的解答思考过程中，实际上是先把一个较复杂的平面图形面积的计算问题，转化为一个简单的平面图形面积的计算问题，然后再进行计算。

例：买 3 双皮鞋的价钱与 20 双布鞋的价钱相等。买 2 双皮鞋与 5 双布鞋要付 660 元钱，每双皮鞋和布鞋各多少元？

分析：我们利用转化思想对题目条件进行“等效处理”：由于“买 3 双皮鞋的价钱与 20 双布鞋的价钱相等”，那么推得：买 3×2 双皮鞋价钱与 20×2 双布鞋的价钱相等；又由于“买 2 双皮鞋与 5 双布鞋要付 660 元钱”，那么又可以推得：买 2×3 双皮鞋与 5×3 双布鞋要付 660×3 元钱。再用“20×2 双布鞋的价钱”去代替“3×2 双皮鞋价钱”就可以推得：买 20×2 双布鞋与 5×3 双布鞋要付 660×3 元钱。从而可以先求出每双布鞋多少元钱。

解：（1）每双布鞋多少元钱？

660×3÷（20×2＋5×3）＝36（元）

（2）每双皮鞋多少元钱？

36×20÷3＝240（元）

答：每双皮鞋 240 元，每双布鞋 36 元。

这道题还可以有其它的解法，大家可以试一试。

例：周末小红在家做作业，开始时看见钟面上的分针略超过时针，做完作业时，发现时针和分针恰好互换了位置，小红做作业用了多少分钟？

分析：把问题转化为同向行驶的问题，根据公式：行驶时间=行驶路程÷速度和。

解：分针每分钟走 1 格，时针每分钟走 $\frac{1}{12}$ 格，总路程是 60 格，所以

$$60 \div \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 55\frac{5}{13}(分)$$

答：小红做作业用了$55\frac{5}{13}$分钟。

例：用大、小两辆汽车运煤，大汽车运了 9 次，小汽车运了 10 次，两车一共运了 132 吨，已知大汽车 3 次运的量等于小汽车 4 次运的量，求大、小汽车的载重量各是多少？

分析：把两种车转化为一种车，问题可以得到解决。

解：$9 \div 3 \times 4 = 12$（次）

$$132 \div (12 + 10) = 6（吨）$$

$$6 \times 4 \div 3 = 8(吨)$$

答：大汽车的载重量是 8 吨，小汽车是 6 吨。

例：已知被除数是 29，除数是 5，若被除数和除数都加上一个相同的数后，新被除数与新除数的比为 19:7，求加上的这个数是多少？

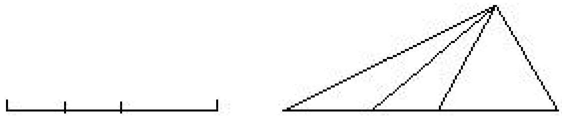
分析：把问题转化为差倍问题。差倍问题即已知两数之差和两数之间的倍数关系，求出两数。公式：差÷（倍数－1）=小数；小数×倍数=大数。

化归是解决问题的一种最基本的思想方法。我们要注意学习和体会在解题过程中，怎样化繁就简、化难为易、化陌生为熟悉、化未知为已知，使问题得到解决，从而逐步积累解题经验，进一步掌握解题的思想方法。

习题：
1. 已知被除数是 29，除数是 5。若被除数和除数都加上一个相同的数，新被除数和新除数的比为 19:7.求加上的这个数是多少？
2. 学校里买来了 5 个保温瓶和 10 个茶杯，共用了 90 元钱。每个保温瓶是每个茶杯价钱的 4 倍，每个保温瓶和每个茶杯各多少元？
3. 王老师有一盒铅笔，如平均分给 2 名同学余 1 支，平均分给 3 名同学余 2 支，平均分给 4 名同学余 3 支，平均分给 5 名同学余 4 支。问这盒铅笔最少有多少支？
答案
4. 某鞋厂生产 1800 双鞋，把这些鞋分别装入 12 个纸箱和 4 个木箱。如果 3 个纸箱和 2 个木箱装的鞋同样多。每个纸箱和每个木箱各装鞋多少双？
5. 学校买了 4 张桌子和 6 把椅子，共用 640 元。2 张桌子和 5 把椅子的价钱相等，桌子和椅子的单价各是多少元？
6. 上午 6 时从汽车站同时发出 1 路和 2 路公共汽车，1 路车每隔 12 分钟发一次，2 路车每隔 18 分钟发一次，求下次同时发车时间。
7.

求下面线段上可以找到的不同线段的总条数的解题方法，可以类比到在三角形内可以找到不同

的三角形的总个数的解题方法。它们的解题表达式都是：1＋2＋3＝6 .

8. 

1.课本例题

2.想：根据每个保温瓶的价钱是每个茶杯的 4 倍，可把 5 个保温瓶的价钱转化为 20 个茶杯的价钱。这样就可把 5 个保温瓶和 10 个茶杯共用的 90 元钱，看作 30 个茶杯共用的钱数。

解：每个茶杯的价钱：

90÷（4×5+10）=3（元）

每个保温瓶的价钱：

3×4=12（元）

答：每个保温瓶 12 元，每个茶杯 3 元。

3.想：根据题意，可以将题中的条件转化为：平均分给 2 名同学、3 名同学、4 名同学、5 名同学都少一支，因此，求出 2、3、4、5 的最小公倍数再减去 1 就是要求的问题。

解：2、3、4、5 的最小公倍数是 60

60-1=59（支）

答：这盒铅笔最少有 59 支。

4.想：根据已知条件，可求 12 个纸箱转化成木箱的个数，先求出每个木箱装多少双，再求每个纸箱装多少双。

解：12 个纸箱相当木箱的个数：

2×（12÷3）=2×4＝8（个）

一个木箱装鞋的双数：

1800÷（8+4）=18000÷12=150（双）

一个纸箱装鞋的双数：

150×2÷3=100（双）

答：每个纸箱可装鞋 100 双，每个木箱可装鞋 150 双。

5.想：由“2 张桌子和 5 把椅子的价钱相等”这一条件，可以推出 4 张桌子就相当于 10 把椅子的价钱，买 4 张桌子和 6 把椅子共用 640 元，也就相当于买 16 把椅子共用 640 元。

解：5×（4÷2）+6=16（把）

640÷16=40（元）

40×5÷2=10O（元）

答：桌子和椅子的单价分别是 100 元、40 元。

6.想：1 路和 2 路下次同时发车时，所经过的时间必须既是 12 分的倍数，又是 18 分的倍数。也就是它们的最小公倍数。

解：12 和 18 的最小公倍数是 36

6 时+36 分=6 时 36 分

答：下次同时发车时间是上午 6 时 36 分。

第五节　假设

假设是小学数学重要的解题方法之一。用假设法解决问题时，可以先根据题目中的已知条件或某种现象做出假设。

当数学问题的数量关系隐蔽时，可以先把题中的条件假设为一个与之相近、相似的条件，或直接假设问题，然后从这个假设开始，分析题目的数量关系，从而找到解题途径和方法。

数学解题中，也离不开假设思路，尤其是在解比较复杂的题目时，如能用“假设”的办法去思考，往往比其他思路简捷、方便。我们把先提出假设、猜想，再进行检验、证实的解题思路，叫假设思路。

讲述鸡兔同笼问题，用假设法解答。

（一）假设情节变化

例：学校有篮球和足球共 21 个，借出篮球个数的$\frac{1}{3}$和 1 个足球后，两种球的个数相等。原来有篮球和足球各多少个？

解：假设篮球没有借出，足球借出一个，那么，可以把现有篮球的个数看作是 3 份数，把现有足球的个数看作 2 份数，两种球的总份数是：

3+2=5（份）

原来篮球的个数是：

$$(21-1)\times\frac{3}{5}=12\text{（个）}$$

原来足球的个数是：

21-12=9（个）

答略。

例 2 甲乙两个煤场共存煤 92 吨，从甲场运出 28 吨后，乙场的存煤比甲场的 4 倍少 6 吨。两场原来各存煤多少吨？（适于六年级程度）

解：假设从甲场运出的不是 28 吨，而是比 28 吨少 6 吨的 22 吨，那么，乙场的存煤数就正好是甲场的 4 倍，甲场的存煤是 1 份数，乙场的存煤是 4

份数，乙场的存煤是两场存煤总数的$\frac{4}{5}$。所以，

乙场原来存煤：

$$(92-22)\times\frac{4}{5}=50\text{（吨）}$$

甲场原来存煤：

92-50=42（吨）

答略。

例：制药厂委托搬运公司运送 500 个玻璃瓶，双方商定每个玻璃瓶的运费是 0.24 元，如打破一个，不但不给运费，而且还要赔偿 1.26 元。结果搬运公司最终共得搬运费 115.50 元。问搬运过程中打破了几个玻璃瓶？

【分析】假设 500 个玻璃瓶在搬运过程中都没有

被打破，那么搬运公司一共应得运费

0.24×500=120 元，

然而实际上少得了

120-115.50=4.50 元，

由于打破一个玻璃瓶要少得

0.24+1.26=1.50 元，

由此可以算出搬运公司在搬运过程中打破的玻璃瓶的个数。

（二）假设两个（或几个）数量相等

例：某汽车站售出汽车月票若干张。已知学生票每张 6 元，成人票每张 14 元；售出的学生票比成人票多 700 张，售出的成人票比学生票多收入 6200 元。问该汽车站售出的成人票与学生票各多少张？

解法一：【分析】假设该汽车站再售出成人票 700 张，

则售出的学生票的张数就与成人票的张数同样多了，

那么成人票又要多收入 700×14=9 800 元。

这样，成人票就比学生票一共要多收入

6200+9800=16000 元。

由于每张成人票比学生票要多收入

14-6=8 元，

而 16000 元里面包含了 16000÷8=2000 个 8 元，那么学生票共售出了 2000 张，成人票

2000-700=1300 张

解法二：换个思路想一下？

例 1 有两块地，平均亩产粮食 185 千克。其中第一块地 5 亩，平均亩产粮食 203 千克。如果第二块地平均亩产粮食 170 千克，第二块地有多少亩？（适于五年级程度）

解：假设两块地平均亩产粮食都是 170 千克，则第一块地的平均亩产量比两块地的平均亩产多：

203-170=33（千克）

5 亩地要多产：

33×5=165（千克）

两块地实际的平均亩产量比假设的平均亩产量多：

185-170=15（千克）

因为 165 千克中含有多少个 15 千克，两块地就一共有多少亩，所以两块地的亩数一共是：

165÷15=11（亩）

第二块地的亩数是：

11-5=6（亩）

答略。

例2 两根同样长的绳子，甲绳剪去$\frac{1}{3}$，乙绳剪去$\frac{1}{3}$米，剩下的绳子哪一根长？（适于六年级程度）

解：此题可以有三种答案。

（1）假设两根绳子都长1米，则甲绳剪去$\frac{1}{3}$后，剩下$1\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$（米）；乙绳剪去$\frac{1}{3}$米后，剩下$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$（米）。

答：剩下的两根绳子一样长。

（2）假设两根绳子都比1米短，任意假设为0.6米，则甲绳剪去$\frac{1}{3}$后，剩下$0.6\times(1-\frac{1}{3})=0.4$（米）$=\frac{6}{15}$（米）；乙绳剪去$\frac{1}{3}$米后，剩下$0.6-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$（米）。

答：甲绳剩下的部分比乙绳剩下的部分长。

（3）假设两根绳子都比1米长。任意假定为1.5米，则甲绳剪去$\frac{1}{3}$后，乘下$1.5\times(1-\frac{1}{3})=1.5\times\frac{2}{3}=1$（米）；乙绳剪去$\frac{1}{3}$米后，剩下$1.5-\frac{1}{3}=1\frac{1}{6}$（米）。

答：乙绳剩下的部分比甲绳剩下的部分长。

例3 一项工作，甲、乙两队单独做各需要10天完成，丙队单独做需要7.5天完成。在三队合做的过程中，甲队外出1天，丙队外出半天。问三队合做完成这项工作实际用了几天？（适于六年级程度）

解：假设甲没有外出，丙也未外出，也就是说，甲、乙、丙三个队的工作天数一样多，则三队合做的工作量可达到：

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{10}+\frac{1}{7.5}\times\frac{1}{2}\\=&1.1+\frac{1}{15}\\=&1\frac{1}{6}\end{aligned}$$

三队合做这项工作，实际用的天数是：

$$\begin{aligned}&1\frac{1}{6}\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{7.5})\\=&1\frac{1}{6}\div\frac{1}{3}\\=&\frac{7}{6}\times3\\=&3.5(\text{天})\end{aligned}$$

答略。

***例4** 一项工程，甲、乙两队合做80天完成。如果先由甲队单独做72天，再由乙队单独做90天，可以完成全部工程。甲、乙两队单独完成全部工程各需要用多少天？（适于六年级程度）

解：假设甲队做 72 天后，乙队也做 72 天，则剩下的工程是：

$$1-\frac{1}{80}\times 72=\frac{1}{10}$$

乙队还需要做的时间是：

90-72=18（天）

乙队单独完成全部工程的时间是：

$$\begin{aligned}&1\div(\frac{1}{10}\div 18)\\=&1\div\frac{1}{180}\\=&180(\text{天})\end{aligned}$$

甲队单独完成全部工程的时间是：

$$\begin{aligned}&72\div(1-\frac{1}{180}\times 90)\\=&72\div\frac{1}{2}\\=&144(\text{天})\end{aligned}$$

答略。

（三）假设两个分率（或两个倍数）相同

*__例 1__ 某商店上月购进的蓝墨水瓶数是黑墨水瓶数的 3 倍，每天平均卖出黑墨水 45 瓶，蓝墨水 120 瓶。过了一段时间，黑墨水卖完了，蓝墨水还剩 300 瓶。这个商店上月购进蓝墨水和黑墨水各多少瓶？（适于高年级程度）

解：根据购进的蓝墨水是黑墨水的 3 倍，假设每天卖出的蓝墨水也是黑墨水的 3 倍，则每天卖出蓝墨水：

45×3=135（瓶）

这样，过些日子当黑墨水卖完时蓝墨水也会卖完。实际上，蓝墨水剩下 300 瓶，这是因为实际比假设每天卖出的瓶数少：

135-120=15（瓶）

卖的天数：

300÷15=20（天）

购进黑墨水：

45×20=900（瓶）

购进蓝墨水：

900×3=2700（瓶）

答略。

***例 2** 甲、乙两个机床厂今年一月份都超额完成了生产计划，甲厂完成计划的 112%，乙厂完成计划的 110%。两厂共生产机床 400 台，比原计划超产 40 台。两厂原计划各生产多少台机床？（适于六年级程度）

解：假设两个厂一月份都完成计划的 110%，则两个厂一月份共生产机床：

（400-40）×110%=396（台）

甲厂计划生产：

（400-396）÷（112%-110%）

=4÷2%

=200（台）

乙厂计划生产：

400-40-200=160（台）

答略。

（四）假设某个数量不比其他数量多或不比其他数量少

例 1 某校三、四年级学生去植树。三年级去 150 人，四年级去的人数比三年级人数的 2 倍少 20 人。两个年级一共去了多少人？（适于三年级程度）

解：假设四年级去的人数正好是三年级的 2 倍，而不是比三年级的 2 倍少 20 人，则两个年级去的人数正好是三年级人数的 3 倍。

两个年级去的人数是：

150×3=450（人）

因为实际上，四年级去的人数比三年级 2 倍少 20 人，所以两个年级去的实际人数是：

450-20=430（人）

答略。

***例 2** 甲、乙、丙三个乡都拿出同样多的钱买一批化肥。买好后，甲、丙两个乡都比乙乡多 18 吨，因此甲乡和丙乡各给乙乡 1800 元。问每吨化肥的价格是多少元？（适于高年级程度）

解：假设甲、丙两个乡买的化肥不比乙乡多 18 吨，而是与乙乡买的同样多，则应把多出来的 2 个 18 吨平均分。平均分时每个乡多得：

18×2÷3=12（吨）

因为甲、丙两个乡都比乙乡多得 18 吨，而平均分时每个乡得 12 吨，所以乙乡实际比甲、丙两个乡都少：

18-12=6（吨）

每吨化肥的价格：

1800÷6=300（元）

答略。

（五）假设某个数量增加了或减少了

***例1** 某班男生比全班人数的 $\frac{5}{9}$ 少4人，女生比全班人数的 $\frac{2}{5}$ 多6人。这个班的男女生各是多少人？（适于六年级程度）

解：假设男生增加4人，女生减少4人，则全班总人数不变，男生正好是全班人数的 $\frac{5}{9}$，女生比全班人数的 $\frac{2}{5}$ 多：

6-4=2（人）

全班人数是：

$$(6-4)\div\left(1-\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\right)=45\text{（人）}$$

男生人数是：

$$45\times\frac{5}{9}-4=21\text{（人）}$$

女生人数是：

$$45\times\frac{2}{5}+6=24（人）$$

答略。

***例 2** 学校运来红砖和青砖共 9750 块。红砖用去 20%，青砖用去 1650 块后，剩下的红砖和青砖的块数正好相等。学校运来红砖、青砖各多少块？（适于六年级程度）

解：假设少运来 1650 块青砖，则一共运来砖：

9750-1650=8100（块）

以运来的红砖的块数为标准量 1，则剩下的红砖的分率是：

1-20%=80%

因为剩下的红砖的块数与青砖的块数正好相等，所以青砖的分率也是 80%。

因为 8100 块中包括全部红砖和红砖的(1-20%)(青砖)，所以 8100 块的对应分率是(1+1-20%)。运来的红砖是：

（9750-1650）÷（1+1-20%）

=8100÷1.8

=4500（块）

运来的青砖是：

9750-4500=5250（块）

答：运来红砖 4500 块，运来青砖 5250 块。

（六）假设某个数量扩大了或缩小了

例 1 把鸡和兔放在一起共有 48 个头、114 只爪和脚。鸡和兔各有多少只？（适于四年级程度）

解：假设把鸡爪和兔子脚的只数都缩小 2 倍，则鸡爪数和鸡的头数一样多，兔的脚数是兔头数的 2 倍。

这样就可以认为，114÷2 所得商中含有全部鸡的头数，也含有兔子头数 2 倍的数，而 48 中包含全部鸡的头数和兔子头数 1 倍的数。

所以兔的只数是：

$$114\div2-48=9（只）$$

鸡的只数是：

$$48-9=39（只）$$

答略。

***例2** 两堆煤共2268千克，取出甲堆的$\frac{2}{5}$和乙堆的$\frac{1}{4}$共708千克，求甲、乙两堆煤原来各是多少千克？（适于六年级程度）

解：假设把从甲、乙两堆煤里取出的煤的数量扩大4倍，则从两堆煤取出的总数量比原来的两堆煤多：

$$708\times4-2268$$

$=2832-2268$

$=564$（千克）

假设后，从甲堆取出的煤的分率是$\frac{2}{5}\times4=1\frac{3}{5}$，这比甲堆煤的实际重量多了$1\frac{3}{5}-1=\frac{3}{5}$；从乙堆取出的煤的分率是$\frac{1}{4}\times4=1$（全部取出）。因此，564千克的对应分率是$\frac{3}{5}$。

甲堆煤的重量是：

$$\begin{aligned}&(708\times4-2268)\div(\frac{2}{5}\times4-1)\\=&(2832-2268)\div\frac{3}{5}\\=&564\times\frac{5}{3}\\=&940（千克）\end{aligned}$$

乙堆煤的重量是：

$$2268-940=1328（千克）$$

答略。

本题也可用假设两堆煤都取出$\frac{2}{5}$或$\frac{1}{4}$的方法来解。

思考题：1. 一批石油，用甲种油槽车装载，要用 45 辆；如果用乙种油槽车装载，只要 36 辆。已知甲种车比乙种车每辆少装 4 吨，这批石油共重多少吨？（柴学林《小学数学题典》，甘肃文化出版社，1995 年 12 月版，第 102 页。）

分析：我们假设一个条件“假设用甲种油槽车 36 辆装载石油”，根据题意，用甲种油槽车装完这批石油，要用 45 辆，比假设的条件多（45－36）辆；而用乙种油槽车装载只要 36 辆，已知甲种车比乙种车每辆少装 4 吨，36 辆甲种油槽车比 36 辆乙种油槽车少装 4×36 吨，这些石油正好是由（45－36）辆甲种油槽车装的。所以，可以先求出每辆甲种油槽车装多少吨石油，再求出这批石油共重多少吨。

解：（1）每辆甲种油槽车装多少吨？

4×36÷（45－36）＝16（吨）

（2）这批石油共重多少吨？

16×45＝720（吨）

答：这批石油共重 720 吨。

当然，也可以假设“用乙种油槽车 45 辆装载石油”去思考解答，请大家试一试。

2. 同学们参加野营活动，一个同学到负责后勤的老师那里去领碗，老师问他领多少，他说领 55 个。又问：“多少人吃饭？”他说：“一人一个饭碗，两人一个菜碗，三人一个汤碗。”这个同学给多少人领碗？（九年义务教育小学《数学》课本，第十一册，人民教育出版社 2001 年 12 月版，第 105 页思考题。）

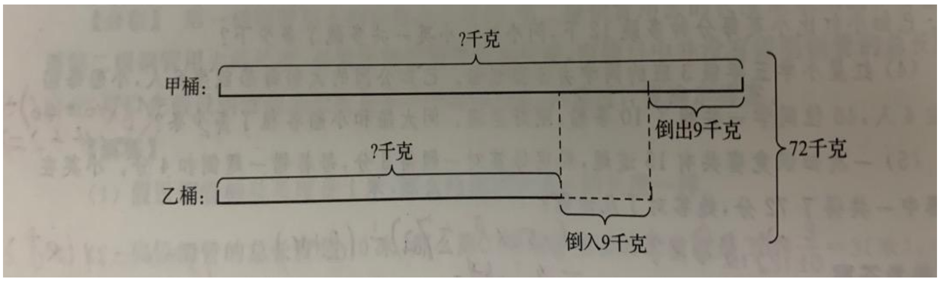
分析：假设这个同学给 6 人领碗，那么根据题意，要领 6 个饭碗、3 个菜碗和 2 个汤碗，一共要领的碗数是：6＋3＋2＝11（个），这个碗数与题目中的一共领“55 个碗”的条件不相符合，要进行调整。由于 55÷11＝5， 55 个碗是 11 个碗的 5 倍，因此实际人数应该是假设人数的 5 倍，即 6×5＝30（人）。所以，问题就可以解决。

第六节　数形结合

“数”与“形”是反映现实世界中客观事物属性的两个方面。一般来讲，“数”是“形”的抽象概括，“形”是“数”的具体体现，“数”和“形”在一定条件下可以互相转化。在小学数学解题中，数形结合思想就是利用“形”把问题的数量关系形象地表示出来，如用线段图、长方形面积图或集合图等帮助理解数量关系，进行广泛联想，促使“数”与“形”的和谐统一，从而打开思维通道，使问题简明、直观，找到解决问题的方法。

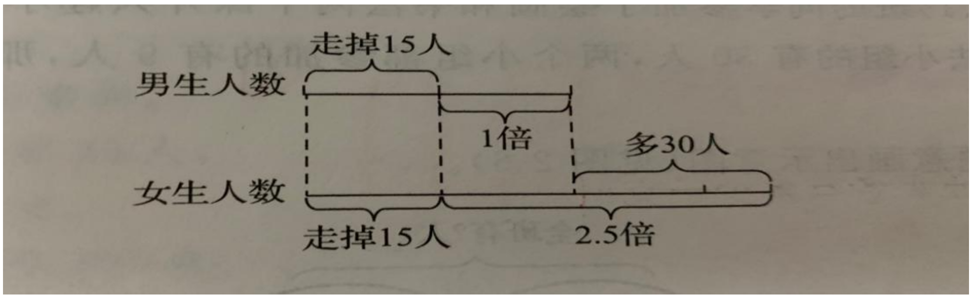
例：甲、乙两桶油共 72 千克，从甲桶往乙桶倒入 9 千克后，两桶油的重量正好相等。甲、乙两桶油原来各有多少千克？

分析：依据题意画出线段图

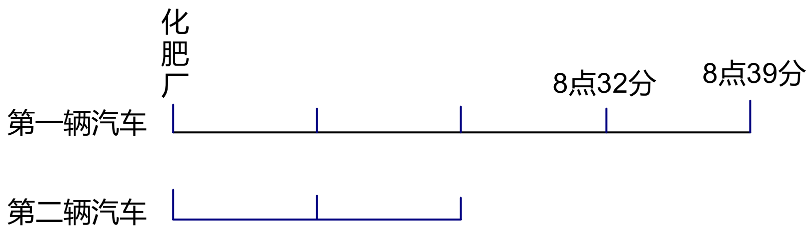


例：一群小学生，女生比男生多 30 人。在女生和男生各走了 15 人之后，女生人数是男生人数的 2.5 倍。原来男生和女生各有多少人?

分析：依据题意画出线段图



思考题：1. 早晨 8 时以后，有两辆汽车先后离开化肥厂向幸福村开去，两辆汽车的速度都是每小时 60 千米。在 8 时 32 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车离开化肥厂距离的 3 倍；到了 8 时 39 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车离开化肥厂距离的 2 倍。第一辆汽车是 8 时几分离开化肥厂的？（首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）



分析：这道题目的数量关系比较抽象，直接理解有困难。我们可以根据问题中的已知条件，画出线段图，数量关系就清楚了。如下图所示：

由于两辆汽车的速度相同，都是每小时 60 千米，那么就可以用同样的线段长度表示两辆汽车在一定时间里所行的路程。

在 8 时 32 分时，如果把第二辆汽车所行的路程（距离）看作 1 份，那么第一辆汽车离开化肥厂所行的路程（距离）就是这样的 3 份；在 8 时 39 分时，第一辆汽车离开化肥厂的路程（距离），正好是第二辆汽车离开化肥厂路程（距离）的 2 倍，符合题目条件。可以看出，每行 1 份的路程（距离）两辆汽车各行驶了 7 分钟。

解：39－32＝7（分）

8 时 32 分－7 分×3＝8 时 32 分－21 分＝8 时 11 分

答：第一辆汽车是 8 时 11 分离开化肥厂的。

2. 某超市运来方便面比麻辣粉丝多 210 包，当方便面卖掉一半时，方便面比麻辣粉丝少 30 包。方便面和麻辣粉丝各运来多少包？

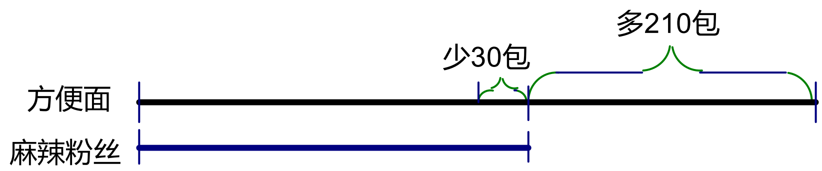
分析：我们用对应思想来确定数量关系之间的联系。

运来的方便面比麻辣粉丝 ————————————————→多 210 包

方便面卖掉一半时比麻辣粉丝 ————————————————→少 30 包

两次比较比较的标准“麻辣粉丝的包数”没变，只是方便面的包数相差一半，比较的结果出现“多 210 包”和“少 30 包”，因此方便面包数的一半就是对应 210 包与 30 包的和。所以找到了这种对应关系，也就找到了解题的方法。

画出线段图更能说明问题：



解：（210＋30）×2＝480（包）　　480－210＝270（包）

答：方便面运来 480 包，麻辣粉丝运来 270 包。

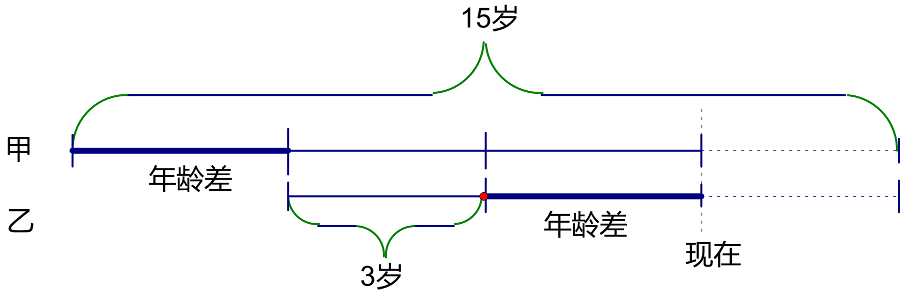
3. 甲乙两人比较岁数。甲对乙说：“当我像你现在这么大的岁数时，你刚好 3 岁。”乙对甲说：“当我长到你现在这么大的岁数时，你就 15 岁了。”甲、乙二人今年各是多少岁？

分析：通过画线段图，分析题目中的数量关系。线段图中甲比乙大的年龄就是“年龄差”。

从甲对乙说的话“当我像你现在这么大的岁数时，你刚好 3 岁”中知道，此时是把甲现在的年龄减少了 1 个“年龄差”（线段图中的粗线部分）后的年龄，相对应的乙是 3 岁。因此甲当时的年龄对应着“3 岁”和 1 个“年龄差”的和，也就是乙现在的年龄。这说明甲现在的年龄对应着“3 岁”与 2 个“年龄差”的和。

从乙对甲说的话“当我长到你现在这么大的岁数时，你就 15 岁了”中又可以知道，此时是把乙现在的年龄增加了 1 个“年龄差”（线段图中虚线部分）后的年龄相对应的甲是 15 岁。因此，甲当时的年龄对应着“3 岁”与 3 个“年龄差”的和。

所以先算出这个“年龄差”，就可以算出甲、乙现在的年龄。



解：（15－3）÷（1＋1＋1）＝4（岁） 15－4＝11（岁） 11－4＝7（岁）

答：甲今年 11 岁，乙今年 7 岁。

在这个问题的解答中，把反映数量关系的“数量”与“线段图”紧密结合，很快找到了解题方法。利用数形结合思想解答小学数学问题，主要是借助图形把抽象、复杂的数量关系形象化、直观化，以帮助理解题中的数量关系，拓宽解题思路，提高解题能力。

第七节 类比与猜想

类比是根据两个对象或两类事物的一些属性相同或相似，猜测另一些属性也可能相同或相似的思维方法。类比通俗点说就是“相当于”。在数学学习中常表现为当新旧知识有相同的属性，而已知的旧知识还有其他属性，由此推出新知识也有同样的或类似的其他属性。

【例 2-24】一批布，可以做成人服装 60 套，改做儿童服装可以做 90 套。如果先做成人服装和儿童服装各 30 套，然后用余下的布做儿童服装，还可以做多少套？

分析：甲单独完成这项工作要 60 天，乙单独完成这项工件要 90 天”。因此，此题可**类比为**工程问题：一项工作，甲单独完成要 60 天，乙单独完成要 90 天。甲、乙合做 30 天后将剩下的留给乙做，乙还要做几天才能完成任务？

【例 2-25】从 5 点整开始，再经过多少分钟，时针正好与分针重合？

分析：如果把钟面上 1 分钟的距离看作 1 格，那么分针每小时走 60 格，时针每小时走 5 格。因此，分针每走 1 格的同时时针就走$\frac{1}{12}$格，要求经过多少时间分针与时针重合，实质上**相当于**求多少时间后分针追上时针。

【例 2-26】有甲、乙两个公交车站，从甲站到乙站与从乙站到甲站每隔 10 分钟同时各发车一辆，且都是行驶 60 分钟到达对方公交站。某旅客从甲站乘车去乙站，在途中可以看到几辆从乙站开往甲站的公交车？

分析：此题**可类比为**植树问题：在一条长为 60 米的马路一侧种树，每隔 5 米种一棵树，路的两端不种，求一共种了多少棵树。

类比就是从一个问题想到了相似的另一个问题。例如从等差数列求和公式想到梯形面积公式，从矩形面积公式想到长方体体积公式等等；类比是一个重要的思想方法，也是解题的一种重要思路。

例：有一个挂钟，每小时敲一次钟，几点钟就敲几下，钟敲 6 下，5 秒钟敲完；钟敲 12 下，几秒敲完？

分析（用类比思路探讨）：

有人会盲目地由倍数关系下结沦，误认为 10 秒钟敲完，那就完全错了。其实此题只要运用类比思路，与植树问题联系起来想一想就通了：一条线路植树分成几段（株距），如果不包括两个端点，共需植（n-1）棵树，如果包括两个端点，共需植树（n＋1）棵，把钟点指数看作是一棵棵的树，把敲的时间看作棵距，此题就迎刃而解了。

例： 从时针指向 4 点开始，再经过多少分钟，时针正好与分钟重合。

分析（用类比思路讨论）：

本题可以与行程问题进行类比。如图 2.11，如果用时针 1 小时所走的一格作为路程单位，那么本题可以重新叙述为：已知分针与时针相距 4 格，分

针在后，时针在前，分针的速度为每分钟 $\frac{1}{5}$ 格；时针的速度为每分钟 $\frac{1}{60}$ 格，

如果分针与时针同时同向出发，问：分针过多少分钟可追上时针？这样就与行程问题中的追及问题相似了。4 为距离差，速度差为，重合的时间，就是追上的时间。

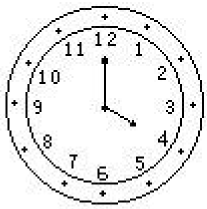
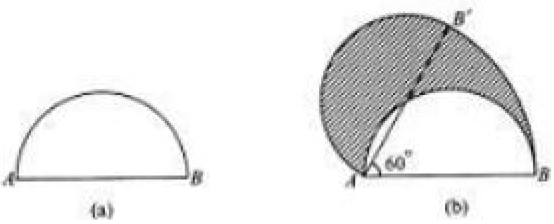


图2.11

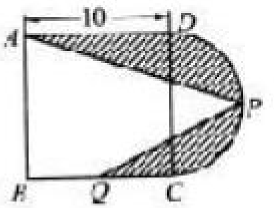
思考题 1. 长方形是一个平面，长方体则是底面为长方形（或正方形）的立体，两者之间有一定的联系。长方形的面积公式是通过摆一个个面积单位作直接度量，归纳出面积公式的，于是类比得出长方体体积公式也可以通过摆一个个体积单位作直接度量归纳出体积公式。这是公式推导方法上的类比。

在解决问题的过程中应用类比的方法。如，学生学习了梯形面积公式后，类比计算钢管堆的总根数的题目。

2.下图是一个直径 3 厘米的半圆，AB 是直径，A 不动，把整个半圆逆时针转 600 角，此时 B 点移动到 B‘点，那么图中阴影部分的面积是多少平方厘米？



3.下图是由正方形和半圆组成，其中 P 点为半圆周的中点，Q 点是正方形一边的中点，求阴影部分的面积。



但必须注意，类比的结果不一定正确，因为类比仅仅是一种推测。如：“甲比乙多 30，也就是乙比甲少 30”，如果类比得出：“甲比乙多 30%，也就是乙比甲少 30%”，这个结果就是错误的。类比结果有时发生错误，其原因主要是把某对象的非本质属性来类比其他对象，在类比时，仅从形式上的一致性取代了对象属性间的本质差异。

一般说来，类比结论的可靠性取决于进行类比的两个（或两类）事物所具有的共同属性，及类比推出的结论间是否有必然的联系。如果有，类比推出的结论是正确的，否则就不可靠。所以确认类比对象的共同属性越多，则推测的结论越可靠；确认类比对象的共同属性越带有本质性，则推测的结论也越可靠。

类比推出的结论虽然具有或然性，但在数学问题的求解或证明中，发现数学原理、方法，猜测问题结论，以及发展学生创造性思维能力方面仍具有积极作用。

联想是由当前感知或思考的事物，想到与其相关联的另一个事物的思维方法。

在小学数学解题中应用联想的方法，主要是能够唤起学生对旧知识的回忆，沟通新旧知识的联系，加深理解数量关系，提高灵活解题能力。主要表现在以下三个方面。

第一，由相似特点的事物所形成的类似联想。当对数学问题感知时，对具有图形相似、关系相似、方法相似的事物或问题也会产生联想。例如，学习分数基本性质时，联想到除法中的商不变性，认识到两者具有一致性；学习圆柱体体积公式时，联想到圆面积公式是通过剪拼得到的，因此圆柱体体积公式也可以用类似方法求得。

第二，由因果联系的事物形成的因果联想。当对数学问题进行分析时，常常要把有关对象作为一种结果，联想产生它的原因；或反过来，把它作为原因，联想它产生的结果。例如，运用分析法和综合法解应用题时，就是以联想为中介的，根据题中的问题，联想到解决它所需要的条件，或由题中的两个条件，联想到所能解决的问题。

第三，由对比关系形成的对比联想。对具有相反关系或对比关系的数学问题也会产生联想。例如，学习分数基本性质时，由分子、分母同时扩大同数倍，分数大小不变，然后又联想到分子、分母同时缩小同数倍，分数大小也不变。

第八节　逆推与还原

一. 逆推法

对于有些问题，当顺着题目条件的叙述去寻找解法时，往往有一定的困难，但是，如果改变思考顺序，从问题叙述的最后结果出发，一步一步倒着思考，一步一步往回算，原来加的用减，减的用加，原来乘的用除，除的用乘，那么问题便容易解决。这种解题方法叫做逆推法或还原法。

逆推与还原的解题思想体现了思维的灵活性，也反映了数学问题因果关系的辩证统一。用逆推与还原的方法解题时要倒过来推算。从后往前推算的过程中，每一步都是与原来相反的运算。

逆推还原法的技巧：从结果出发，一步一步的往回算，加变减，减变加，乘变除，除变乘。

【例 2-27】根据算式中数的变化，填写运算符号和括号

200　100　50　16　80

= 300　800　80

= 300　10

=290

【例 2-28】一捆电线，第一次用去全长的一半多 3 米，第二次用去余下的一半少 10 米，第三次用去 15 米，最后还剩 7 米。这捆电线原有多少米？

【例 2-29】小明和奶奶聊天。小明问奶奶今年是多大年纪，奶奶说：“把我的年龄减去 7 岁后缩小 9 倍，再加上 2 岁后扩大 10 倍，结果恰好是 100 岁。”你能帮助小明算出奶奶今年多少岁吗？

【例 2-30】已知一种有益的菌种每小时可增长 1 倍。现在有一批这样的菌种，它们在 10 小时的增长后达到了 100 万个。求它们增长到 25 万个时经历了多少小时。

古题欣赏：

公主招驸马

古时候有个叫柳布莎的公主，在她招驸马时，出了一道难题，要求应选者很快算出来回答，否则就取消入选资格。这道难题是：一篮李子取出一半又一只给了第一个人；又取出余下的一半又一只给了第二个人；再取出最后的一半又三只给了第三个人，这时李子刚好分完。问篮子里装有多少李子？

李白买酒

李白无事街上走，手中提壶去买酒，遇店加一倍，见花喝一斗，三遇店和花，喝光壶中酒试问壶中原有多少酒？

分析（用还原思路探索）：

李白打酒是我国民间自古以来广为流传的一道用打油诗叙述的著名算题。题意是：李白提壶上街买酒、喝酒，每次遇到酒店，便将壶中的酒量增添 1 倍，而每次见到香花，便饮酒作诗，喝酒 1 斗。这样他遇店、见花经过 3 次，便把所有的酒全喝光了。问：李白的酒壶中原有酒多少？

下面我们运用还原思路，从“三遇店和花，喝光壶中酒”开始推算。

见花前——有 1 斗酒。

第三次：见花后——壶中酒全喝光。

第三次：遇店前——壶中有酒半斗。

第二次：见花前——壶中有酒斗半（$1+\frac{1}{2}$）。

遇店前——壶中有酒斗半的1半（$1+\frac{1}{2}$）$\div 2=\frac{3}{4}$

第一次：见花前——壶中有酒为第二次遇店前的再加 1 斗。

遇店前——壶中有酒为第一次见花前的一半。

其思路图如下

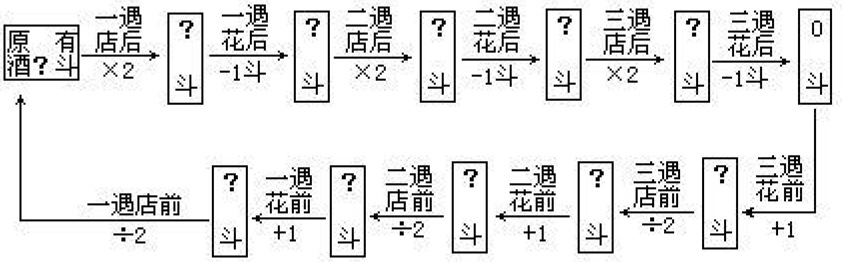


图2.10

（一）从结果出发逐步逆推

例 1 一个数除以 4，再乘以 2，得 16，求这个数。（适于四年级程度）

解：由最后再乘以 2 得 16，可看出，在没乘以 2 之前的数是：

$$16\div2=8$$

在没除以 4 之前的数是：

$8\times4=32$

答：这个数是 32。

***例 2** 粮库存有一批大米，第一天运走 450 千克，第二天运进 720 千克，第三天又运走 610 千克，粮库现有大米 1500 千克。问粮库原来有大米多少千克？（适于四年级程度）

解：由现有大米 1500 千克，第三天运走 610 千克，可以看出，在没运走 610 千克之前，粮库中有大米：

$$1500+610=2110（千克）$$

在没运进 720 千克之前，粮库里有大米：

$$2110-720=1390（千克）$$

在没运走 450 千克之前，粮库里有大米：

$$1390+450=1840（千克）$$

答：粮库里原来有大米 1840 千克。

***例 3** 某数加上 9 后，再乘以 9，然后减去 9，最后再除以 9，得 9。问这个数原来是多少？（适于四年级程度）

解：由最后除以 9，得 9，看得出在除以 9 之前的数是：

$$9\times9=81$$

在减去 9 之前的数是：

$$81+9=90$$

在乘以 9 之前的数是：

$$90\div9=10$$

在加上 9 之前，原来的数是：

$$10-9=1$$

答：这个数原来是 1。

***例 4** 解放军某部进行军事训练，计划行军 498 千米，头 4 天每天行 30 千米，以后每天多行 12 千米。求还要行几天？（适于五年级程度）

解：从最后一个条件“以后每天多行 12 千米”可求出，以后每天行的路程是：

30+12=42（千米）

从头 4 天每天行 30 千米，可求出已行的路程是：

30×4=120（千米）

行完 4 天后剩下的路程是：

498-120=378（千米）

还要行的天数是：

378÷42=9（天）

综合算式：

（498-30×4）÷（30+12）

=378÷42

=9（天）

答略。

*例 5 仓库里原有化肥若干吨。第一次取出全部化肥的一半多 30 吨，第二次取出余下的一半少 100 吨，第三次取出 150 吨，最后剩下 70 吨。这批化肥原来是多少吨？（适于五年级程度）

解：从“第三次取出 150 吨，最后剩下 70 吨”可看出，在第三次取出之前仓库里有化肥：

70+150=220（吨）

假定第二次取出余下的一半，而不是少 100 吨，则第二次取出后，仓库剩下化肥：

220-100=120（吨）

第二次取出之前，仓库中有化肥：

120×2=240（吨）

假定第一次正好取出一半，而不是多 30 吨，则第一次取出一半后，仓库里剩下化肥：

240+30=270（吨）

仓库中原有化肥的吨数是：

270×2=540（吨）

综合算式：

[（150+70-100）×2+30]×2

=[120×2+30]×2

=270×2

=540（吨）

答略。

（二）借助线段图逆推

*例 1 有一堆煤，第一次运走一半多 10 吨，第二次运走余下的一半少 3 吨，还剩下 25 吨。问这堆煤原来是多少吨（适于五年级程度）

解：作图 17-1（见下页）。

从图 17-1 可看出，余下的一半是：

25-3=22

所以，余下的煤是：

$$22\times2=44（吨）$$

全堆煤的一半是：

$$44+10=54（吨）$$

原来这堆煤是：54×2=108（吨）答略。

（三）借助思路图逆推

例 1 某工程队原计划 12 天修公路 2880 米，由于改进了工作方法，8 天就完成了任务。问实际比原计划每天多修多少米？（适于四年级程度）

解：作思路图（图 17-3）。

求实际比原计划每天多修多少米，必须知道实际每天修多少米和原计划每天修多少米。

求实际每天修多少米，就要知道公路的长和实际修完的天数。

实际每天修的米数是：

$$2880\div8=360（米）$$

求原计划每天修多少米，就要知道公路的长和原计划要修的天数。

原计划每天修的米数是：

$$2880\div12=240（米）$$

实际比原计划每天多修的米数是：

$$360-240=120（米）$$

答略。

*例 2 某机床厂去年每月生产机床 5 台，每月用去钢材 4000 千克；今年每月生产的机床台数是去年的 4 倍，平均每台机床比去年少用钢材 200 千克。今年每月用的钢材是去年每月所用钢材的几倍？（适于五年级程度）

解：作思路图（图 17-4）。

从图 17-4 的下边开始看，逐步往上推理。

（1）去年每台用钢材多少？

$$4000\div5=800\text{（千克）}$$

（2）今年每台用多少钢材？

$$800-200=600\text{（千克）}$$

（3）今年每月生产多少台？

$$5\times4=20\text{（台）}$$

（4）今年每月用多少钢材？

$$600\times20=12000\text{（千克）}$$

（5）今年每月用的钢材是去年每月所用钢材的几倍？

$$12000\div4000=3\text{（倍）}$$

综合算式：

$$（4000\div5-200）\times（5\times4）\div4000$$

$=600\times20\div4000$

$=3$（倍）

答略。

（四）借助公式逆推

例 1 一个三角形的面积是 780 平方厘米，底是 52 厘米。问高是多少？（适于五年级程度）

解：计算三角形面积的公式是：面积=底×高÷2，逆推这个公式得：

$$\text{高}=\text{面积}\times2\div\text{底}$$

所以，这个三角形的高是：

$$780\times2\div52=30\text{（厘米）}$$

答略。

例 3 一个圆锥体的体积是 84.78 立方厘米，底面的直径是 6 厘米。求它的高是多少。（适于六年级程度）

解：底面圆的直径是 6 厘米，则半径就是 3 厘米。

由 $V=1/3\pi R^2h$ 逆推得：

$$h=V\times3\div\pi\div R^2$$

因此，它的高是：

$$84.78\times3\div3.14\div3^2$$

$=254.34\div3.14\div3^2$

=9（厘米）

答略。

（五）借助假设法逆推

例： 供销社分配给甲、乙、丙三个乡若干吨化肥。甲乡分得总数的一半少 2 吨，乙乡分得剩下的一半又多半吨，最后剩下的 8 吨分给丙乡。问原来共有化肥多少吨？（适于六年级程度）

解：假设乙乡分得剩下一半，而不是又多半吨，则乙乡分走后剩下的化肥是：

乙乡分走前的化肥是：

假设甲乡分得总数的一半，而不是少 2 吨，则甲乡分走化肥：

17-2=15（吨）

这 15 吨正好是原有化肥吨数的一半，所以原来共有化肥：

15×2=30（吨）

综合算式：

答略。

二.还原问题

在小学数学解题过程中，有时会遇到一种数学问题，解答时往往从已知条件的最后结果出发，根据已知条件的变化顺序，一步一步地倒着分析和推理，直到求出问题的答案为止。这种问题就是

还原问题，解答还原问题的方法就叫做还原法（或逆推法）。

例 1. 把一个数加上 10，乘 10，减去 10，再除以 10，最后的结果还是 10。原来这个数是多少?

分析：要求这个数，就必须从最后结果 10 开始思考。由于减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，从逆运算的关系着手进行逆推：10 是由“除以 10”得到的，因而可得 10×10；而 10×10 是由“减去 10”得到的，因而可得 10×10＋10；又由于（10×10＋10）是由“乘 10”得到的，因而可得（10×10＋10）÷10；再由于（10×10＋10）÷10 是由“加上 10”得到的，所以，要求的数是：（10×10＋10）÷10－10。

解：从最后的结果 10 开始逆推，就可以求出原来这个数是多少。

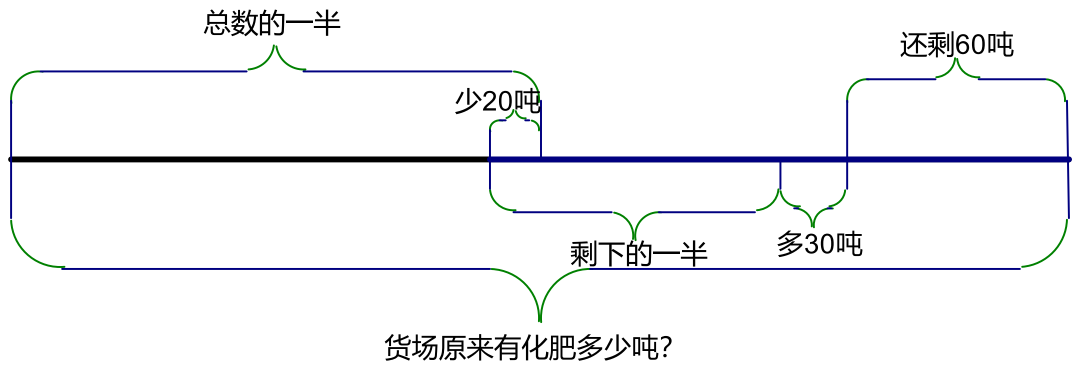
（10×10＋10）÷10－10＝（100＋10）÷10－10＝110÷10－10＝11－10＝1

答：原来这个数是 1。

例 2. 货场有一批化肥。第一次运走总数的一半少 20 吨，第二次运走剩下的一半多 30 吨，货场还剩化肥 60 吨。货场原来有化肥多少吨？

分析：从货场还剩化肥 60 吨开始逆推：由于“第二次运走剩下的一半多 30 吨”，因此，在第二次运走前有化肥：（60＋30）×2 吨；又由于这些化肥是“第一次运走总数的一半少 20 吨”，那么化肥的总吨数是[（60＋30）×2－20］×2。

可以画出线段图帮助理解。



解：从货场还剩化肥 60 吨开始逆推，货场原来有化肥：

[（60＋30）×2－20］×2＝[90×2－20］×2＝[180－20］×2 ＝160×2＝320（吨）

答：货场原来有化肥 320 吨。

要注意，对问题中的“少 20 吨”的理解，这是对于“第一次运走的化肥重量”而言的，实际上是指第一次运走一些化肥后，剩余的化肥是总数的一半多 20 吨，因此用逆推的方法进行分析时，就要用减法计算。同样的道理，要注意对问题中“多 20 吨”的理解。

例 3 机床厂有三个车间一共有工人 108 人。现根据技术需要，对三个车间的工人进行一些调整：把一车间的 4 个工人调到三车间；把二车间的 8 个工人调到一车间；把三车间的 5 个工人调到二车间。这时每个车间的人数相等。三个车间原来各有工人多少人？

<table>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：
思考题：</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　　周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第 12-18 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">第三章　计算问题</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>14</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">1. 理解整数、分数的概念。
2. 了解定义新运算、幻方与数阵、二进制及其相关的概念。
3. 熟练掌握整数和分数的四则运算与巧算，会进行简单的估算。
4. 能根据新运算的规定进行计算。
5. 能编制简单的幻方。
6.能将二进制与其他进制相互转换</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲授</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：1. 熟练掌握整数和分数的四则运算与巧算，会进行简单的估算。
2.能将二进制与其他进制相互转换。
难点：能编制简单的幻方；能将二进制与其他进制相互转换</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第一节　整数的运算与巧算

一、 整数四则运算定律

（1）　加法交换律：$a+b=b+a$

（2）　加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

（3）　乘法交换律：$a\times b=b\times a$

（4）　乘法结合律：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

（5）　乘法分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ ； $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

（6） 减法的性质：$a-b-c=a-(b+c)$

（7） 除法的性质：$a\div(b\times c)=a\div b\div c$；

（8） 除法的“左”分配律：$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$；$(a-b)\div c=a\div c-b\div c$，这里尤其要注意，除法是没有“右”分配律的，**即 $c\div(a+b)=c\div a+c\div b$ 是不成立的！**

（9） 积不变规律：a×b=(a×c) ×(b÷c)=(a÷c) ×(b×c)

备注：上面的这些运算律，既可以从左到右顺着用，又可以从右到左逆着用．

（10）等差数列求和公式：总和＝（首项＋末项）×项数÷2

二、 加减法凑整

速算巧算的核心思想和本质：凑整。常用的思想方法总结如下：

（1） 分组凑整法．把几个互为“补数”的减数先加起来，再从被减数中减去，或先减去那些与被减数有相同尾数的减数．“补数”就是两个数相加，如果恰好凑成整十、整百、整千……，就把其中的一个数叫做另一个数的“补数”．

（2） 加补凑整法．有些算式中直接凑整不明显，这时可“借数”或“拆数”凑整．

（3） 数值原理法．先把加在一起为整十、整百、整千……的数相加，然后再与其它的数相加减．

（4） “基准数”法，基准当几个数比较接近于某一整数的数相加时，选这个整数为“基准数”（要注意把多加的数减去，把少加的数加上）。

例：计算 $229+122+778$

例：计算 $295+(241-195)$；$987-178-222-390$；$9+99+999+9999+99999$

三、 乘法凑整

思想核心：先把能凑成整十、整百、整千的几个乘数结合在一起，最后再与前面的数相乘，使得运算简便。例如：$4\times25=100$，$8\times125=1000$，$5\times20=100$

$12345679\times9=111111111$ （去 8 数，重点记忆）

$7\times11\times13=1001$（三个常用质数的乘积，重点记忆）

理论依据：乘法交换率：a×b=b×a

乘法结合率：(a×b) ×c=a×(b×c)

乘法分配率：(a+b) ×c=a×c+b×c

积不变规律：a×b=(a×c) ×(b÷c)=(a÷c) ×(b×c)

例：计算$(25\times12)\times(4\times5)$

例：计算12×99

例：计算$333\,333\times999\,999$

解： 原式$=333\,333\times(1\,000\,000-1)$

$=333\,333\,000\,000-333\,333$

$=333\,332\,666\,667$

例：计算356×1002

解：原式$=356\times(1000+2)=356000+356\times2=356000+712=356712$

【例 1】 例：计算$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\div(2004-2)$

【解析】本题利用特殊数字乘积特点进行计算：$7\times11\times13=1001$

$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\div(2004-2)$

$=3\times5\times17\times(2\times7\times11\times13)\div(1001\times2)$

$=3\times5\times17$

$=255$

四、 乘、除法混合运算的性质

（1） 商不变性质：被除数和除数乘（或除）以同一个非零数，其商不变．即：

$a\div b=(a\times n)\div(b\times n)=(a\div m)\div(b\div m)$　　$m\neq0$，$n\neq0$

（2） 在连除时，可以交换除数的位置，商不变．即：$a\div b\div c=a\div c\div b$

（3） 在乘、除混合运算中，被乘数、乘数或除数可以连同运算符号一起交换位置（即带着符号搬家）．

例如：$a\times b\div c=a\div c\times b=b\div c\times a$

（4） 在乘、除混合运算中，去掉或添加括号的规则

去括号情形：①括号前是“×”时，去括号后，括号内的乘、除符号不变．即

$a\times(b\times c)=a\times b\times c$　　$a\times(b\div c)=a\times b\div c$

②括号前是“÷”时，去括号后，括号内的“×”变为“÷”，“÷”变为“×”．即

$a\div(b\times c)=a\div b\div c$　　$a\div(b\div c)=a\div b\times c$

添加括号情形：加括号时，括号前是“×”时，原符号不变；括号前是“÷”时，原符号“×”变为“÷”，“÷”变为“×”．即

$a\times b\times c=a\times(b\times c)$　　$a\times b\div c=a\times(b\div c)$

$a\div b\div c=a\div(b\times c)$　　$a\div b\times c=a\div(b\div c)$

（5）　两个数之积除以两个数之积，可以分别相除后再相乘．即

$(a\times b)\div(c\times d)=(a\div c)\times(b\div d)=(a\div d)\times(b\div c)$

上面的三个性质都可以推广到多个数的情形．

例：计算 $44000\div125$；36×25

【例 2】　例：计算 $5\div(7\div11)\div(11\div15)\div(15\div21)$

【解析】原式 $=5\div7\times11\div11\times15\div15\times21$

$=5\times(11\div11)\times(15\div15)\times(21\div7)$

$=5\times3$

$=15$

五、 利用位值原理思想进行巧算

（1） 位值原理的定义：

同一个数字，由于它在所写的数里的位置不同，所表示的数值也不同。也就是说，每一个数字除了有自身的一个值外，还有一个“位置值”。例如“2”，写在个位上，就表示 2 个一，写在百位上，就表示 2 个百，这种数字和数位结合起来表示数的原则，称为写数的位值原理。

（2） 位值原理的表达形式：

以六位数为例：$\overline{abcdef}=a\times100000+b\times10000+c\times1000+d\times100+e\times10+f$

以具体数字为例：$389762=3\times100000+8\times10000+9\times1000+7\times100+6\times10+2$

例：计算 $123+234+345+456+567+678+789$

解： 原式

$=(1+2+3+4+5+6+7)\times100+(2+3+4+5+6+7+8)\times10+(3+4+5+6+7+8+9)$

$=2800+350+42=3192$（数值原理）

六、 提取公因数思想

1. 乘法运算中的提取公因数：

（1）　乘法分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 或 $(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

（2） 提取公因数即乘法分配律的逆用： $a\times b+a\times c=a\times(b+c)$ **或** $b\times a+c\times a=(b+c)\times a$

2. 除法运算中的提取公因数：

（1） 除法的“左”分配律：$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$；$(a-b)\div c=a\div c-b\div c$

（2） 除法的“左”提取公因数： $a\div c+b\div c=(a+b)\div c$

例:计算 $6666\times2222+3333\times5556$

例：计算： $34\times3535-35\times3434$.

【解析】原式$=34\times35\times101-35\times34\times101=0$

七、利用等差数列求和公式

等差数列求和公式：总和＝（首项＋末项）×项数÷2

例：计算1＋2＋3＋…＋98＋99＋100

例：计算（1＋3＋5＋…＋1989）-（2＋4＋6＋…＋1988）

思考题：

【巩固】计算： $1234+2345+3456+4567+5678+6789$

【考点】位值原理　　【难度】3 星　　【题型】计算

【解析】思路方法同上

【答案】24069

【例 3】 计算： $(56789+67895+78956+89567+95678)\div7$

【考点】位值原理　　【难度】3 星　　【题型】计算

【关键词】2004 年，陈省身杯

【解析】观察可知 5、6、7、8、9 在万、千、百、十、个位各出现过一次，所以，

原式$=(5+6+7+8+9)\times11111\div7=5\times11111=55555$.

【答案】55555

【巩固】计算： $(34567+45673+56734+67345+73456)\div5$

【考点】位值原理　　【难度】3 星　　【题型】计算

【解析】观察可知 3、4、5、6、7 在万、千、百、十、个位各出现过一次，所以，

原式$=(3+4+5+6+7)\times11111\div5=5\times11111=55555$.

【答案】55555

【例 4】 计算：333333×333333

【考点】乘法凑整之乘 9、99、999　　【难度】☆☆☆　　【题型】解答

【解析】原式$=3\times111111\times3\times111111$

$=999999\times111111$

$=(1000000-1)\times111111$

$=111111000000-111111$

$=111110888889$

【答案】111110888889

【例 5】 $5\times7\times22\times39\times49=$ ________.

【考点】乘法凑整　　【难度】☆☆☆　　【题型】填空

【解析】原式$=5\times7\times2\times11\times3\times13\times7\times7=(5\times2)\times(7\times11\times13)\times(3\times7\times7)$

$=10\times1001\times147=10\times147147=1471470$

【答案】1471470

【巩固】计算：$(4\times5\times6\times9\times11\times17)\div(36\times66\times85)$

【考点】乘除法混合　　【难度】2 星　　【题型】计算

【解析】原式$=(4\times9)\times(6\times11)\times(5\times17)\div(36\times66\times85)$

$=36\times66\times85\div(36\times66\times85)$

$=1$

【答案】1

【巩固】 $1\div(2\div3)\div(3\div4)\div(4\div5)\div(5\div6)$

【考点】乘除法混合　　【难度】☆☆☆　　【题型】解答

【解析】根据乘除混合运算中去括号的性质： $a\div(b\div c)=a\div b\times c$

$1\div(2\div3)\div(3\div4)\div(4\div5)\div(5\div6)$

$=1\div2\times3\div3\times4\div4\times5\div5\times6$

$=1\div2\times6$

$=1\times(6\div2)$

$=3$

【答案】3。

【例 6】 计算：$34\times3535-35\times3434$.

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】2 星　　【题型】计算

【解析】原式$=34\times35\times101-35\times34\times101=0$

【答案】0

【巩固】 计算：$33\times20102010-2010\times330033=$ ________。

【考点】四则混合运算之提取公因数 【难度】2 星 【题型】计算

【关键词】2010 年，学而思杯，3 年级

【解析】原式 $=33\times2010\times10001-2010\times33\times10001$

$=0$

【答案】0

【例 7】 计算：$75\times45+17\times25$

【考点】四则混合运算之提取公因数 【难度】2 星 【题型】计算

【解析】第二个乘法中是 17×25 ，就可以把 45 拆为 $28+17$ ，然后提取公因式进行速算.

原式 $=75\times(28+17)+17\times25$

$=75\times28+75\times17+17\times25$

$=3\times25\times4\times7+17\times(75+25)$

$=2100+1700=3800$

【答案】3800

【巩固】 计算：$53\times57-47\times43=$________.

【考点】四则混合运算之提取公因数 【难度】2 星 【题型】计算

【关键词】2008 年，迎春杯，初赛

【解析】原式 $=(43+10)\times57-47\times43$

$=43\times(57-47)+10\times57$

$=430+570=1000$

【答案】1000

【例 8】 $88\times22+55\times73-44\times44-33\times55=$________.

【考点】四则混合运算之提取公因数 【难度】2 星 【题型】计算

【关键词】2008 年，第七届，小机灵杯，复赛

【解析】原式 $=44\times2\times22+55\times(73-33)-44\times44=44\times44+55\times40-44\times44$

$=2200$

【答案】2200

【例 9】 计算：$765\times213\div27+765\times327\div27$

【考点】四则混合运算之提取公因数 【难度】3 星 【题型】计算

【解析】通过观察算式，可以发现加号前后的两个式子中都有 $765\div27$ ，可以把 $765\div27$ 作为一个整体提取出来，有：原式 $=765\times(213+327)\div27=765\times540\div27=765\times20=15300$

【答案】15300

【巩固】计算：$25\times32\div14+36\div21\times25$

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】2 星　　【题型】计算

【关键词】希望杯，2 试

【解析】原式$=25\times(32\div14+36\div21)$

$=25\times(32\div2\div7+36\div3\div7)$

$=25\times(16\div7+12\div7)$

$=25\times[(16+12)\div7]$

$=25\times4=100$

【答案】100

【例 10】下面的题会不会有点难度呢？相信你一定能行！

$156+78\times1994+22\times1996$

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】3 星　　【题型】计算

【解析】把 156 拆成 78×2，这样，$156+78\times1994=78\times2+78\times1994$，可运用乘法分配律巧算了.

原式$=156+78\times1994+22\times1996=78\times2+78\times1994+22\times1996=78\times(2+1994)+22\times1996$

$=78\times1996+22\times1996=1996\times(78+22)=199600$

【答案】199600

【巩固】$2375\times3987+9207\times6013+3987\times6832$

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】3 星　　【题型】计算

【关键词】小学数学夏令营

【解析】通过观察算式中数字的特点，不难发现，需要用到加法交换律和提取公因式的方法.

原式$=2375\times3987+3987\times6832+9207\times6013$

$=(2375+6832)\times3987+9207\times6013$

$=9207\times3987+9207\times6013$

$=9207\times10000=92070000$

【答案】92070000

【例 11】下面这道题怎样算比较简便呢？看谁算的快！$1997\times20002000-2000\times19971997$

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】2 星　　【题型】计算

【关键词】小学数学夏令营

【解析】建议教师先引导学生回忆乘以 101、10101、…等的性质，这道题只要对 20002000 和 19971997 这两个数进行分解转化，计算结果便显而易见. 20002000 可以转化为

2000×10001，19971997 可以转化为 1997×10001．

原式 $=1997\times2000\times10001-2000\times1997\times10001=0$

【答案】0

【巩固】$2009\times20082008-2008\times20092009=$______

【考点】四则混合运算之提取公因数　　【难度】2 星　　【题型】计算

【关键词】2009 年，第七届，走美杯，五年级，初赛

【解析】原式$==2009\times2008\times10001-2008\times2009\times10001=0$

【答案】0

第二节　分数的运算与巧算

一、凑整法

在分数运算中，把分数凑成整数，便于计算。

例：计算 $3\frac{1}{4}+6\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}+8\frac{1}{3}$

二、分数的拆分

分数的拆分就是对分数的一种分解，在小学数学中占有一定位置。分数拆分运算的核心环节是“两两抵消达到简化的目的”。

1. 把一个分数拆分成 2 个分数差的形式：$\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$
2. 把一个分数拆分成 2 个分数和的形式：

$$\frac{a+b}{a\times b}=\frac{a}{a\times b}+\frac{b}{a\times b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a};\qquad \frac{a^2+b^2}{a\times b}=\frac{a^2}{a\times b}+\frac{b^2}{a\times b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

例:计算 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{99\times100}$

例：计算 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+...+\frac{1}{98\times100}$

例：计算 $1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}$

三、先借后还

例：计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

四、提取公因数法

例：计算$\dfrac{1\times 2+2\times 4+3\times 6}{2\times 3+4\times 6+6\times 9}$

五、代数法

在相同数字较多的分数式中，用字母表示式子中的一部分，使运算更加方便，这就是分数式中的代数法。

例：计算$\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)$

解：把（$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$）设为 A

思考题：

1．计算　$20\dfrac{1}{5}-4.38-5.62-8\dfrac{1}{5}$

2．计算　$55\div\dfrac{5}{3}+45\times 60\%-0.6$

3．计算　1/15+1/35+1/63+……+1/483

第三节　估算

一、估算的定义

什么是估算？估算是指对事物的数量作大致推算。估算有三种情形：一是估算最大值，二是估算最小值，三是估算大约多少。怎么估算呢？估算都要先对参加计算的数值取其近似值，把一个比较复杂的计算变成可以口算的简单计算，得到一个近似值，如：估算 32×58，最大值：都按比原来大的整十数算，最大是 40×60＝2400；最小值：都按比原来小的整十数算，最小是 30×50＝1500；约等于多少：用“四舍五入法”取接近的数算，大约在 30×60＝1800 左右。

二、估算的重要性

估算在日常生活中有着广泛的应用；估算有利于人们事先把握运算结果的范围，是发展学生数感的重要方面；估算为判断计算器、口算和笔算结果是否合理提供了依据；在具体情境中估算，有利于学生提高判断、选择的能力；估算有利于培养学生做事的计划性；估算对学生后续的数学学习有重要作用。因此，《标准》中针对估算明确指出，小学生要“体会四则运算的意义，掌握必要的运算技能；在具体情境中，能进行简单的估算，理解估算的意义”。教师在教学中应培养学生的估算意识和估算技能，让学生掌握一些简单的估算方法。

三、估算常用的方法

1、凑整法：把数量看成整十、整百、整千再计算，是最常用的估算方法。

2、去尾法：即把每个数的尾数去掉，取整十或整百数进行计算。

3、进一法：即在每个数的最高位上加 1，取整十整百数进行计算。如：

$28+15+7+24\approx 30+20+10+30=90$

4、四舍五入法：即尾数小于或等于 4 的舍去，等于或大于 5 的便入进去，取整十或整百数进行计算。如：$4.2\times 1.8\approx 4\times 2=8$

5、中间数法：取一个中间数，如 53、57、51 和 59 这四个数求和，这些数都很接近 55，有的比 55 多一点，有的比 55 少一点，就取一个中间数 55，直接用 55×4，就大约地计算出了这几个数

相加的结果。

6、特殊数法：用特殊的数据特点进行估数，如 126 × 8，就可以想到 125 × 8，125 的 8 倍，就得到 1000。

7、经验法：主要根据生活经验进行估算。在课程改革的背景下，根据新课标编制的教材，在内容方面更贴近学生的生活，教师就可以引导学生根据生活经验进行估算。例如：制作小灯笼，甲同学 1 个小时可以独立完成，乙同学 2 个小时才能做完，那么甲乙两名同学一起制作需几个小时？根据生活的经验，我们可以得出这样的结论，两个人一起制作需要的时间肯定比一个人单独制作花费的时间要少。如果计算出来的结果比甲同学需要的多，甚至比乙同学需要的多，那么结果肯定是错误的。例如：估算一棵小树的高度。

8、标准数法：以某一标准进行实际估计，一是利用计数单位进行估计，二是利用计量单位进行估计，三是以某一物体为参照物进行估计。在对大数进行估计的时候，选择合适的单位也很重要。估计书本的长度时，通常以“厘米”为单位；估计教室的长度时，通常以“米”为单位；教室到学校操场有多远，就应当选用“米”作单位。而从家到学校有多远，就要选择“千米”作单位。太阳到地球的距离就要用“光年”作单位。教学中，要让学生结合实际熟悉一些常见的计量单位，真正了解其长短，大小和轻重等，并在头脑中建立起相应的表象。

9、用部分求整体法：把一个大的整体平均分成若干份，根据部分数求出整体数。比如，估计体育场内的观众数，先将每个看台平均分成若干份，数一数其中的一份有多少人，然后估计出一个看台的人数，最后根据几个看台数推算出整个体育场的人数。教师估算上课学生的人数，以组为单位进行估算。

第四节　定义新运算

一、定义新运算

定义新运算是指用一个符号和已知运算表达式表示一种新的运算。定义新运算是一种特别设计的计算形式，它使用一些特殊的运算符号，这是与四则运算中的加减乘除符号是不一样的。

二、定义新运算注意问题

1.解题的关键是要正确理解新定义的算式含义，严格按照新定义的计算顺序，将数值代入算式中，再把它转化为一般的四则运算，然后进行计算。

2.我们还要知道，这是一种人为的运算形式。它是使用特殊的运算符号，如：*、▲、★、◎、△、◆、■等来表示的一种运算。

3.新定义的算式中有括号的，要先算括号里的。

三、例题讲解

【例 3-43】规定$a\Delta b=3a+4b$，求$(8\Delta 7)\Delta 6$.

【例 3-44】假设 a*b=（a+b）+（a-b），　求 13*5；5*13；13*（5*4）.

【例 3-45】假设 2！=1×2，3！=1×2×3，4！=1×2×3×4……求 6！

【例 3-45】◎表示一种新的运算，它定义为：A◎B=A×B+(A-B),
求[(2◎1)◎2]◎5.

例：设 a,b 都表示数，规定 $a\Delta b=3a-2b$，试计算（1） $5\Delta 6$；（2） $6\Delta 5$.

例：对于两个数 a 与 b，规定 $a\oplus b=a\times b+a+b$，试求$6\oplus 2$。

第五节　幻方与数阵

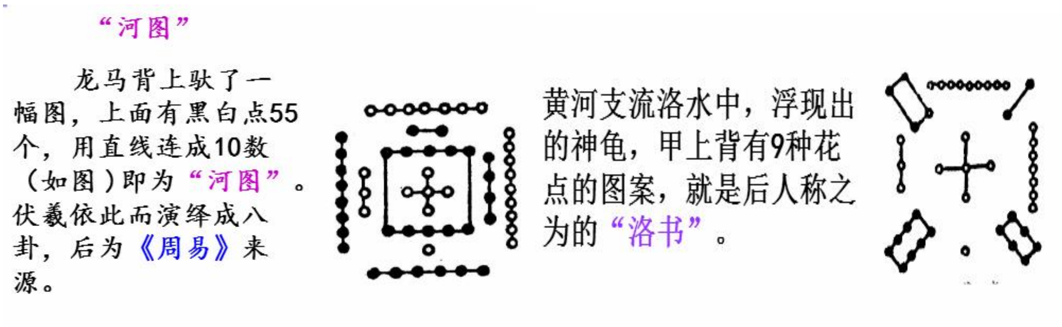
幻方和数阵是两种有着悠久历史的数学趣题，训练解这两种题的目的是提高解题者对于数字的敏感度和加深其对于一些特殊解题方法的灵活运用程度。

一、幻方

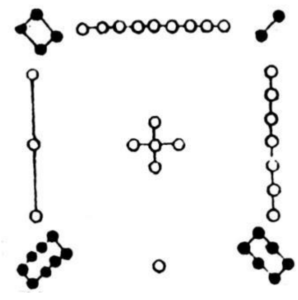
1. 定义：幻方是一种将 1 到 n^2 的自然数安排在正方形格子中，使每行、列和对角线上的数字和都相等的方法，幻方又称为魔方，方阵或厅平方。我们把这个相等的和叫做幻和。n 是幻方的阶数，$[n\times(n\times n+1)]\div 2$ 是它的幻和。例如：(三阶幻方，幻和为 15，)

幻方最早起源于中国，我国古代称之为有“河图”、“洛书”又叫“纵横图”。

幻方是我国祖先早在几千年以前就已经发现了的。我国古代有“河图”和“洛书”的传说：在原始部落伏羲时代，有龙马出于黄河背负“河图”，有神龟出于洛水背负“洛书”。而这种“河图”和“洛书”的形象最早是宋人根据郑玄的《乾凿度》中的“载九履一，左三右七，二四为肩，六八为足”造出来的。如下图所示，我们填写的方阵图正好与这种“河图”、“洛书”的形象完全一致。“洛书”作为数字方阵，也就是我们所说的三阶幻方。直到现在，仍然是许多数学家和数学爱好者感兴趣的问题。其实，在三阶方阵里填写的数不一定是从 1 开始的自然数，可以从任何一个数开始，这一列数可以是任何一个等差数列。



“洛书”所画的图中共有黑、白圆圈 45 个。把这些连在一起的小圆和数目表示出来，得到九个。这九个数就可以组成一个纵横图，他们发现,这个图案每一列,每一行及对角线,加起来的数字和都是一样的。把洛书用数字表达就是今天的 3 阶幻方。


“洛书”

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2. 分类：按照纵横各有数字的个数，可以分为：三阶幻方、四阶幻方、五阶幻方等。

按照纵横数字数量奇偶的不同，当 n 为奇数时，称该幻方为单阶幻方（或奇阶幻方）；当 n 为偶数时，称该幻方为双阶幻方（或偶阶幻方）。可以分为奇阶幻方、偶阶幻方。

3. 幻方的解题方法：

（1）累加法：通常将若干个“幻和”累加在一起，在计算每一个位置上的重数，从而求出“幻和”和关键位置上的数字，然后结合枚举法完成幻方的填写。在填写幻方的过程中注意从特殊的数字和位置入手。

（2）比较法：利用比较的方法直接填出某些位置的数字，注意观察幻方中相关联的幻和之间的关系，注意它们之间的共同部分，并比较不同的部分。

（3）特殊法：奇偶分析法、罗伯法、海尔法、杨辉法

奇偶分析法（3 阶幻方）：

偶	奇	偶
奇	5	奇
偶	奇	偶

罗伯法（单阶幻方经典编排方法）：

助记口诀:1 居上行正中央,依次斜填切莫忘。上出框界往下写,右出框时左边放。 重复便在下格填,角上出格一个样。

奇数阶幻方最经典的填法是罗伯法。填写的方法是：

把 1（或最小的数）放在第一行正中；按以下规律排列剩下的(n×n－1)个数：

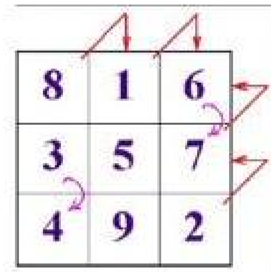
（1）每一个数放在前一个数的右上一格；

（2）如果这个数所要放的格已经超出了顶行那么就把它放在底行，仍然要放在右一列；

（3）如果这个数所要放的格已经超出了最右列那么就把它放在最左列，仍然要放在上一行；

（4）如果这个数所要放的格已经超出了顶行且超出了最右列，那么就把它放在底行且最左列；

（5）如果这个数所要放的格已经有数填入，那么就把它放在前一个数的下一行同一列的格内。



杨辉法（适合三、五阶幻方）：

（1）画好阶梯图。

（2）将 n^2 个数字斜排。

（3）将四周的数都移进方框，移动的步数为幻方的阶数。

海尔法（双偶阶幻方编排法）：

所谓双偶阶幻方就是当 n 可以被 4 整除时的偶阶幻方，即 4K 阶幻方。在说解法之前我们先说明一个“互补数”定义：就是在 n 阶幻方中，如果两个数的和等于幻方中最大的数与 1 的和（即 n×n＋1），

我们称它们为一对互补数。如在三阶幻方中，每一对和为 10 的数，是一对互补数 ；在四阶幻方中，每一对和为 17 的数，是一对互补数。
双偶数阶幻方最经典的填法是海尔法。填写的方法是：
以 4 阶幻方为例：
（1）先把数字按顺序填。然后，按 4×4 把它分割成 4 块（如图）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图（12）

（2）每个小方阵对角线上的数字（如左上角小方阵部分），换成和它互补的数。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图（13）

4. 例题讲解

【例 3-49】将 1～9 填入 3×3 的方格表中使其每行、每列及两条对角线上的三个数字之和都相等，你一共可以得到多少种填法？

用奇偶分析法、罗伯法、杨辉法解答。

二、数阵

1.数阵的概念：

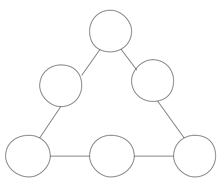
将一些数按照一定的规则填在某一特定图形的规定位置上，这类图形称为数阵图，简称数阵。数阵种类繁多、绚丽多彩，小学数学中常见的数阵有 3 种，
分别是封闭型数阵、辐射型数阵和复合型数阵。

2.数阵问题的解法

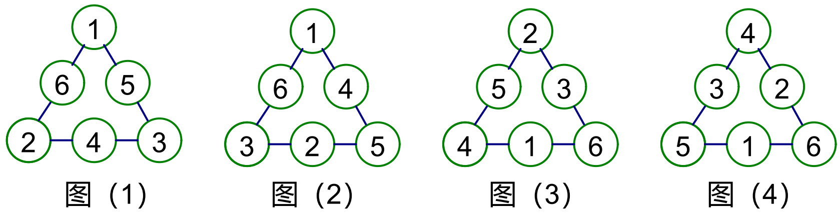
解答数阵问题通常用两种方法，一是待定数法，二是试验法。待定数法就是先用字母或符号表示满足条件的数，通过分析、计算来确定这些字母或符号应具备的条件，为解答数阵问题提供方向。试验法就是根据题中所给的条件选准突破口，确定所填数的范围。最后把两种方法结合起来，由填数的可能情况确定应填的数。

3.例题讲解

（封闭型数阵）【例 3-53】把数字 1、2、3、4、5、6 填到下面图中的圆圈中，使每条线上 3 个数的和相等。

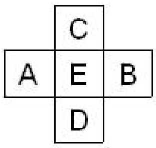


分析与解：填数的关键是确定图形 3 个顶点处的数。

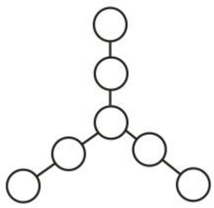


设 3 个顶点处的数分别为 a、b、c，每条线上 3 个数的和为 k，把 3 条线上的数相加得：
1＋2＋3＋4＋5＋6＝21＋（a＋b＋c）＝3k
可以看出（a＋b＋c）能被 3 整除，并且 k=7＋（a＋b＋c）÷3。
当 a、b、c 分别是 1、2、3 时，1＋2＋3=6，6 能被 3 整除，并且 k=9。把 1、2、3 分别填到图形的三个顶点圆圈里，再用 9 减去两个顶点上的数，就可以确定中间的数是什么，从而得到一种填法。如上面的图 1。
当 a、b、c 分别是 1、3、5 时，1＋3＋5=9，9 能被 3 整除，并且 k=10。把 1、3、5 分别填到图形的三个顶点圆圈里，再用 10 减去两个顶点上的数，就可以确定中间的数是什么，从而得到一种填法。如上面的图 2。
当 a、b、c 分别是 2、4、6 时，2＋4＋6=12，12 能被 3 整除，并且 k=11。把 2、4、6 分别填到图形的三个顶点圆圈里，再用 11 减去两个顶点上的数，就可以确定中间的数是什么，从而得到一种填法。如上面的图 3。
当 a、b、c 分别是 4、5、6 时，4＋5＋6=15，15 能被 3 整除，并且 k=12。把 4、5、6 分别填到图形的三个顶点圆圈里，再用 15 减去两个顶点上的数，就可以确定中间的数是什么，从而得到一种填法。如上面的图 4。

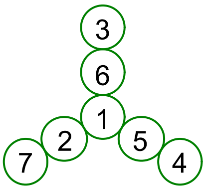
（辐射型数阵）【例 3-55】把 5、6、7、8、9 五个数分别填入图的五个方格里，使横行三个数的和与竖行三个数的和都是 21。



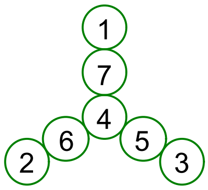
【例 3-56】将 1～7 这七个数字，分别填入图中的各个○内，使每条线段上的三个○内的数字之和相等。



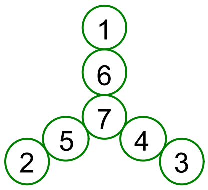
分析与解：填数的关键是确定图形中心位置圆圈里的数。
设中心圆圈里的数是 a，由于 a 一共加了三次，所以有：
1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋2a＝28＋2a
又由于每条线上的三个圆圈里数的和相等，那么 28＋2a 能被 3 整除。而 28＋2a＝3×9＋（1＋2a），1＋2a 就能被 3 整除，因此，a 是 1 或 4 或 7。



例2图1



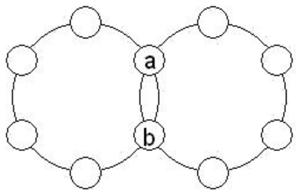
例2图2



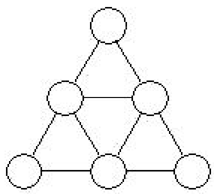
例2图3

当 a 是 1 时，每条线上的三个圆圈里数的和是（28＋2）÷3＝10，每条线上另两个数的和是 9，所以把剩下数分为三组：2 和 7、3 和 6、4 和 5，分别填入就可以得出一种填法，见上面的图 1。
当 a 是 4 时，每条线上的三个圆圈里数的和是（28＋8）÷3＝12，每条线上另两个数的和是 8，所以把剩下数　分为三组：1 和 7、2 和 6、3 和 5，分别填入就可以得出一种填法，见上面的图 2。
当 a 是 7 时，每条线上的三个圆圈里数的和是（28＋14）÷3＝14，每条线上另两个数的和是 7，所以把剩下的数分为三组：1 和 6、2 和 5、3 和 4，分别填入就可以得出一种填法，见上面的图 3。
这是一道辐射型的数阵，要填的数还可以是其它的一些数。一般来说，这几个数是有限等差数列的数，其解题思路与这道例题的思路完全相同。

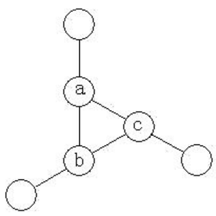
（复合型数阵）【例 3-57】将 1～10 这十个数填入图 3- 的小圆中，使每个大圆上六个数的和是 30。



【例 3-58】图 3- 的四个小三角形的顶点处有六个圆圈。如果在这些圆圈中分别填上六个质数，它们的和是 20，而且每个小三角形三个顶点上的数的和相等。问这六个质数的积是多少？



【例 3-59】将 1～6 这六个数分别填入图 3- 的圆中，使每条直线上三个圆内数的和相等且最大。



第六节　二进制与其他进制

一、各进制的基、符号
1．十进制
日常生活中最常见的是十进制数，用十个不同的符号来表示：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。
基为：10

运算规则：逢十进一，借一当十

在十进制数的后面加大写字母 D 以示区别。

2. 二进制

二进制数只有两个代码“0”和“1”，所有的数据都由它们的组合来实现。

基为：2

运算规则：“逢二进一，借一当二”的原则。

3．八进制

使用的符号：0、1、2、3、4、5、6、7；

运算规则：逢八进一；

基为：8

在八进制数据后加英文字母“O”，

4.十六进制

使用的符号：采用 0~9 和 A、B、C、D、E、F 六个英文字母一起共十六个代码。

运算规则：逢十六进一

基为：16

在十六进制数据后加英文字母“H”以示分别。

二、各进制的权

各数制中整数部分不同位的权为“基的 n-1 次方（n 为数值所在的位数，n 的最小值取 1）”,小数部分不同位的权为“基的-n 次方”。

如：十进制中，各位的权为 10^{n-1}

二进制中，各位的权为 2^{n-1}

十六进制中，各位的权为 16^{n-1}

各数制中，各位上数字的表示值等于数字乘以该进制的权。

一个十进制数（135.7）$_{10}$可表示为：135=1×102+3×101+5×100+7×10-1

二进制数（101.1）$_2$可表示为 101=1×22+0×21+1×20+1×10-1

三、各进制数之间的转换

由于十进制数是我们最熟悉的数，所以各进制数之间的转换可以十进制数作为桥梁来转换，就简单多了。

1.十进制转换为其他进制

整数部分:按“倒序除基取余法”的原则进行转换。

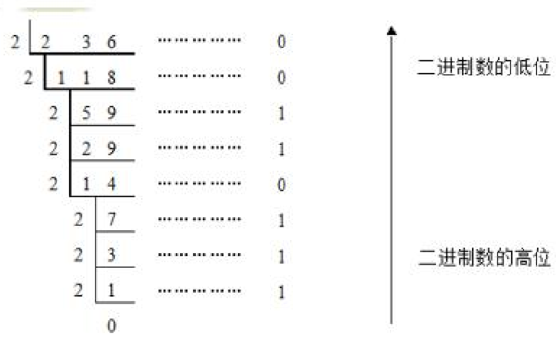
即用 2 连续去除十进制数，直至商等于 0 为止，逆序排列所得余数，即可得到与该十进制相对应的目标数制数。

小数部分:按“顺序乘基取整法”的原则进行转换。

小数乘以目标数制的基数，取下所得积的整数部分为目的数的最高位。将积余下的小数部分再乘基数，取下整数部分。反复进行下去，直到乘积的小数部分为“0”。

【例】将 236 转换成二进制。

转换过程如图所示。



$$(236)_{10} = (11101100)_2$$

【例】把十进制数 0.8125 转成二进制数。

解：

0.8125×2=1.625　　　　得整数部分：1

0.625×2=1.25　　　　　得整数部分：1

0.25×2=0.5　　　　　　得整数部分：0

0.5×2=1.0　　　　　　 得整数部分：1

所以　（0.8125）$_{10}$=（0.1101）$_2$

2.其他进制转换成十进制

其他进制数要转换成十进制数非常简单，将其他进制数上各位数字分别乘以相应的权，再以十进制的方法相加，即可得到十进制数。

例：把二进制数（10110.011）$_2$转成十进制数。

（10110.011）$_2$

$=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}$

=（22.375）$_{10}$

例：将十进制数 91 转换成八进制。（133）$_8$

例：将八进制数$(715.1)_8$转换成十进制。（461.125）

例：将十进制数 91 转换成十六进制。（5B）$_{16}$

例：将十六进制数$(15.1)_{16}$转换成十进制。（21.0625）

3.八进制、十六进制数与二进制数相互转换

将待转换的数转换成十进制，然后再将十进制数转换成目标进制数。

例：将十六进制数$(15.1)_{16}$转换成八进制。（25.04）$_8$

复习思考题、作业题：

思考题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　　周	课　次	第 19-24 次
章　节 名　称	**第四章 应用问题**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	12
教　学 目　的 要　求	能理解、掌握平均数的概念，掌握估算等数学思想，能选择灵活的方法解决平均数问题；学会运用画线段的方法表示倍关系中两个量，熟练掌握解答和差问、倍数问题的方法，理解问题中各个量之间的关系；掌握行程问题的基本数量关系，掌握行程问题基本的分析方法；理解和掌握分数、百分数应用题的数量关系和解题方法，掌握分数、百分数应用题之间的联系；掌握比例的基本性质，熟练掌握比例式的恒等变形及连比问题的解答方法；		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：1. 学会运用画线段的方法表示倍关系中两个量，熟练掌握解答和差问、倍数问题的方法，理解问题中各个量之间的关系。 2.掌握行程问题基本的分析方法。 3.掌握分数、百分数应用题的数量关系和解题方法。 4.掌握比例问题的解答方法。 难点：掌握分数、百分数应用题的数量关系和解题方法。		

教学步骤及内容：

第一节　平均数问题

我们经常用各科成绩的平均分来比较班级之间、同学之间成绩的高低，求出各科成绩的平均分就是求平均数。平均数在日常生活中应用很广泛，如求平均身高问题，求某天的平均气温等。

1. 定义：平均数是指把几个不相等的数移多补少，使他们完全相等，而这几个数的总和不变，所求出的相等数就是它们的平均数。

2. 数量关系式

平均数问题是一类常见的数学问题。解答平均数问题的关键是要理解平均数问题的数量关系，确定总数量以及与总数量相对应的总份数：

平均数＝总数量÷总份数；

总份数=总数量÷平均数；

总数量=平均数×总份数。

例 1. 王芳期中考试语文得 89 分，数学成绩比语文成绩少 4 分。如果语文，数学和英语这 3 门功课的平均成绩要达到 90 分，英语要考多少分?

分析：可以先求出 3 门功课的平均成绩达到 90 分时，总成绩是多少；再把语文和数学成绩的和计算出来，就可以求出英语要考多少分。

解：90×3－（89＋89－4）＝270－174＝96（分）

答：英语要考 96 分。

例 2. 有 5 个数，它们的平均数是 138。如果再添上 2 个数 240 和 190，那么这些数的平均数是多少？

分析：要求平均数就要知道各个数的和与数的个数。先算出 5 个数的和，再算出 7 个数的和，然后根据数量关系进行计算。

解：（138×5＋240＋190）÷（5＋2）＝1120÷7＝160

例：两地相距 360 千米，一艘汽艇顺水行驶完全程需要 10 小时，已知这条河的水流速度为每小时 6 千米，往返两地的平均速度是每小时多少千米？

例：一次考试，甲、乙、丙三人平均 91 分，乙、丙、丁三人平均 89 分，甲、丁二人平均 95 分，问甲丁各得多少分？

例：两组学生进行跳绳比赛，平均每人跳 152 下，甲组有 6 人，平均每人跳 140 下，乙组平均每人跳 160 下，乙组有多少人？

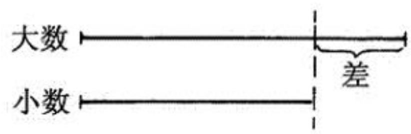
例：小明前几次数学测试的平均成绩是 84 分，这次要考 100 分，才能把数学平均成绩提高到 86 分，问这是他第几次数学测试？

例：小明前 4 次语文测试的平均成绩是 68 分，他想在下次语文测试后将平均成绩提高到 70 分，那么在下次测试中他要得多少分？

第二节　和差问题及倍数问题

一、和差问题

在小学数学问题中，已知两个数的和与两个数的差，求这两个数的应用问题叫做和差问题。我们在研究和差问题的解题策略时，重点研究和差问题的基本结构，明确和差问题的数量关系，掌握和差问题的解答方法。



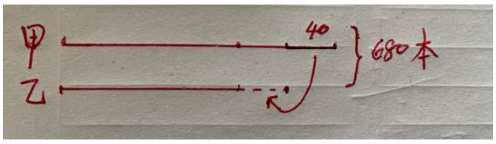
一般地，已知大数与小数的和与差，求这两个数。从上面线段图可以看出，如果把小数加差结果等于大数，也就是在和上加差结果是两个大数，因此和加差的结果除以 2 得大数；如果把大数减差结果等于小数，也就是在和上减差结果是两个小数，因此和减差的结果除以 2 得小数。所以和差问题的数量关系是：

大数＝（和＋差）÷2　　小数＝（和－差）÷2

解题关键：确定两者的“和”与“差”。

例. 甲、乙两个书架一共有图书 680 本。如果从甲书架上取出 40 本图书放在乙书架上，那么两个书架上的图书的本数正好相等。甲、乙两书架原来各有图书多少本？

分析：题目没有直接给出两书架放书本数的差。由于从甲书架上取出 40 本图书放在乙书架上，两个书架上的图书的本数正好相等，说明甲书架上的图书比乙书架多（40×2）本。这样根据和差问题的数量关系就可以解答。



解：（1）甲书架上有图书：

（680＋40×2）÷2＝760÷2＝380（本）

（2）乙书架上有图书：

（680－40×2）÷2＝600÷2＝300（本）　　或 680－380＝300（本）

答：甲书架原来有图书 380 本，乙书架原来有图书 300 本。

例. 甲、乙两仓库共存有化肥 4300 吨，如果从甲仓库运出 300 吨化肥存入乙仓库，这时甲仓库的化肥比乙仓库还多 100 吨。甲、乙两仓库原来各存有化肥多少吨？

分析：解题的关键还是要先求出甲、乙两仓库原来存有化肥吨数的差。由于从甲仓库运出 300 吨化肥存入乙仓库，这时甲仓库的化肥比乙仓库还多 100 吨，说明原来甲仓库存的化肥比乙仓库多 2 个 300 吨和 100 吨。

解：（1）原来甲仓库存的化肥比乙仓库多多少吨？

300×2＋100＝700（吨）

（2）甲仓库原来存有化肥多少吨？

（4300＋700）÷2＝2500（吨）

（3）乙仓库原来存有化肥多少吨？

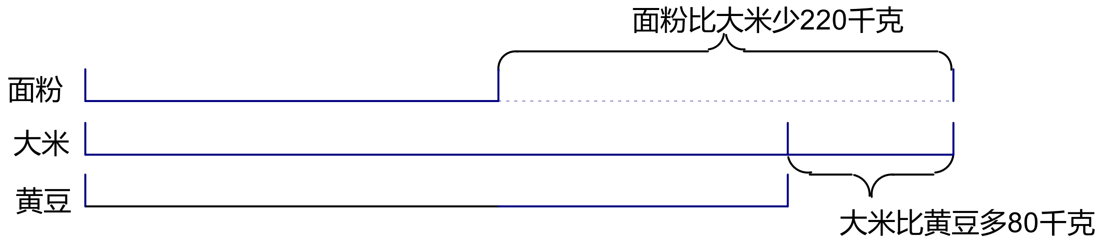
4300－2500＝1800（吨）

答：甲仓库原来存有化肥 2500 吨，乙仓库原来存有化肥 1800 吨。

上面的两道题涉及的是两个数的和与差的数学问题。有时，我们会遇到其它情况的“和差问题”，但是有了基本的和差问题的解题策略，只要认真思考，就可以找到解题方法。

例：食堂有面粉、大米和黄豆共有 960 千克。已知面粉比大米少 220 千克，大米比黄豆多 80 千克。面粉、大米和黄豆各有多少千克？

分析：这道题涉及三个数，已知这三个数的和以及它们两数的差，要求第三个数的问题。从题目可以看出，面粉的数量最少。由于“面粉比大米少 220 千克”，说明大米比面粉多 220 千克；而“大米比黄豆多 80 千克”，因此黄豆比面粉多（220－80）千克。如果把面粉的数量看作一份，那么从总数中减去大米比面粉多的 220 千克、再减去黄豆比面粉多的（220－80）千克后，所得的重量就是 3 份面粉的重量，也就是面粉重量的 3 倍。所以可以先求得面粉的重量，再求出大米和黄豆的重量。



解：（1）面粉有多少千克？

$$[960-220-(220-80)]\div 3=600\div 3=200$$ （千克）

（2）大米有多少千克？

$$200+200=420$$ （千克）

（3）黄豆有多少千克？

$$420-80=340$$ （千克）

答：面粉有 200 千克，大米有 420 千克，黄豆有 340 千克。

二、和倍问题

已知两个数的和与它们之间的倍数关系，求这两个数的问题叫做和倍问题。有时也会出三个或三个以上的数的和及其倍数关系的问题。解答和倍问题的关键，是选择较小数为标准数，也就是 1 份的数，再根据和与倍数的关系，先求出这个标准数（较小数），再求出较大的数。

如果是已知两个数的和与它们之间的倍数关系，那么和倍问题的数量关系是：

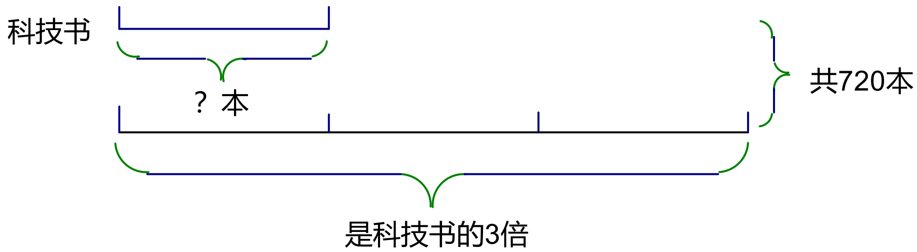
和÷（倍数＋1）＝标准数（较小数，就是 1 份的数）

标准数×倍数＝较大的数，或：和－标准数＝较大的数

解题关键：确定“1 倍数”“和”各是多少。

例. 学校图书馆买来科技书与故事书共 720 本，买来的故事书的本数是科技书的 3 倍。买来科技书和故事书各多少本？

分析：从题目知道科技书的本数较小，把它看作 1 倍的数（标准数），由于买来的故事书的本数是科技书的 3 倍，那么科技书与故事书的总本数“720 本”，就是科技书的（3＋1）倍，求科技书的本数是多少，用除法计算。



解：（1）买来科技书多少本？

720÷（3＋1）＝180（本）

（2）买来故事书多少本？

180×3＝540（本）　　或：720－180＝540（本）

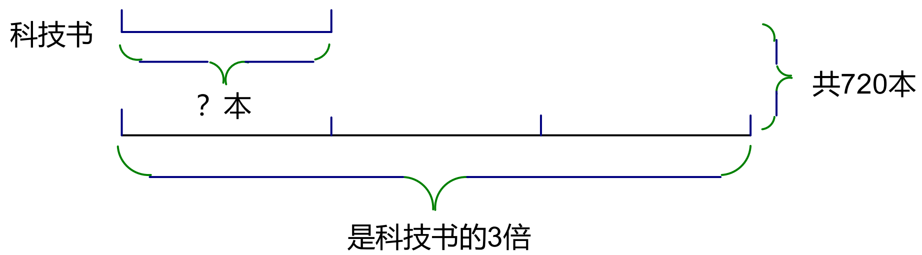
答：买来科技书 180 本，买来故事书 540 本。

我们可以把这道题改编成下面的问题，只要在上面的解题分析过程的基础上，进行适当的调整，也比较容易理解分析思路。

例：学校图书馆买来科技书与故事书共 820 本，买来的故事书的本数是科技书的 3 倍还多 100 本。买来科技书和故事书各多少本？

这样思考：买来的故事书的本数是科技书的 3 倍还多 100 本，不是整倍数。如果不多这 100 本故事书，那么买来的故事书的本数正好是科技书的 3 倍。因此，在 820 本图书中先减去这 100 本故事书，所剩的图书本数就有“买来的故事书的本数正好是科技书的 3 倍”的数量关系。所以买来的科技书是：

（820－100）÷（3＋1）＝180（本）



由此，可以计算出买来的故事书有：

180×3＋100＝640（本）　或：820－180＝640（本）

在解题过程中，可能还会遇到两个数的和不直接给出的情况，我们仍然要先求出两个数的和，再进行具体的分析解答。

例：　甲有图书 150 本，乙有图书 45 本，甲给乙多少本后，甲的本数是乙的 2 倍？

分析：甲乙两人的图书总数可以直接计算出来，这样可以先求出甲的本数是乙的两倍时，乙的本数，再求出甲应该给乙多少本。

解：（1）甲的本数是乙的两倍时，乙的本数是多少？

$$(150+45)\div(2+1)=195\div3=65$$ （本）

（2）甲应该给乙多少本图书？

$$65-45=20$$ （本）

答：甲给乙 20 本后，甲的本数是乙的 2 倍.

例：　儿童公园运来牡丹、菊花和月季三种花卉共 2500 盆，其中菊花的盆数是牡丹的 3 倍月季

的盆数是菊花的 2 倍。问这三种花卉各有多少盆？

分析：从题目知道，牡丹的盆数最少，将牡丹的盆数作为 1 份的数（标准数），因此菊花的盆数就是这样的 3 份，月季的盆数就是这样的 3×2 份。

解：（1）运来牡丹多少盆？

$$2500 \div (1+3+3\times 2) = 2500 \div 10 = 250$$ （盆）

（2）运来菊花多少盆？

$$250 \times 3 = 750$$ （盆）

（3）运来月季多少盆？

$$750 \times 2 = 1500$$ （盆）

答：运来牡丹 250 盆，运来菊花 750 盆，运来月季 1500 盆。

例： 甲、乙、丙三人共加工 3600 个零件。乙比甲多加工 240 个，丙加工的零件是甲、乙两人加工的合并在一起的 2 倍。甲、乙、丙各自加工多少个零件？

分析：甲加工的最少，把甲加工的个数作为 1 份（标准数），那么，乙加工的个数就是这样的 1 份又 240 个；丙加工的个数是甲、乙两人加工的合并在一起的 2 倍，即是这样的（1＋1）×2 又（242×2）个，所以从总数 3600 中减去 240 个和（242×2）个后，就是甲加工零件个数的[（1＋1）＋（1＋1）×2]倍，从而可以先求出甲加工的个数。

解：（1）甲加工多少个零件？

$$(3600-240-240\times 2) \div [(1+1+(1+1)\times 2] = 2880 \div 6 = 480$$ （个）

（2）乙加工多少个零件？

480＋240=720（个）

（3）丙加工多少个零件？

3600－480－720＝2400（个）

答：甲加工 480 个零件，乙加工 720 个零件，丙加工 2400 个零件。

三、差倍问题

已知两个数的差和它们之间的倍数关系，求这两个数的问题叫做差倍问题。解答时一般选择较小数为标准数，也就是 1 份的数，再根据差与倍数的关系，先求出这个标准数（较小数），再求出较大的数。有时也会出三个或三个以上的数的差及其倍数关系的问题。

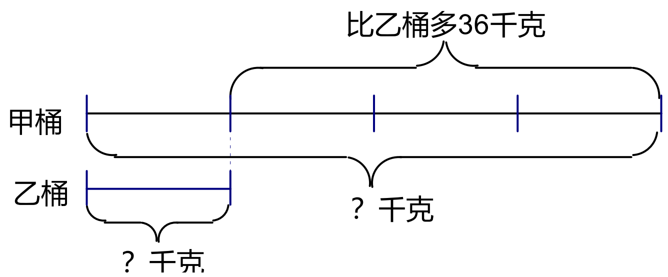
如果是已知两个数的差与它们之间的倍数关系，那么差倍问题的数量关系是：

差÷（倍数－1）＝标准数（较小数，就是 1 份的数）

标准数×倍数＝较大的数，或：差＋标准数＝较大的数

解题关键：确定“1 倍数”“差”各是多少。

例.有两桶食油，已知甲桶的油是乙桶的 4 倍，甲桶的油比乙桶多 36 千克。两桶食油原来各有多少千克？



分析：把乙桶原来的食油千克数看作 1 份（即就是标准数），那么甲桶的油比乙桶多的 36 千克，就是这样的（4－1）份。因此，可以先求出乙桶原来有食油多少千克，再求出甲桶原来有食油多少千克。

解：（1）乙桶原来有食油多少千克？

36÷（4－1）＝12（千克）

（2）甲桶原来有食油多少千克？

12＋36＝48（千克）　　或：12×4＝48（千克）

答：甲桶原来有食油 48 千克，乙桶原来有食油 12 千克。

例.原来书店文学类图书的本数是科普类图书本数的 3 倍，经过一周，文学类图书卖出 460 本，科普类图书卖出 60 本，这时文学类图书与科普类图书同样多。原来文学类和科普类图书各有多少本？

分析：把原来科普类图书的本数看作 1 份（也就是标准数），在文学类图书卖出 460 本，科普类图书卖出 60 本后，两种图书同样多，说明卖出图书本数的差正好是原来科普类图书本数的（3－1）倍。由此，先算出原来科普类图书本数，再算出原来文学类图书的本数。

解：（1）原来科普类图书有多少本？

（460－60）÷（3－1）＝400÷2＝200（本）

（2）原来文学类图书有多少本？

200×3＝600（本）

答：原来科普类图书有 200 本，文学类图书有 600 本。

例：甲、乙、丙 3 所小学学生人数的总和为 1999，已知甲校学生的 2 倍与乙校学生人数减 3 及丙校学生人数加 4 都是相等的，问甲、乙、丙各校学生人数是多少？

解：把甲看作 1 倍数，则甲校有学生：$(1999-3+4)\div(1+2+2)=400$（人）

乙校有学生：$400\times2+3=803$（人）

丙校有学生：$400\times2-4=796$（人）

答：甲校有学生 400 人，乙校有学生 803 人，丙校有学生 796 人。

四、倍比问题

在小学数学解题中，我们可以抓住题目中同类量之间的倍数关系进行分析，由一种同类量之间的倍数关系，经过比较可以推得另一种同类量也具有相同的倍数关系，从而找到问题的解答方法。

例. 一辆汽车 2 小时行驶 95 千米的路程。照这样计算，6 小时行驶多少千米的路程？

分析：这个问题，是在汽车行驶速度不变的前提下进行讨论的。由于时间之间存在倍数关系：6 小时是 2 小时的（6÷2）3 倍，那么路程之间也存在同样的倍数关系。因此，汽车在 6 小时的时间里所行驶的路程是 2 小时里行驶路程的 3 倍，已知汽车 2 小时行驶 95 千米的路程，所以就可以求出汽车 6 小时行驶的路程。

解：　95×（6÷2）＝95×3＝285（千米）

答：6 小时行驶 285 千米的路程。

这种通过比较同类量之间的倍数关系来解答的问题就是倍比问题，这种解题方法就是倍比法。

例. 一个车间计划加工 1152 个零件。4 天加工了 192 个零件，照这样计算，剩下的零件还需要加工多少天？

分析 1：由于车间加工零件的效率不变，剩下的零件个数是已经加工了的零件个数的几倍，那么剩下零件的加工天数也就是已经加工零件天数的几倍。根据同类量之间的倍数关系就可以解答。

解法 1：　4×[（1152－192）÷192]＝4×5＝20（天）

分析 2：在车间加工零件的效率不变的情况下，计划加工零件的个数“1152”个是已经加工零件个数“192 个”的多少倍，那么加工这些零件的时间也是已经加工零件所用时间的多少倍。

解法 2：4×（1152÷192）－4＝4×6－4＝20（天）

分析 3：按照一般的思路进行思考，先求每天加工多少个零件，再求出计划加工 1152 个所需要的时间，减去已经加工的 4 天时间，就能求出剩下的零件还需要加工多少天。

解法 3：1152÷（192÷4）－4＝1152÷48－4＝24－4＝20（天）

答：剩下的零件还需要加工 20 天。

用倍比法解答数学问题，要确定问题中的不变量，理解同类量之间的倍数关系，并能进行比较、类推，从而找到解决问题的方法。倍比问题的解题方法对于拓宽学生知识面，培养学生思维能力都是非常有益的。

第三节　行程问题

在人们的生活中离不开衣食住行，行程问题无处不在。这类问题主要涉及三个量：路程、速度和以及时间。下面我们分类讲解。

一、相遇问题

相遇问题是研究两个人行走或者是两个运动物体同时从两地出发，相向而行，经过一段时间相遇的问题。一般涉及三个量：路程、速度和以及相遇时间，它们之间的关系是：

路程÷速度和＝相遇时间

速度和×相遇时间＝路程

路程÷相遇时间＝速度和

例. 客车和货车分别从甲、乙两站相对开出，客车每小时行 80 千米，货车每小时行 70 千米。已知甲、乙两站之间的铁路长 600 千米，经过几小时两列车相遇？

分析：由于客车和货车分别从甲、乙两站相对开出，每过 1 小时，两列车就靠近（80＋70）千米，这就是两列车行驶的速度和。求出两列车的速度和以后，思考：在 600 千米的路程里，有几个速度和（80＋70），就要用几小时。因此，可以列式计算出经过几小时两列车相遇。

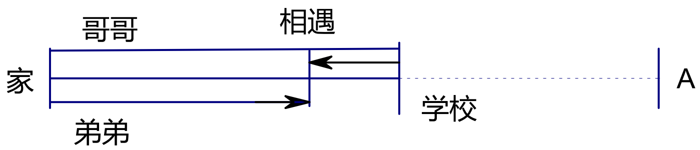
货车 →　　　　　　　　← 客车

解：　600÷（80＋70）＝600÷150＝4（小时）

答：经过 4 小时两列车相遇。

这道题就是相遇问题，解答的关键是理解并应用速度和进行计算，数 关系也比较单一，是相遇求相遇时间：路程÷速度和＝相遇时间，是常见的一种相遇问题。另一种相遇问题是相遇求路程、相遇求另一列火车的行驶速度。

例. 哥哥和弟弟同时从家里出发去学校，路程是 1160 米。哥哥骑自行车每分钟行 200 米，弟弟步行每分钟走 90 米。当哥哥到达学校以后发现自己的文具盒没有带，立即返回，在途中与弟弟相遇。相遇时弟弟走了多少米？



分析：由于哥哥骑自行车行走的速度快，一定是先到达学校；而当哥哥到达学校以后又立即返回，在途中与弟弟相遇，这时他俩一共行走了 2 个从家到学校的路程。这样，也可以看作：弟弟从家步行出发，哥哥骑自行车是从与家到学校路程相等的 A 处同时出发去学校，在经过学校后与弟弟相遇的，如下图所示。又已知哥哥与弟弟各自行走的速度，就可以先求出相遇时间，再求相遇时弟弟走了多少米？

解：（1）相遇时哥哥与弟弟各自行走了多少分钟？

1160×2÷（200＋90）＝2320÷290＝8（分）

（2）相遇时弟弟走了多少米？

90×8＝720（米）

答：相遇时弟弟走了 720 米。

相遇问题的分析思路和解题方法都可以迁移到与相遇问题类似的以下问题的解答过程中。

1.两个工程队分别从两端合作开凿一条长 450 米的隧道，第一队平均每天开凿 18 米，第二队平均每天开凿 12 米，两队同时开工，第三天可以完工？

2. 1.两个工程队分别从两端合作开凿一条长隧道，第一队平均每天开凿 18 米，第二队平均每天

开凿 12 米，两队同时开工，15 天完工。这条隧道全长多少米？

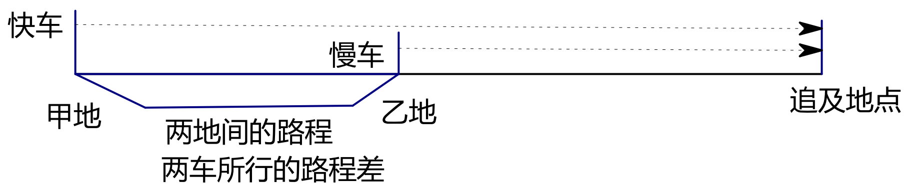
3. 两个工程队分别从两端合作开凿一条长 450 米的隧道，两队同时开工，15 天完工。如果第一队平均每天开凿 18 米，第二队平均每天开凿多少米？

二、追及问题

追及问题是研究两个人行走或者是两个运动物体同时从两地出发，同向而行，慢的在前快的在后，经过一段时间快的追上慢的。一般还是涉及三个量：路程、速度差和追及时间，它们之间的关系是:

路程÷速度差＝追及时间、速度差×追及时间＝路程、路程÷追及时间＝速度差

其中数量关系中所指的路程，可以理解为是路程差。如果是两辆汽车同时从两地出发，同向而行，慢车在前快车在后，那么这两地之间的路程就是指在追及时间里快车所行的路程与慢车所行路程的差。这样讲，追及问题的数量关系“路程差÷速度差＝追及时间”，就与“按两个差求未知数的问题”中的数量关系一样。但是作为一种行程问题，有其解题的特殊思路，我们要继续加以研究。



例. 两辆汽车从甲地出发开往乙地，甲车每小时行 70 千米，乙车每小时行 60 千米。乙车出发 0.5 小时后，甲车出发追乙车，几小时以后甲车可以追上乙车?

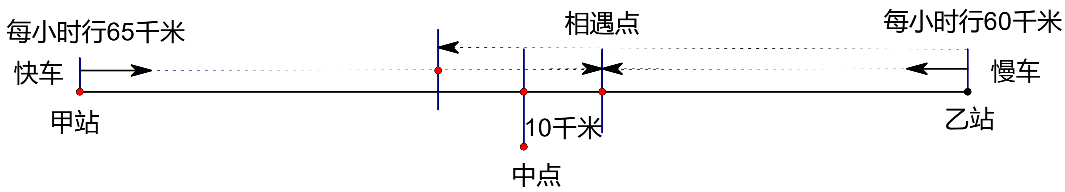
分析：乙车出发 0.5 小时后，甲车出发追乙车，这时乙车已经行了（60×0.5）千米，这个路程就是在甲车追上乙车时，甲车与乙车所行的路程之差。根据追及问题的数量关系就能求出追及时间。

解：　60×0.5÷（70－60）＝30÷10＝3（小时）

答：3 小时以后甲车可以追上乙车。

例. 一列快车从甲站开往乙站，每小时行 65 千米，一列慢车从乙站开往甲站，每小时行 60 千米。两列火车同时开出以后，在距离路程中点 10 千米处相遇。甲、乙两站间的铁路长多少千米？

分析：从题目看这是一道相遇问题，实际上也涉及到追及问题的数量关系，如下面线段图所示。



由于快车与慢车在距离路程中点 10 千米处相遇，因此相遇时快车比慢车多行了（10×2）千米。每小时快车比慢车多行（65－60）千米，那么就可以先算出相遇时间是多少小时，再算出甲、乙两站间的铁路长多少千米。

如果把快车看作是从乙站开往甲站，与慢车同时开出的，那么在快车比慢车多行（10×2）千米时，慢车正好还是在距离路程中点的 10 千米处，而每小时快车比慢车多行（65－60）千米，因此，两车行驶所用的时间就是两车的相遇时间。

解：（1）相遇时间是多少小时？

10×2÷（65－60）＝20÷5＝4（小时）

（2）甲、乙两站间的铁路长多少千米？

（65＋60）×4＝125×4＝500（千米）

答：甲、乙两站间的铁路长 500 千米。

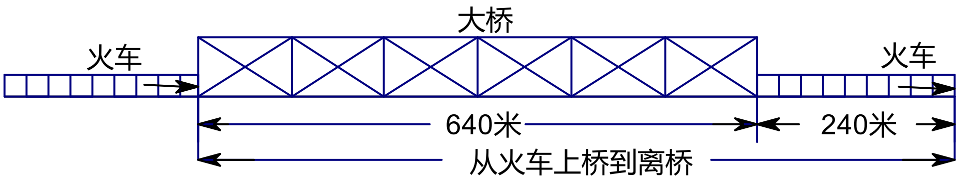
追及问题与相遇问题一样，也可以把其解题思路和方法迁移到相似问题的解答中去，关键还是分析题中的数量关系，理清解题思路。

三、火车过桥问题

在简单的行程问题以及稍复杂的行程问题：相遇问题和追及问题中，是把运动的人或物体都看作是一个质点的运动，人或物体本身的长度不再考虑。如果我们在研究物体运动的过程中，既考虑由于运动而涉及路程、速度和时间的关系，又涉及运动物体本身的长度，那么就出现一种特殊的行程问题——火车过桥问题。

例. 一座大桥长 640 米。一列火车车身长 260 米，以每秒 20 米的速度行驶，从火车上桥到离桥共需要多少秒？

分析：要求从火车上桥到离桥共需要多少时间，不仅与大桥的长度有关，还与火车车身的长度有关。根据题意画出示意图如下，我们重点观察火车通过大桥时，所行驶的路程。



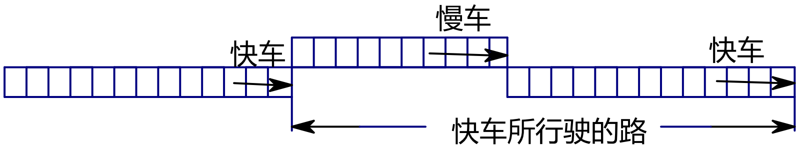
解：　（640＋260）÷20＝900÷20＝45（秒）

答：从火车上桥到离桥共需要 45 秒。

这个问题就是火车过桥问题。其特点是：要求过桥的时间，既要考虑桥的长度，还要考虑火车本身的长度。凡是需要考虑运动物体自身的长度的行程问题，都是属于这一类问题。在小学数学解题中，经常会遇到这类问题。

例. 两列火车，一列长 160 米，每秒钟行 20 米；另一列长 120 米，每秒钟行 15 米。两列车在平行的两道上同向而行，慢车在前，快车在后，快车车头从追及慢车到车尾离开慢车，共需要多少秒钟？

分析：从题目看，两列火车同向行驶，是一道涉及追及问题数量关系的题目，两列火车的速度差可以求出。要求快车车头从追及慢车到车尾离开慢车所需要的时间，关键是确定并求出在这一过程中快车所行驶的路程。



解： （160＋120）÷（20－15）＝280÷5＝56（秒）

答：共需要 56 秒钟。

四、流水问题

流水问题一般是指船在水中航行的问题，涉及到船速、水速以及船在水中航行的顺水速度、逆水速度等概念的问题。流水问题是一种特殊的行程问题，又是一种和差问题。流水问题涉及到船速、水速、船的顺水速度和逆水速度等一些量。船在静水中行驶的速度就是船速；由于河流中水是流动着的水，有一定的速度，这就是水流动的速度，叫做水速；而船在流动着的水中行驶，就存在船速与水速的运动叠加问题，所以就有顺水速度与逆水速度。这些量之间的关系是：

船速＋水速＝顺水速度　船速－水速＝逆水速度

（顺水速度＋逆水速度）÷2＝船速　（顺水速度－逆水速度）÷2＝水速

例. 一只货船在河中顺水从甲地航行到乙地需要行驶 160 千米。已知货船每小时行 28 千米，水流速度每小时 4 千米， 航行到达乙地需要多少小时？

分析：要求航行到达乙地需要多少小时，就是求货船在顺水中航行需要的时间。先求出货船的顺水速度，再根据路程与速度的关系求出顺水航行到达乙地所需要的时间。

解： 160÷（28＋4）＝160÷32＝5（小时）

答：航行到达乙地需要 5 小时。

例. 甲、乙两船共同航行在一段长 120 千米的水路上。甲船顺水航行需要 3 小时，逆水航行需要 4 小时。乙船逆水航行用了 8 小时，乙船顺水航行需要多少小时？

分析：已知这段水路长 120 千米，要求乙船顺水航行需要多少小时，就要知道乙船顺水航行的速度。由题中的条件可以先求出乙船逆水航行的速度；只要求出水流速度，乙船顺水航行的速度就能求出。从题目的第二个条件是可以求出水流的速度的。

解：(1）水流的速度是多少？

（120÷3－120÷4）÷2＝（40－30）÷2＝10÷2＝5（千米）

（2）乙船顺水航行速度是多少？

120÷8＋5＋5＝15＋10＝25（千米）

（3）乙船顺水航行需要多少小时？

120÷25＝4.8（小时）

答：乙船顺水航行需要 4.8 小时。

例 一艘客轮从甲城出发，顺流航行到乙城用了 10 小时；从乙城返回，逆水航行到达甲城用了 12.5 小时。已知甲城到乙城的水路全长 400 千米，问客轮的静水速度和水流速度各是多少？

分析：已知甲城到乙城的水路全长以及顺水与逆水航行所用的时间，先求出客轮的顺水速度和逆水速度，就能够求出客轮的静水速度和水流速度。

解：（1）客轮的顺水速度和逆水速度分别是多少？

400÷10=40（千米）

400÷12.5=32（千米）

（2）客轮的静水速度和水流速度分别是多少？

（40＋32）÷2=36（千米）

（40－32）÷2=4（千米）

答：客轮的静水速度是每小时 36 千米，水流速度分别是每小时 4 千米。

第四节　分数、百分数问题

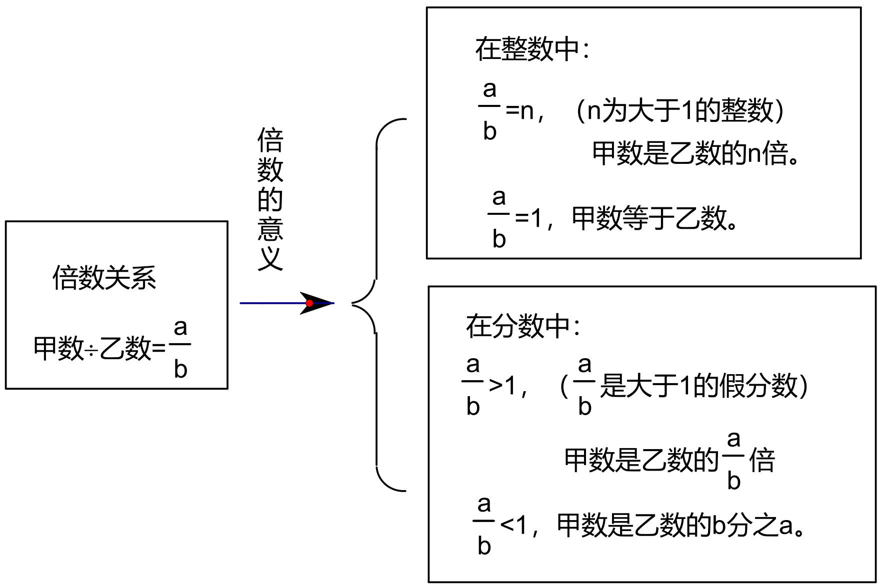
一、分数应用题的分类

分数应用题是小学数学的难点，可以分为两部分：一部分是解题思路和方法与整数应用题类似；另一部分是由分数乘除法的含义扩展而得到的具有特殊解法的分数应用题。

如果按照运算步骤的多少考虑，那么分数应用题与整数应用题类似，都可以分为简单应用题和复合应用题。

1. 整数应用题与分数应用题的比较

整数集合扩展到分数集合后，分数集合中的分数仍然保持整数运算的意义和运算法则，因此这 11 种整数简单应用题都可以推广到分数应用题中来。所以，分数简单应用题也有类似的 4 种关系，11 种类型。其中相并，相差和份总关系的 8 种分数简单应用题，其解法与相对应的整数简单应用题相同，这里不再讨论。随着数的范围的扩展，“倍”的概念也扩展到分数的范围，那么倍数关系的应用也由整数扩展到分数。例如，已知甲数、乙数（不为零），要求甲数是乙数的多少倍，或求甲数是乙数的几分之几，可以统一为如下的形式：



整数集合中的这种“倍”概念及其“倍数关系”扩展到分数集合后，分数中“倍”的概念及其“倍数关系”与在整数时也相同，只是在表述是有所不同，因而也就比较抽象，理解起来也困难些。因此，倍数关系的 3 种分数简单应用题在解答思路上也有所不同（在表述上）。这 3 种分数简单应用题就是通常我们所说的三种基本分数应用题。下表是三种整数简单应用题与三种分数基本应用题之间的对应关系。

倍数关系的简单应用题			
序号	整数简单应用题	分数简单应用题	对应关系的比较
（1）	求一个数是另一个数的几倍	求一个数是另一个数的几分之几	意义相同，都用除法计算
（2）	求一个数的几倍是多少	求一个数的几分之几是多少	意义相同，都用乘法计算
（3）	已知一个数的几倍是多少，求这个数	已知一个数的几分之几是多少，求这个数	意义相同，都用除法计算

2. 分数复合应用题

整数复合应用题和分数复合应用题，都是由它们各自的若干简单应用题复合而成。从这一点看，分数复合应用题与整数复合应用题在分类与解答方法上也应类似。

分数复合应用题可以分成三部分：

第一部分是题型结构特点、解答思路和方法与整数复合应用题类似的分数复合应用题，即由相

并关系、相差关系和份总关系的 8 种分数解答应用题复合而成的应用题。

第二部分是分数乘除法运算含义的扩展得到的复合应用题，即主要是由倍数关系的三种分数基本应用题复合而成的应用题，有时也称为稍复杂的分数应用题。

第三部分是工程问题。工程问题是把“工作总量”抽象为单位“1”，然后根据分数的意义和整数应用题中“工作总量÷工作时间=工作效率”的数量关系分析解答，当然也可以直接用整数的方法来解答。

二、分数应用题的解答方法

1.弄清楚“比较”时的参照物问题，搞清哪个量是单位“1”。

2.求一个数是另一个数的几分之几，用除法计算。

比较量÷单位“1”的具体数量=比较量所占分率。

3.求一个数的几分之几是多少时，要用乘法计算，应用的关系式为：

单位“1”的具体数量×比较量所占分率＝比较量。

4.已知一个数的几分之几是多少，求这个数时，用除法计算。找到已知数量对应于单位“1”的具体数量所占几分之几，再根据关系式：

比较量÷比较量所占分率＝单位“1”的具体数量

（在解决分数应用题时，只要找到合适的等量关系，方程思想也很实用）。

5.寻找不变的量，列方程解决问题。在解决分数应用题时间，常常会出现有几个不同的单位“1”，寻找不变量作为单位 1 或根据不变量列方程。

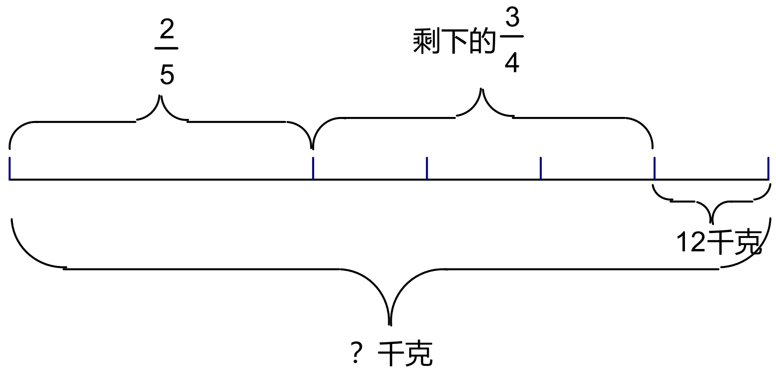
下面主要研究稍复杂的分数应用题和工程问题的解题思路和方法。

（1）稍复杂的分数应用题

解答时可以结合反映应用题数量关系的线段图理解题意，分析题中的数量关系，搞清哪个量是单位“1”，再根据分数乘除法的运算含义列出算式或列出方程去解。

例： 有一桶装满的柴油，第一次取用其中的$\frac{2}{5}$，第二次取用剩下的$\frac{3}{4}$，这时桶里还剩 12 千克柴油。问这桶柴油原来有多少千克？

解法 1　分析：把桶里原来的柴油重量看作单位“1”，线段图如下图所示。



只要能够找到 12 千克对于单位“1”所占几分之几，就可以求出桶里原有柴油的重量。

由于第一次取用了原有的$\frac{2}{5}$，那么剩下的就是原有的$(1-\frac{2}{5})$，第二次取用剩下的$\frac{3}{4}$，那么第二次就取用了原有的$(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{4}$，所以，第二次取用后，剩下的就是原有的$[1-\frac{2}{5}-(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{4}]$，根据“已知一个数的几分之几是多少，求这个数”的基本数量关系，可以列出算式：

$12\div[1-\frac{2}{5}-(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{4}]$，这样问题就解决了。

解：（1）第一次取用后，剩下的是原有的几分之几？

$$(1-\frac{2}{5})=\frac{3}{5}$$

（2）第二次取用后，剩下的是原有的几分之几？

$$[1-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}]=1-\frac{2}{5}-\frac{9}{20}=\frac{3}{20}$$

（3）原有柴油的重量是多少？

$$12\div\frac{3}{20}=12\times\frac{20}{3}=80\text{（千克）}$$

答：原来桶里的柴油重 80 千克。

解法 2　分析，与解法 1 一样，把桶里原来的柴油重量看作单位“1”，由于第一次取用了原有的$\frac{2}{5}$，那么剩下的就是原有的$(1-\frac{2}{5})$，第二次取用剩下的$\frac{3}{4}$，桶里还剩 12 千克，正好是$(1-\frac{2}{5})$的$(1-\frac{3}{4})$，即就是占原有的$(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{3}{4})$，所以就可以求出原有的柴油重量：

$$12\div[(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{3}{4})]=80\text{（千克）}$$

解法 3 如果把第一次取用后剩下的油看作是单位“1”，那么，第二次取用后剩下的 12 千克油就

是第一次取用后剩下的$(1-\frac{3}{4})$，这样可以先求出第一次取用后剩下的柴油：$12\div(1-\frac{3}{4})$；然后再把桶里原来的柴油重量看作单位“1”，由于由于第一次取用了原有的$\frac{2}{5}$，那么剩下的就是原有的$(1-\frac{2}{5})$，这样就可以求出原有的柴油重量了。列出算式为：

$12\div(1-\frac{3}{4})\div(1-\frac{2}{5})=80$（千克）

（2）工程问题

在解答工程问题时，一般先要把整个工程（即工作总量）看作单位“1”，然后根据数量关系：“工作总量÷工作时间=工作效率”列出算式或方程来解答。

例： 一件工作，甲单独做要 24 天才能完成，乙单独做要用 6 天才能完成，甲、乙、丙三人合做，3 天就可以完成了。那么丙单独做需要几天才能完成？

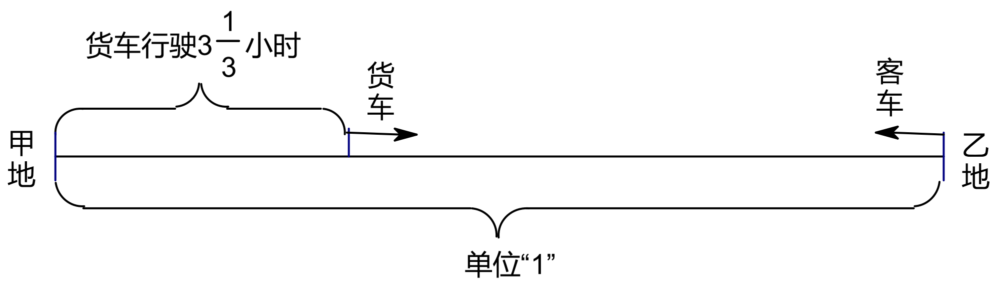
分析：把这件工作看作单位“1”，那么甲每天完成这件工作的$\frac{1}{24}$，乙每天完成这件工作的$\frac{1}{6}$，甲、乙、丙三人合做每天完成这件工作的$\frac{1}{3}$，因此丙每天完成这件工作的$(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}-\frac{1}{6})$，所以就可以求出丙单独做需要的天数。

$1\div(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}-\frac{1}{6})=8$（天）

答：丙单独做需要 8 天才能完成.

例： 货车从甲地开到乙地要用 8 小时，客车从乙地开到甲地要用 6 小时。货车从甲地开出$3\frac{1}{3}$小时后，客车从乙地相对开出，再过几小时两车相遇？

分析：由于题目内容是相遇问题，但甲、乙两地之间的公路路程没有具体给出，解题时要把它看作单位“1”，因此解题的特征就与“工程问题”类同。在解答过程中，数量关系要涉及相遇问题和工程问题的数量关系，通过解答也可以揭示相遇问题与工程问题数量关系的内在联系。



三、浓度问题

在题目内容中含有药水、盐水、酒精等，涉及它们的浓度及其计算的问题，叫做浓度问题。浓

度问题的数量关系是：

浓度＝溶质重量÷溶液重量×100%＝溶质重量÷（溶质重量＋溶剂重量）×100%

浓度问题实际就是百分数的应用问题。解决此类问题的关键就是寻找不变量。

例.实验室有一空水槽装有甲、乙、丙三根管子。已知甲管每秒钟流出浓度为20%的盐水4克；乙管每秒钟流出浓度为15%的盐水6克；乙管每秒钟流出清水10克。现在先同时打开甲、乙两管，18秒钟后再打开丙管，在甲、乙两管打开1分钟后把三根管子同时关上，这时水槽中的盐水的浓度是多少？

分析：先分别算出甲、乙两管打开1分钟后流入盐水的重量，接着算出含纯盐多少克；再算出溶液一共有多少克，就可以算出水槽中的盐水的浓度。

解：（1）甲管在1分钟里流出的盐水：4×60＝240（克）

含纯盐：240×20%＝48（克）

（2）乙管1分钟里流出的盐水：6×60＝360（克）

含纯盐：360×15%＝54（克）

（3）丙管在（60－18）秒里流出的水是：10×（60－18）＝420（克）

（4）水槽中的盐水的浓度是：

（48＋54）÷（240＋360＋420）×100%＝10%

答：这时水槽中盐水的浓度是10%。

例.有含盐量10%的盐水20千克，要使含盐量增加到20%，需要加盐多少千克？

分析：求需要加盐多少千克，可以看出：加盐的前后盐水的含水量不变。由于有含盐量10%的盐水20千克，就是含水量（1－10%）的盐水20千克，那么可以求出加盐以前盐水的含水量是多少千克；要使盐水的含水量为（1－20%），那么就能够求出含水量为（1－20%）的盐水是多少，从而就可以求出需要加盐多少千克。

解：20×（1－10%）÷（1－20%）－20＝22.5－20＝2.5（千克）

答：需要加盐2.5千克。

例：有两桶酒精溶液，第一桶浓度是20%，含的水比酒精多12千克；第二桶含酒精$13\frac{1}{8}$千克，含的水比酒精多$\frac{2}{7}$。若将这两桶酒精溶液混合，得到的酒精溶液的浓度是百分之几？

四、利润问题

商品利润问题公式：

1、利润＝售价－成本

2、利润率＝利润÷成本×100%

3、售价=成本×（1+利润率）

4、成本=卖价÷（1+利润率）

5、折扣＝实际售价÷原售价×100%(折扣＜1)

6、利息＝本金×利率×时间

7、税后利息＝本金×利率×时间×(1－20%)

例：一支钢笔进价是 8 元，售价是 10 元，利润是多少？利润率是多少？

例：某新款皮衣按 40%的利润定价，然后又按九五折出售，结果每件可或利润 330 元，这款皮衣每件的成本是多少元？

练习题：

1、 张明看一本故事书，每天看 30 页，3 天后还剩全书的 $\frac{5}{8}$ 没有看，这本故事书有多少页？

2、 王师傅计划做一批零件，第一天做了计划的 $\frac{4}{7}$，第二天又做了余下的 $\frac{3}{5}$，这时剩下 42 个零件，原计划做多少个零件？

3、 某小学学生中 $\frac{3}{8}$ 是男生，男生比女生少 328 人，该小学共有学生多少人？

4、甲、乙两人合买一筐西瓜，甲买了其中的 $\frac{2}{5}$ 还多 5.5 千克，乙正好了买了其中的一半，这筐西瓜共有多少千克？

5、一瓶油第一次吃了 $\frac{1}{5}$，第二次吃了余下的 $\frac{3}{4}$，这时瓶子还有 $\frac{1}{5}$ 千克，这瓶油共有多少千克？

6、小芳三天看完全书的 $\frac{1}{3}$，第二天看余下的 $\frac{3}{4}$，第二天比第一天多看了 20 页，这本书共有多少页？（转化单位 1：第二天看全书的几分之几）

7、运送一堆水泥，第一天运了这堆水泥的 $\frac{1}{4}$，第二天运的是第一天的 $\frac{2}{3}$，还剩 84 吨没有运，这堆水泥有多少吨？（转化单位 1：第二天运了这堆水泥的几分之几）？

8、水泥公司生产的水泥存放在两个仓库里面，第一仓库存水泥占总数 $\frac{14}{25}$，如果从第一仓库调 6 吨到第二仓库，那么这时两个仓库的水泥相等，这两个仓库共有多少水泥？

9、食堂有一批大米，用去总重量的 $\frac{2}{3}$ 后，又运进了 260 千克，现在存大米比原来还多 $\frac{1}{5}$，现在存大米多少千克？

10、新民小学男生比全校学生总数的 $\frac{4}{7}$ 少 25 人，女生比全校学生总数的 $\frac{4}{9}$ 多 15 人，求全校人数是多少人？

11、文具店运来的毛笔比钢笔多 1000 支，其中毛笔的 $\frac{3}{7}$ 与钢笔的 $\frac{1}{2}$ 支数相同，文具店共运来多少支笔？

12、一项工程，甲队单独做需要 10 天，乙队单独做需要 15 天，两队合做 3 天后，剩下的工程由甲队单独完成，还需要几天甲队才能完成？

13、一本小说，王亮看了 96 页，又看了余下的 $\frac{2}{3}$，这时没有看完的页数占总页数的 $\frac{1}{7}$。这本小说共有多少页？

14、一捆电线，第一次剪去全长的 $\frac{2}{5}$，第二次剪去 20 米，两次剪去的正好是全长的一半还少 10 米，这捆电线长多少米？

寻找不变的量：1、张庄小学六年级学生中女生占 $\frac{7}{12}$，后来又转来了 15 名女生，这样女生占六年级总人数的 $\frac{3}{5}$，六年级原来有多少名学生？

2、有一堆糖果是由奶糖和水果糖混合而成，其中奶糖占 $\frac{9}{20}$，再放入 16 块水果糖，奶糖就占 $\frac{1}{4}$，求这堆糖有奶糖多少块？

3、一杯盐水，盐占盐水的 $\frac{1}{5}$，再加入 16 克盐后，盐占盐水的 $\frac{1}{4}$，原来盐水有多少千克？

4、一杯盐水，盐占盐水的 $\frac{1}{5}$，现在把这杯盐水进行蒸发，蒸发了 20 克水后，盐占盐水的 $\frac{1}{4}$，原来盐和水各多少克？

5、甲的书的本数是乙的 $\frac{3}{4}$，甲给乙 6 本后，甲是乙的 $\frac{3}{5}$，甲原来有多少本？

6、有一桶油，第一次取出了 12 千克，第二次取出了剩下的 $\frac{1}{5}$，这时正好取了总数的一半，第二次取出了多少千克？

7、兄弟四人合修一条路，结果老大修了另外三人总数的一半，老二修了另外三人总数的 $\frac{1}{3}$，老三修

了另外总数的 $\frac{1}{4}$，老四修了 91 千米，这条路有多少米？

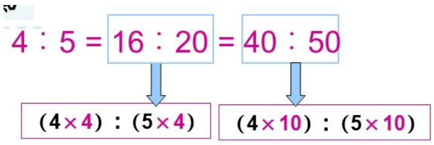
第五节　比和比例问题

比是对整数除法以及分数的引申、扩展，它与除数除法、分数有着密切的联系。小学数学中的一些数量关系，有可能通过比和比例反映出来。只要抓住比与除法、分数的关系，就可以理解数量之间的关系，从比和比例的角度分析和解决一些小学数学问题。

一、基本定义

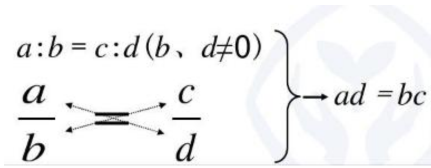
1.比：两个数相除有叫做两个数的比，记作 a:b。即，$a:b=\frac{a}{b}$。

2.比的基本性质：比的前项和后项同时乘以或除以相同的数（0 除外），比值不变。



3.两个比相等的式子叫做比例，记作 a:b=c:d.

4.比例的基本性质：比例的内项之积等于外项之积。



1. 正比例：若 $a:b=k$(商一定)，则 a 与 b 成正比例。

2. 反比例：若 $ab=k$(积一定)，则 a 与 b 成反比例。

二、比和比例的应用

例： 一块长方形菜地，长宽的比是 3∶2，周长是 600 米，这块菜地的面积是多少？

分析：由于长宽的比是 3∶2，所以可以把长、宽分别看作这样的 3 份和 2 份，这样长方形的周长就是这样的（3×2＋2×2）=10 份。先求出一份是多少，就可以求出长方形的长和宽，长方形的面积也就可以求出了。

解：600÷（3×2＋2×2 ）=600÷10=60（米）

长方形的长和宽分别是：60×3=180（米）和 60×2=120（米）

长方形的面积是：180×120=21600（平方米）

答：这块菜地的面积是 21600 平方米。

例： 加工一个零件，甲、乙、丙 3 个工人所需要的时间的比是 4∶5∶8，现有 9200 个零件需要加工，如果甲、乙、丙 3 个工人用同样的时间加工，各自应该加工多少个零件？

分析：由于加工一个零件，甲、乙、丙 3 个工人所需要的时间的比是 4∶5∶8，因此可以求出 3 个工人加工零件的工作效率的比，把 9200 个零件的加工任务，按工作效率进行分配，就能分别求出他们各自需要加工的零件数。

解：甲、乙、丙 3 个工人的工作效率比是：$\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{8}=10:8:5$

甲、乙、丙 3 个工人分别加工零件：

$9200\times\frac{10}{10+8+5}=9200\times\frac{10}{23}=4000$ （个）

$9200\times\frac{8}{10+8+5}=9200\times\frac{8}{23}=3200$ （个）

$9200\times\frac{5}{10+8+5}=9200\times\frac{5}{23}=2000$ （个）

答：甲应加工零件 4000 个，乙应加工零件 3200 个，丙应加工零件 2000 个.

例：甲、乙、丙三个建筑队共有水泥 236 吨，甲、乙两队拥有的水泥重量比为 3:4，乙、丙两队拥有的水泥重量比为 5:6，三个队各有水泥多少吨？

三、用正比例与反比例解题

掌握正比例、反比例的意义，熟练判断两种相关联的量之间的关系，是解答有关比例问题的关键。解题时要特别注意题目中某一数量是否为定值，然后再判断是成正比例还是反比例。

例： 甲、乙两个玻璃瓶，装有酒精共 520 毫升。如果把甲瓶酒精的$\frac{1}{8}$倒入乙瓶，甲、乙两瓶的酒精的比是 7∶6。甲、乙两瓶原来的酒精各自是多少毫升？

分析：由于两瓶里的酒精总量不变，可以根据“如果把甲瓶酒精的$\frac{1}{8}$倒入乙瓶，甲、乙两瓶的酒精的比是 7∶6”的条件，先求出后来甲瓶的酒精量，再求出两瓶原来的酒精各自是多少毫升。

解：（1）把甲瓶酒精的$\frac{1}{8}$倒入乙瓶后，甲瓶有多少毫升酒精？

520÷（7＋6）×7＝40×7＝280（毫升）

（2）甲瓶原来有多少毫升酒精？

$$280\div(1-\frac{1}{8})=280\div\frac{7}{8}=280\times\frac{8}{7}=320$$ （毫升）

（3）乙瓶原来有多少毫升酒精？

520－320=200（毫升）

答：甲瓶原来有 320 毫升酒精，乙瓶原来有 200 毫升酒精。

例： 一辆汽车从甲地出发开往乙地，如果把行驶速度提高 20%，那么就可以比原计划提前 1 小时到达目的地；如果仍然以原速行驶 120 千米后，再将速度提高 25%，那么可以提前 40 分钟到达目的地。甲、乙两地之间的路程是多少千米？

分析与解：根据题目的条件，如果把行驶速度提高 20%，那么原来与现在行驶速度的比是：

1∶(1＋20%)=5∶6；

在路程一定的情况下，速度与时间成反比，那么原来与现在行驶时间的比是 6∶5，由于原来行驶时间比现在多用了 1 小时，所以原计划行驶全程所用的时间是：

1÷（6－5）×5=6（小时）

如果把速度提高 25%，那么原来与现在的行驶速度比是：

1∶（1＋25%）=4∶5

同样，在除了 120 千米的路程以外的路程中原来与现在的行驶时间的比是 5∶4，而已知与原计划行驶的时间相比，现在少用了 40 分钟，所以原来行驶 120 千米的路程所用的时间是：

$$6-\frac{40}{60}\div(5-4)\times 5=6-\frac{10}{3}=2\frac{2}{3}$$（小时）

甲、乙两地之间的路程是：

$$120\div 2\frac{2}{3}\times 6=270$$（千米）

答：甲、乙两地之间的路程是 270 千米。

例： 甲、乙两人各加工 100 个零件，甲比乙迟 $\frac{5}{2}$ 小时开工，结果同时结束。已知甲、乙两人的工作效率比是 5:2，则甲每小时加工多少个零件？

复习思考题、作业题：
思考题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　　周	课　次	第 24-27 次
章　节 名　称	**第五章　图形与几何**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	8
教　学 目　的 要　求	了解线、角、长度、周长、面积、表面积、体积（容积）等概念，掌握课标要求的几何计算公式；能根据学习的周长、面积、表面积、体积公式进行相关计算，并结合所学的代数知识解决一些实际问题。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：能根据学习的周长、面积、表面积、体积公式进行相关计算，并结合所学的代数知识解决一些实际问题 难点：求平面图形阴影部分的面积。		

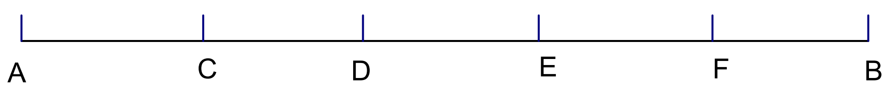
教学步骤及内容：

第一节　线、角和长度

几何图形一般指点、线、面、体及其它们的组合。几何图形又可以分为平面图形和空间图形。这里主要研究平面图形的个数问题。

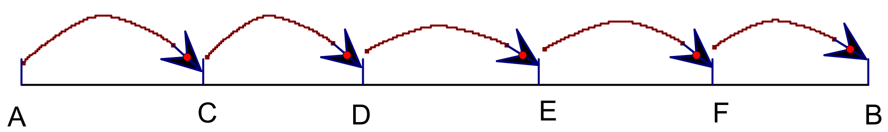
由于平面图形变化复杂，要准确计算出一个平面组合图形中包含多少个简单图形，关键是解决计算中不重复、不遗漏的问题，并且能够根据简单图形的特征进行辨认，按照一定的解题思路和方法进行计算，同时揭示在解答这一类问题中的规律性。

例：　在下面的线段 AB 上，包括端点共有 6 个点，数一数，在线段 AB 上可以找到多少条线段？

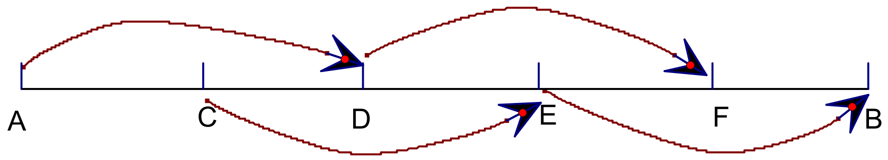


分析与解：我们把中间没有点的线段叫做基本线段，中间至少有一点的线段叫做复合线段。采用“以基本线段组成其它线段的方法”进行思考：这样就可以考虑基本线段、含有两条基本线段的线段、含有三条基本线段的线段、含有四条基本线段的线段、含有五条基本线段的线段的数量。

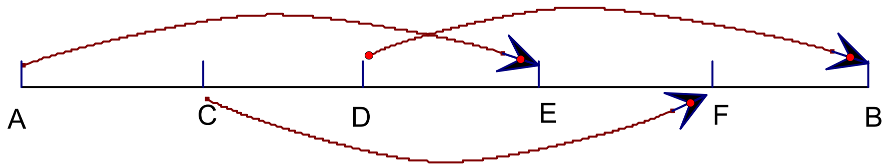
（1）基本线段有 5 条：AC、CD、DE、EF、FB



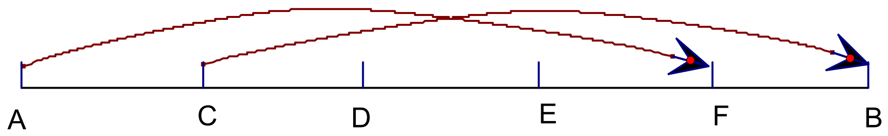
（2）由两条基本线段组成的线段有 4 条：AD、CE、DF、EB



（3）又 3 条基本线段组成的线段有 3 条：AE、CF、DB



（4）由 4 条基本线段组成的线段有 2 条：AF、CB

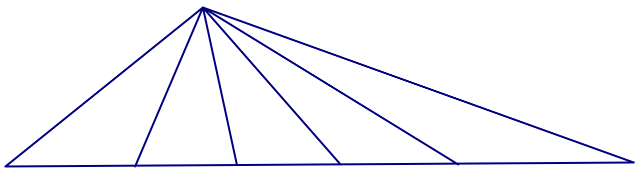


（5）由 5 条基本线段组成的线段只有一条，就是 AB。

所以，在线段 AB 上一共有 5＋4＋3＋2＋1＝15（条）

答：在线段 AB 上可以找到 15 条线段。

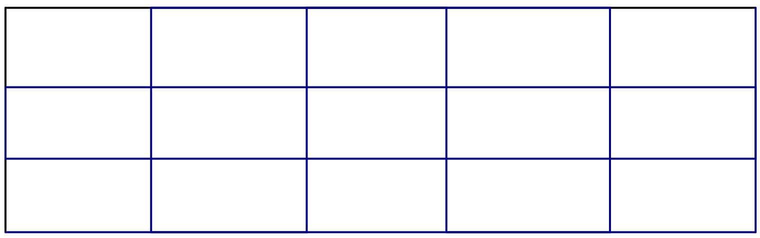
例：数一数下面图形中有多少个三角形？



分析与解：我们把每条边上不含其它点的三角形叫做基本三角形，至少一条边上含有其它点的三角形叫做复合三角形。跟上题类似，采用“以基本三角形组成其它三角形的方法”进行思考。这道题是在上题的直线 AB 的基础上，利用直线外一点来产生三角形，因此可以利用上题的结论，这样图中的三角形一共有 5＋4＋3＋2＋1＝15（个）。

答：下面图形中有 15 个三角形.

例：下面的图形中有多少个长方形？



分析：从长方形的特征来考虑，图形中各顶点处的角都是直角，因此只要选取一组长和一组宽，就可以得到一个长方形。长方形长的取法就是大长方形长边上线段的条数，宽取法就是大长方形宽

边上线段的条数。用乘法就能求出有多少个长方形。

解：（1）在大长方形长边上有多少条线段？

5＋4＋3＋2＋1＝15（条）

（2）在大长方形宽边上有多少条线段？

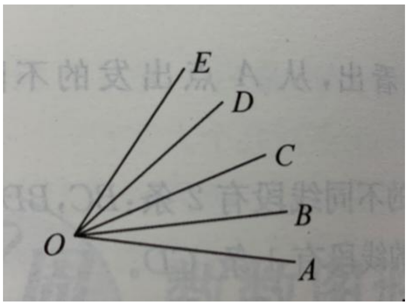
3＋2＋1＝6（条）

（3）有多少个长方形？

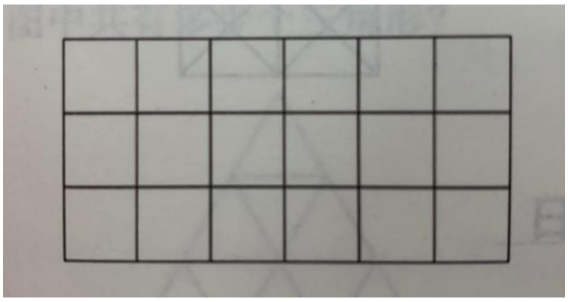
15×6=80（个）

答：有 80 个长方形。

例：下图一共有多少个锐角？



例：下面图形中有多少个正方形？

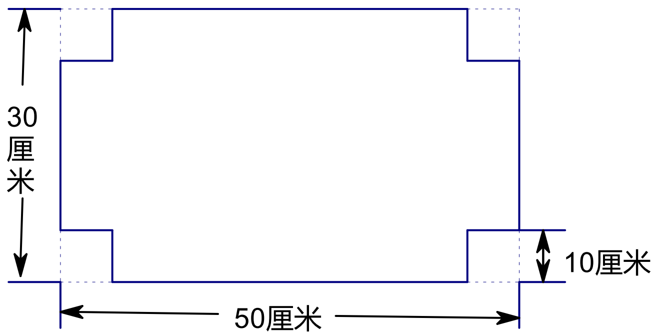


第二节　平面图形的周长与面积

一、平面图形的周长

一个平面图形的周长就是这个图形边界的总长。在具体求平面图形的周长时，要分清应该计算哪些边的长度的总和。

例 1. 一张长方形硬纸，长 50 厘米，宽 30 厘米。把它的四个角各剪去边长是 10 厘米的小正方形，如下图所示。剪成的图形的周长是多少厘米？



分析与解：要求剪成的图形的周长，就是求围成这个图形所有边长度的总和。从图可以看出，这个图形的边（线段）有 12 条。有 2 条边的长都是（50－10×2）厘米，有 2 条边是长都是（30－10×2）厘米，有 8 条边的长都是 10 厘米。因此可以求出这个图形的周长是多少厘米。

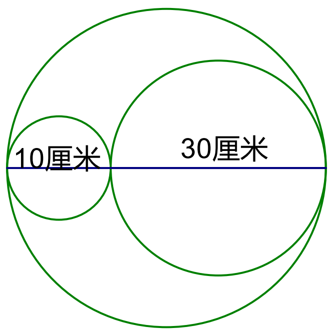
（50－10×2）×2＋（30－10×2）×2＋10×8＝60＋20＋80＝160（厘米）

也可以这样思考：由于把这张长方形硬纸的四个角，各剪去边长是 10 厘米的小正方形，这个小正方形的各边的长是相等的，通过观察可以看出，用剪去后所形成的 2 条边去代替剪去以前的部分，剪成的图形的周长就是原长方形的周长。

（50＋30）×2＝80×2＝160（厘米）

答：剪成的图形的周长是 160 厘米。

例 2. 如下图所示，在大圆里面有两个小圆，大圆的直径是 40 厘米，两个小圆的直径分别是 10 厘米、30 厘米。大圆的周长与里面两个小圆的周长和相比较，有什么结果？



分析：要比较大圆的周长与它里面两个小圆周长的和，就要分别求出三个圆的周长，经过计算和比较，就可以得出结果。

解：（1）大圆的周长是多少厘米？

3.14×40＝125.6（厘米）

（2）两个小圆的周长的和是多少厘米？

3.14×10＋3.14×30＝3.14×（10＋30）＝3.14×40＝125.6（厘米）

通过计算，可以知道大圆的周长与里面两个小圆的周长和相等。

答：大圆的周长与里面两个小圆的周长和相比较，结果是：大圆的周长与里面两个小圆的周长

的和相等。

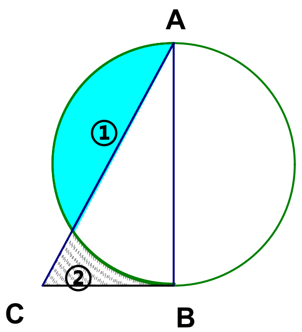
在这个数学问题中，已知大圆的直径等于两小圆直径的和，从这个条件可以确定这三个圆特殊的位置关系：三个圆的圆心在同一条直线上，两个小圆外切并且内切于大圆之中。在小学数学中，从题目的图示或圆的直径关系就可以说明三个圆特殊的位置关系。

二、平面图形的面积

平面图形的大小就是它的面积。我们主要在常见的平面图形，如长方形、正方形、平行四边形、三角形、梯形和圆的面积计算的基础上，简单研究一些组合图形面积的计算问题。在具体求平面组合图形的面积时，要分清楚应该把组合图形分解成哪些简单图形，怎样通过这些简单图形面积的计算求出组合图形的面积。

例 1. 如下图形所示，三角形 ABC 是直角三角形，直角边 AB 是半圆的直径，并且 AB 的长是 20 厘米。如果半圆与三角形相交所形成的区域①的面积比阴影部分②的面积多 7 平方厘米，那么三角形 ABC 的直角边 BC 长多少厘米？

分析：要求三角形 ABC 的直角边 BC 的长，就必须先求出三角形 ABC 的面积。由于区域①的面积比阴影部分②的面积多 7 平方厘米，也就是半圆的面积比三角形 ABC 的面积多 7 平方厘米；而半圆的面积可以求出来，因此可以求出三角形 ABC 的面积。



解：（1）半圆的面积是多少平方厘米？

3.14×(20÷2) (20÷2)÷2＝3.14×100÷2＝157（平方厘米）

（2）三角形 ABC 的面积是多少平方厘米？

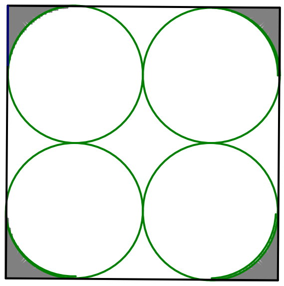
157－7＝150（平方厘米）

（3）三角形 ABC 的直角边 BC 长多少厘米？

150×2÷20＝15（厘米）

答：三角形 ABC 的直角边 BC 长 15 厘米。

例 2. 求下面图形中阴影部分的面积。



40厘米

分析：从图形知道，大正方形的边长是 40 厘米，图形中间小正方形的边长是：40÷2＝20（厘米），每一个圆的半径是：40÷2÷2＝10（厘米）。仔细观察图形，可以看出，阴影部分的面积等于大正方形的面积减去中间小正方形的面积、再减去 4 个四分之三的小圆面积。

解：（1）大正方形是面积是多少平方厘米？

40×40＝1600（平方厘米）

（2）小正方形的面积是多少平方厘米？

20×20＝400（平方厘米）

（3）4 个四分之三小圆面积的和是多少平方厘米？

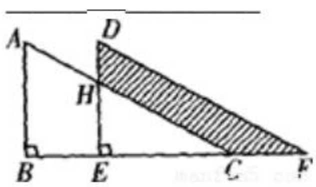
3.14×(40÷2÷2) (40÷2÷2) ×3÷4×4＝3.14×100 ×3＝942（平方厘米）

（4）阴影部分的面积是多少平方厘米？

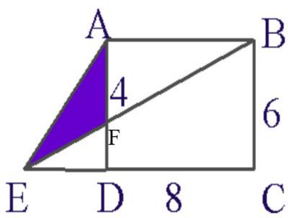
1600－400－942＝258（平方厘米）

答：阴影部分的面积是 258 平方厘米。

例：如图所示，两个完全相同的直角三角形，已知 $AB=8cm, DH=3cm, BE=5cm$，求阴影部分的面积。



例：如图，ABCD 是长为 8，宽为 6 的长方形，AF 为 4，求阴影部分 ΔAEF 的面积。



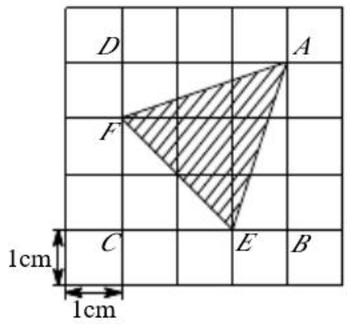
三、毕克定理：

正方形格点：面积=内部格点数+边界格点数÷2-1，

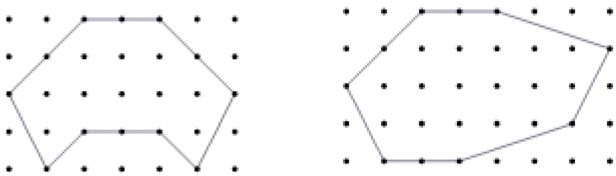
如果用 S 表示面积，a 表示内部的格点数，b 表示边界上的格点数，我们也可以把公式用字母表

示为 S=a+b÷2-1

例：计算阴影部分的面积



例题：求下图两个多边形的面积分别是多少？



（1）　　　　　　（2）

解：图（1）中多边形的顶点都在格点上，是格点多边形。

内部有 10 个格点，N=10

边界上有 12 个格点，L=12

S=10+12÷2-1=15（单位面积）

图（2）内部有 16 个格点，N=16

边界上有 10 个格点，L=10

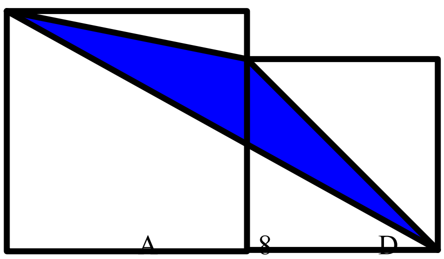
S=16+10÷2-1=20（单位面积）

四、巩固练习

1、已知正方形甲的边长为 5 厘米，正方形乙的边长为 4 厘米，求图中阴影部分的面积。

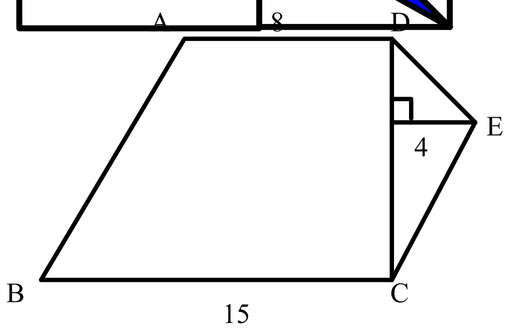
分析：

用两个正方形的面积之和减去三个三角形的面积。



解：阴影部分面积是 8 平方厘米。

2、直角梯形 ABCD 和三角形 CDE 组成的多边形面积是 135 平方厘米，求三角形的面积（单位：cm）。（如图）



分析：设 DC 长为 xcm。根据题义可列方程求出长度，在用三角形面积公式求出面积。

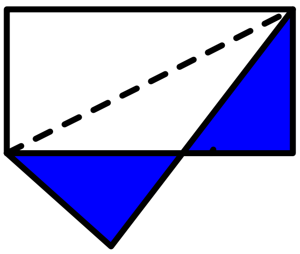
解：（8+15）×x÷2+4×x÷2=135

11．5 x+2 x =135

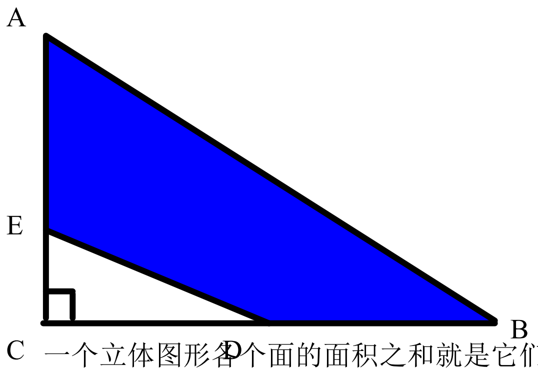
x =10

三角形面积：10×4÷2=20（平方厘米）

3、长方形长为 4 厘米，宽为 2 厘米，沿对角线 BD 对折得到一个几何图形，求图形阴影部分的周长。



4、已知三角形 ABC 中，角 C 是直角，且面积为 12 平方厘米，AE=2CE，BD=CD，求四边形 ABDE 的面积。（提示：连接 AD）



第三节　立体图形的表面积与体积

一、立体图形的表面积

一个立体图形各个面的面积之和就是它们的表面积。如，长方体的表面积就是它的六个面的面积的和。在具体求立体图形的表面积时，要根据实际情况分清应该计算哪些面的面积的和，如，计算一个无盖的水桶的表面积，只需要计算它的侧面积和一个底面积的和，等等。解答立体图形表面积的计算问题，要充分发挥空间想象力，抓住问题的关键进行思考，认真寻找解题方法。

	表面积	体积
正方体（棱长为 *a*）	$6a^2$	a^3
长方体（边长 *a*、*b*、*c*）	2（ab+bc+ca）	abc
圆柱体（底面半径 *r*，高 *h*）	$2\pi r^2+2\pi r\cdot h$	$\pi r^2\cdot h$
圆锥体（底面半径 *r*，高 *h*）	$\pi r^2+\pi r\cdot l$	$\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$

例 1. 把一个棱长是 4 厘米的正方体切割成 8 个相等的小正方体。这些小正方体的表面积比原来正方体的表面积多多少平方厘米？

分析 1：如果按一般的思路解答，先求出这些小正方体的表面积的和，再减去原来正方体的表面积，就可以求出多的表面积。

解法 1：2×2×6×8－4×4×6＝192－96＝96（平方厘米）

分析 2：可以想象：要把一个棱长是 4 厘米的正方体切割成 8 个相等的小正方体，就是沿着正方体的长、宽、高的方向各切了一刀，切割 3 刀就增加了 6 个正方形的面，其面积就是比原来正方体的表面积多出的面积。

解法 2：4×4×6＝96（平方厘米）

答：这些小正方体的表面积比原来正方体的表面积多 96 平方厘米。

显然，用第二种解法所反映出来的空间想象力就要高一些，不必先求 8 个小正方体的表面积和原来正方体的表面积，只要想象出由于切割了 3 刀，就应该新增加 6 个正方形的面积就可以。

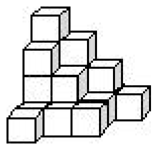
例 2. 小圆柱的表面积是 80 平方厘米，其中底面积是 18 平方厘米。如果把 2 个这样的小圆柱拼成一个大圆柱，这个大圆柱的表面积是多少平方厘米？

分析：根据题意，把 2 个相同的小圆柱拼成一个大圆柱，原来 2 个小圆柱的表面积就减少了 2 个底面积。

解：80×2－18×2＝160－36＝124(平方厘米)

答：这个大圆柱的表面积是 124 平方厘米。

例 3.把 20 个边长是 1 厘米的正方体摆放成一个立体图形，如下图所示。这个立体图形的表面积是多少厘米？



分析与解：要求这个立体图形的表面积，就要从 20 个正方形的表面积的和中减去正方形之间重叠部分的面积。

这个立体图形是由 20 个边长是 1 厘米的正方体摆放成的，20 个正方体的表面积是：

1×1×6×20（平方厘米）。

重叠部分的面的个数我们用分类的方法去找出来。通过观察，上下相重叠的面有

(5＋3＋1)×2＝18（个）；

左右相重叠的面有

(7＋3＋1)×2＝22（个）；

前后相重叠的面有

(7＋2＋1)×2＝20（个）。

全部重叠的面有：

18＋22＋20＝60（个），

因此重叠部分的面积就是：1×1×60（平方厘米）。

所以，这个立体图形的表面积是：

1×1×6×20－1×1×60＝120－60＝60（平方厘米）

答：这个立体图形的表面积是 60 平方厘米。

二、立体图形的体积

一个立体图形所占有空间的大小就是它们的体积。通常把物体所占有的空间的大小叫做物体的体积，而把容器所能容纳的物体的体积叫做容器的容量（或容积）。解答有关立体图形体积的计算问题一般要求比较简单，可以直接应用公式进行计算就可以。在这里，我们主要对一些变化条件的问题进行研究，解答这些问题时也要注意空间想象能力的培养和训练。

例 1. 把一块长 20 厘米、宽 20 厘米、高 24 厘米的长方体木料，削成一个最大的圆柱。这个圆柱的体积是多少立方厘米？

分析：要削成一个最大的圆柱，就要考虑削成的圆柱体的底面、高最大，或者是削去的部分应该是最少的。从题中的已知条件可以看出，如果把长 20 厘米、宽 20 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面直径就是 20 厘米，而圆柱的高就是 24 厘米；如果把宽 20 厘米（或长 20 厘米）、高 24 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面直径就是 20 厘米，而圆柱的高是 20 厘米。通过比较知道，前一种方法削成的圆柱的体积最大。

解：（1）以长 20 厘米、宽 20 厘米的这个面作为圆柱的底面去削，圆柱的底面半径是多少厘米？

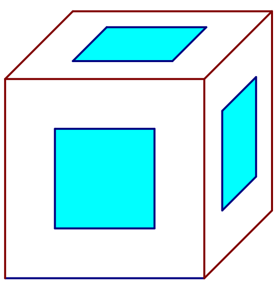
20÷2＝10（厘米）

（2）圆柱体的体积是多少立方厘米？

3.14×10×10×24＝7536（立方厘米）

答：这个圆柱的体积是 7536 立方厘米。

例 2. 一个正方体木块，棱长是 4 厘米。在这块正方体木块的前后、左右、上下各面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体后，制作成一个玩具，如下图所示。这个玩具的表面积是多少平方厘米？体积是多少立方厘米？



分析与解：由于在这块正方体木块的前后、左右、上下各面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，并且按前后、左右、上下去看：2＋2＝4（厘米），这块正方体从三个方向上都被挖穿了。在求其表面积与体积时关键是要有顺序地去想象、思考，确定要计算哪些面积、体积，要做到不重复、不遗漏。

（1）这个玩具的表面积是多少平方厘米？

①先考虑把这个正方体按上下两个面的方向，在上下两面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，合起来就是一个长方体。这个长方体的底面是边长为 2 厘米的正方形，高是 2＋2＝4（厘米）。正方体挖去一个长方体后的立体图形的表面积：正方体的表面积加上长方体的侧面积，再减去上下两个面上被挖去的正方形（边长是 2 厘米）。

4×4×6＋2×4×4－2×2×2＝96＋32－8＝120（平方厘米）

②正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后，我们再这样思考：在这个正方体的前面开始，在中心位置沿前后方向再挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形、高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体。此时，在正方体的前面已与挖去的长方体连通。需要增加这个小长方体的侧面积，2×4×1（平方厘米），但是要减去这个小长方体的两个底面积（其中一个是正方体前面被挖去的面；另一个是与小长方体相接的面，）2×2×2（平方厘米）。由此类推，正方体的后面、左面、右面也是按同样的方法去挖，都挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形，高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体。所以，在正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后的表面积中，再增加 4 个小长方体的侧面积，减少 4 个小长方体两个底面积，就能求出这个玩具的表面积。

120＋2×4×1×4－2×2×2×4＝120＋32－32＝120（平方厘米）

（2）这个玩具的体积是多少立方厘米?

①先考虑把这个正方体按上下两个面的方向，在上下两面的中心位置各挖去一个棱长是 2 厘米的小正方体，合起来就是一个长方体。这个长方体的底面是边长为 2 厘米的正方形，高是 2＋2＝4（厘米）。正方体挖去一个长方体后的立体图形的体积是：

4×4×4－2×2×4＝64－16＝48（立方厘米）

②正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后，我们再这样思考：在这个正方体的前面开始，在中心位置沿前后方向再挖去一个底面是边长为 2 厘米的正方形、高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体，体积是 2×2×1（立方厘米）。由此类推，正方体的后面、左面、右面也是按同样的方法去挖，都挖去一个底面为边长 2 厘米的正方形，高为（4－2）÷2＝1（厘米）的小长方体。所以，在正方体按上下两个面的方向挖去一个长方体后的体积中，再减少 4 个小长方体的体积就是这个玩具的体积。

48－2×2×1×4＝32（立方厘米）

答：这个玩具的表面积是 120 平方厘米，体积是 32 立方厘米。

例：有两个完全相同的长方体恰好拼成了一个正方体，正方体的表面积是 30 平方厘米。

练习：

1. 一个圆柱体和它等底的圆锥体的体积相等，圆锥体的高是 12 厘米，圆柱体的高是（4）厘米？

2. 把一个棱长 3 分米的正方体切削成一个最大的圆锥体，它的体积是（7.065）立方分米。

3. 把 3 个棱长是 4 厘米的正方体木块粘合成一个长方体，这个长方体的体积是(192)立方厘米,表面积比原来的 3 个小正方体表面积和减少(64)平方厘米。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第　　周	课　次	第 28-31 次		
章　节 名　称	**第六章 初等数论**				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	8
教　学 目　的 要　求	理解整数整除、数的整除特征、公因数、公倍数、奇数和偶数的概念及相关性质；理解质因数分解定理，掌握一些初等数论题的解题思路及方法；能将整除性质及整除特征知识进行合理的运用及拓展。				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：掌握数的整除特征；理解奇数和偶数的概念及性质；理解质数和合数的概念；会求最大公因数和最小公倍数；能将整除性质及整除特征知识进行合理的运用及拓展。 难点：能将整除性质及整除特征知识进行合理的运用及拓展。				

教学步骤及内容：

第一节 数的整除性

一、整除性特征

要判断一个整数能否被另一个整数（不为零）整除，在小学数学解题过程中更多地是应用能被一个数整除的特征来判断并进行解答。

在小学数学中常用的整除性特征有以下几种：

（1）能被 2 或 5 整除的整数特征是：这个数的末位数能被 2 或 5 整除；

（2）能被 3 或 9 整除的整数特征是：这个数的各位数字之和能被 3 或 9 整除；

（3）能被 11 整除的整数特征是：这个数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差（或反之）能被 11 整除；

（4）能被 7、11 或 13 整除的 4 位数以上的整数特征是：这个数的末尾 3 位数与去掉末尾三个数字后得到的整数的差（或反之）能被 7、11 或 13 整除。

（5）能被 4 整除的整数特征是：这个数的末两位数能被 4 整除；

（6）能被 6 整除的整数特征是：这个数是能被 3 整除的偶数；

（7）能被 8 整除的整数特征是：这个数的末三位数能被 8 整除；

（8）能被 25 整除的整数特征是：这个数的末两位数能被 25 整除；

例 1 六位数□2006□能被 12 整除，这样的六位数一共有多少个？并写出这些数。

分析：由于 12=3×4，并且（3，4）=1，因此要求的六位数只有在既能被 3 整除又能被 4 整除时，才能被 12 整除。所以，我们先考虑这个六位数的末两位数能被 4 整除，以此确定末位数字有哪些，再考虑被 3 整除来确定首位数字。

分析与解：□2006□能被 4 整除，末两位 6□必须能被 4 整除，这样的两位数只有 60、64、68，即个位数只能是 0、4、8；

当个位数取 0、4、8 时，这个六位数的数字之和为□＋8、□＋12、□＋16，所以首位数字是相应为 1、4、7，3、6、9，2、5、8。所以这样的六位数一个有 9 个，它们是：

120060、420060、720060、320064、620064、920064、220068、520068、820068.

例 2 一个 41 位的整数：$\underbrace{55\cdots5}_{20}\Delta\underbrace{99\cdots9}_{20}$ 能被 7 整除，这个中间三角形所表示的数字是几？

分析与解：由于 7 整除 111111，因此 7 能整除 555555 和 999999. 根据 10 进制数的组成规律可得：

$$\underbrace{55\cdots5}_{20}\Delta\underbrace{99\cdots9}_{20}=555555\times10^{35}+555555\times10^{29}+555555\times10^{23}$$

$$+55\Delta99\times10^{18}+999999\times10^{12}+999999\times10^{6}+999999$$

因为 $\underbrace{55\cdots5}_{20}\Delta\underbrace{99\cdots9}_{20}$ 能被 7 整除，所以 55Δ99 能被 7 整除。又由于 55Δ99 的末三位是Δ99，末三位前面的数是 55，它们的差是Δ44。要使Δ44 能被 7 整除，可以通过试算法得到三角形表示的数是 6.

答，这个 41 位数的中间个数字是 6.

二、余数问题

在整数范围内，对于任意两个整数的除法（除数不为零），有时找不到整数商，也就是说除了整除概念以外，还有带余数的除法：被除数＝除数×商数＋余数，并且余数小于除数。当余数不为零时，商叫做不完全商。在带余数的除法中整除的性质有下面两条。

性质 1. 在带余数的除法里，如果被除数和除数能被同一个整数整除，那么余数也能被这个整数整除。即：如果 a÷b＝q（余 r），并且 d│a，d│b，那么 d│r。

性质 2. 在带余数的除法里，如果除数和余数能被同一个整数整除，那么被除数也能被这个整数整除。即：如果 a÷b＝q（余 r），并且 d│a，d│r，那么 d│b。

我们在日常生活中，经常会遇到有关余数的问题。如“2007 年 3 月 8 日是星期四，3 月 29 日是星期几？”由于每星期是 7 天，8÷7＝1……1，29÷7＝4……1，8 与 29 除以 7 的余数相同，就说明这两天同是星期几；8 日是星期四，29 日也是星期四。

（1）同余的概念

在数学中我们说 8 与 29 对于模 7 同余，就是指两个数 8 与 29，除以 7 所得的余数相同，记为：8≡29（mod 7），

我们给出同余的一般概念：两个整数 a 和 b，除以一个大于 1 的自然数 m 所得的余数相同，就称 a 和 b 对于模 m 同余，记为：a≡b（mod m）。

注意，有时为了简单不引起混淆时，也可以称作 a 与 b 同余，只是没有把模 m 读出来。

在小学数学中，按能否被 2 整除可以把自然数分为两类：偶数，奇数。容易看到，所有的偶数是在模 2 下彼此同余，所有的奇数在模 2 下彼此同余。也就是说，用模 2 把自然数分成两类，一类能被 2 整除（余数是零），另一类被 2 除余数是 1。

偶数： 0、2、4、6、8、……，2k、……

奇数： 1、3、5、7、9、……，2k+1、……

如果用模 3 来将自然数分类，由于余数有 0、1、2 共三种，因而可分为四类：

余数是 0 的数：0、3、6、9、112、……

余数是 1 的数：1、4、7、10、……

余数是 2 的数：2、5、8、11……

同一行的两个数，被 3 除的余数相同，也就是说在模 3 下同余，如：7≡10(mod 3)， 3≡12(mod3)，2≡11(mod3)，等等。为了讨论问题简单，用模 3 来将自然数分类，按余数的情况分为四类：[0]、[1]、[2]，叫做模 3 的剩余类。如“[2]”表示除以 3 余数是 2 的所有的自然数的集合。

如果把一年的 365 天（或 366 天）按星期日，星期一，星期二……星期六分为七类，那么对于每月的 1 日、8 日、15 日、22 日、28 日来说，1 日是星期几，其它各日期也就是星期几。

（2）同余的性质

下面我们简单介绍一些同余的性质，这些知识的学习对于探索小学数学解题方法有指导作用。

性质 1.（自反性）a≡a(mod m)。

性质 2.（对称性）如果 a≡b(mod m), 那么 b≡a(mod m)。

性质 3.（传递性）如果 a≡b(mod m),b≡c(mod m), 那么 a≡c(mod m)。

性质 4. 如果 a≡b (mod m)，c≡d (mod m)，那么

①（可加性）a＋c≡b＋d (mod m)；

②（可减性）a－c≡b－c (mod m)；

③（可乘性）ac≡bc (mod m)。

性质 5.（可乘方性）如果 a≡b(mod m)，m 为自然数，那么 $a^m≡b^m$ (mod m)。

以上各条性质与等式的性质十分相似，学习时要注意用类比的方法进行理解。但是要把同余与等式的概念货物性质加以区别，不能把等式与同余式混淆。这些性质的证明留给读者。

例 1. 求 325×415×2007 除以 7 除所得的余数。

分析：如果先计算出 325×415×2007 积以后，再用 7 去除，是可以求得余数的，但是比较麻烦。可以把 325，415，2007 分别被 7 除求出余数，再用同余式性质将余数相乘即可容易得出原数被除的余数。

解：由于：$325\equiv3 \pmod 7$，$415\equiv2 \pmod 7$，$2007\equiv5 \pmod 7$，利用同余式的可乘性，将三式相乘得：

$325\times415\times2007\equiv3\times2\times5 \pmod 7 \equiv30 \pmod 7 \equiv2 \pmod 7$

答：325×415×2007 除以 7 所得的余数是 2。

例 2. 有 70 个数排成一列，除了两端的两个数以外，每个数的 3 倍恰好等于它两边两个数的和，这一列数最左边的几个数是这样的：0、1、3、8、21、55、144、……，这一列数最右边的数除以 6 所得的余数是多少？（《小学迎春杯数学竞赛指导讲座》下册，第 6 页。表述方式有改动）

分析与解：如果将这 70 个数都写出，再用 6 去除最右边的数是可以的，但工作量相当大。问题中并没有要求算出最右边的那个数，只要求这个数除以 6 所得的余数是多少。

根据这 70 个数的排列规律："中间的一个数的 3 倍是它两边的数的和（两端的两个除外）"以及同余的性质，在模 6 的条件下，中间那个数的余数的 3 倍与两边两个数的余数和再除以 6 所得的余数应该相同。因此，在模 6 下，这一列数：0，1，3，8，21，55、144、……，除以 6 所得的余数也组成一列数： 0、1、3、2、3、1、0、……

再观察这列数，又可以看出它的排列规律：中间的数的 3 倍与两边两个数的和在模 6 下同余。因此，多写出几个数，进一步观察这列数的特点。

0、1、3、2、3、1、0、5、3、4、3、5、0、1、3、2、3、……

可以看出前 12 个数为一组，一组一组的重复出现。

由于 70 个数里包含完整的 5 组，一共 60 个数，因此第 70 个数是第 6 组中的第 10 个数，这个数就是 4，那么，这个数就是原来数列中最右边的数除以 6 所得的余数。

答：这一列数最右边的数除以 6 所得的余数是 4。

例 3 一个奇数去除 288 和 510 所得的余数都是 29，这个奇数是多少？

分析：由于"被除数－余数=除数×商"，因此（288－29）和（510－29）都是除数（要求的数）的倍数，因而也就是求（288－29）和（510－29）的公约数。

288－29=259 510－29=481

481÷259=1……222 259÷222=1……37 222÷37=6

所以（288－29）和（510－29）的最大公约数是 37，并且是一个质数（奇数）。

答：这个奇数是 37.

例 4 有 1000 个 1 组成一个千位数，这个千位数除以 3，余数是多少？

分析与解：从 1 位数开始寻找规律：

1÷3=0……1

11÷3=3……2

111÷3=37……0

1111÷3=370……1

11111÷3=3703……2

111111÷3=37037……0

1111111÷3=370370……1

……………………

余数规律是1、2、0、1、2、0、……，因此按“位数”除以3求出余数，就可以求出这个千位数除以3得到的余数：1000÷3=333……1，所以这个千位数除以3得到的余数是1.

思考题：

1.在 □内填上适当的数字，使五位数23 □ 6 □ 既能被3整除又能被5整除。

分析：能被5整除，个位只能是0或5，所以分两种情况考虑。

（1)当个位是0时,其他各位的和是2+3+6=11,11+1、11+4、11+7都能被3整除。这个数可以是23160、23460、23760；

（2）当个位是5时，已知各数位上数字之和是2+3+6+5=16，16+2、16+5、16+8都能被3整除，这个数可以是23265、23565、23865。

解：这个数可能是23160,23460,23760,23265,23565,23865。

精讲2：王老师买了72本相同的笔记本，回来时由于发票遭到雨淋，导致很多栏目上信息看不清楚，只有总价栏留下几个数字： □ 13.7 □ 元，你知道这些笔记本一共多少钱吗？

解： □ 13.7 □ 元=□ 137 □ 分 72=8×9

总价应该是72的倍数，即既是8的倍数又是9的倍数

是8 的倍数:末位是偶数，即370、372、374、376、378

其中只有376能被8整除。所以末位是6

是9的倍数，1+3+7+6=17, 17+1=18，所以首位是1.

答：这些笔记本一共113.76元。

精讲4：一个四位数 AB12 加上9后能被9整除，减去8后能被8整除，求满足条件的最大数。

解：加上9后，变成AB21，A+B+2+1=A+B+3

能被9整除，所以A+B+3=18，A+B=15

减去8后，变成AB04，B04能被8整除，

B的可取值有1、3、5、7、9

结合A+B=15，排除1、3、5

又因为要求最大的，所以B=7，A=8

答：满足条件的最大数是8712。

精讲5：七位数55□222□是6的的倍数，那么当两个□里是相同的数字时，这个七位数是多少？

分析：5+5+2+2+2=16，由题意七位数是6的倍数，也就是说同时能被2和3整除。所以□里一定是偶数。(0、2、4、6、8）

16＋0×2=16 16＋2×2=20 16＋4×2=24

16＋6×2=28 16＋8×2=32

其中只有24是3的倍数，所以□里只能是4。所以这个七位数是554 2224。

解：这个七位数是5542224。

第二节 奇偶性问题

一、奇数与偶数概念

在自然数中，能被 2 整除的整数，叫做偶数；不能被 2 整除的整数是奇数。

二、奇数与偶数性质

偶数±偶数=偶数 奇数±奇数=偶数
偶数±奇数=奇数 奇数×奇数=奇数
偶数×偶数=偶数 奇数×偶数=偶数
0 是一个特殊的偶数：它既是正偶数与负偶数的分界线，又是正奇数与负奇数的分水岭。
两个连续整数中必有一个奇数和一个偶数；
如果一个偶数能被奇数整除，那么所得的商是偶数。
最小的奇数是 1，最小的偶数是 0

谁都清楚什么是奇数、什么是偶数，可是利用它的性质，你会求一些复杂的数学题吗？请看下面的例题吧！

例 1：把 1，2，3…1992 中的各个数都用加号或者减号连起来，它们的运算结果是奇数还是偶数？
分析：根据加减运算中的奇偶性规律分析，运算结果的奇偶性与所填运算符号无关，只与参与运算的数中奇数的个数有关，即在算式里如果有偶数个奇数，那么运算结果一定是偶数；如果有奇数个奇数，运算结果一定是奇数。只要数一数奇数的个数，就可以确定其结果是奇数还是偶数了。
解：1～1992 中共有 996 个奇数，所以，不管数之间填加号还是减号，它都是一个共有偶数个奇数参与运算的加减算式，所以结果一定是偶数。
方法点睛：直接利用奇偶性的性质，不必算出结果来判断。
1．偶数±偶数＝偶数；奇数±奇数＝偶数；偶数±奇数＝奇数；2．偶数个奇数相加得偶数；奇数个奇数相加得奇数。

例 2：用 1、2、3、4、5 这五个数两两相乘，可以得到 10 个不同的乘积。问乘积中是偶数多还是奇数多？
分析：如果两个整数的积是奇数，那么这两个整数都必须是奇数。在这五个数中，只有三个奇数，两两相乘可以得到 3 个不同的奇数积，7 个不同的偶数积。
解：在 10 个不同的乘积中，偶数的多。
方法点睛：偶数×奇数＝偶数；奇数×奇数＝奇数；偶数×偶数＝偶数。
奇数和偶数的其他性质：在整除的情况下，偶数÷奇数＝偶数；偶数÷偶数＝偶数或奇数。

例 3：一个数与两个相邻的奇数分别相乘，所得的两个积相差 190，求这个数是多少？
分析 1：因为相邻的两个奇数相差 2，一个数与两个相邻的奇数分别相乘，所得的两个积之差是 190，也就是说这个数的 2 倍是 190，这个数就是 95。
解：190÷2＝95，所以这个数是 95。
分析 2：设这个数为 x，则相邻的两个奇数分别为（2n＋1），（2n+3）（n 为整数）。
解：（2n＋3）x－（2n＋1）x＝190，解之得 x＝95。
方法点睛：相邻两个奇数相差 2，相邻两个偶数相差也是 2。

例 4：用 0～9 这 10 个数组成 5 个两位数，每个数只用一次，要求它们的和是奇数，那么这 5 个两位数的和最大是多少？

分析 1：要使组成的 5 个两位数的和最大，应该把 10 个数中最大的 5 个分别放在十位上，即十位上是 5，6，7，8，9，而个位上放 0，1，2，3，4。根据奇数的定义，这样组成的 5 个两位数中，只有个位是 1 和 3 的 2 个奇数。
解：要满足这 5 个两位数的和是奇数，根据奇偶性相加减的运算规律，这 5 个数中应有奇数个奇数，所以上述的情况不合要求，必须调整。调整的方法是让十位上的数要尽可能大，且个位数字必须有奇数个奇数。由此知应交换 5 和 4 的位置。满足题目要求的 5 个两位数的十位上的数是 4，6，7，8，9；个位上的数是 0，1，2，3，5，这 5 个数的和是（4＋6＋7＋8＋9）×10＋（0＋1＋2＋3＋5）＝351。
方法点睛：做这道题时，要先考虑“和最大”，暂时不考虑这 5 个数的和是奇数的要求。

三、奇偶性的应用

通过前面的学习，利用奇偶性的一些性质，我们学会了在数字中解决奇偶性的一些问题。其实在实际生活中奇偶性问题也会经常出现，下面我们通过几道例题来进一步学习奇偶性的一些问题。
例 1：有 5 个杯子，杯口全都朝上。规定每次翻转 4 个杯子，经过若干次后，能否使杯口全部朝下？（美国小学数学奥林匹克通讯赛试题。）
分析：要使 5 个杯子杯口全部朝下，每个杯子必须翻转奇数次，5 个奇数的和是奇数，所以翻动的总次数为奇数时才能使 5 个杯子的杯口全部都向下。现在每次只翻转 4 个杯子，无论翻多少回，总次数一定是偶数。因此，按规定不可能经过若干次“翻转”后使得杯口全部向下。
方法点睛：巧用奇偶数的性质来分析这一事件的可能性。如果亲自动手翻转 5 个杯子，是无法得出结论的。

例 2：某班同学参加学校的数学竞赛，共 50 道试题。评分标准是：答对一道给 3 分，不答给 1 分，答错倒扣 1 分。请你说明：该班同学得分总和一定是偶数。（全国第三届《从小爱数学》邀请赛试题。）
分析：如果 50 道题都答对，共可得 150 分，是一个偶数。每答错一道题，就要相差 4 分，不管答错多少道题，4 的倍数总是偶数，150 减偶数，差仍然是一个偶数。
同理，每不答一道题，就相差 2 分，不管有多少道题不答，2 的倍数总是偶数，偶数与偶数之和为偶数。
所以，全班每个同学的分数都是偶数，则全班同学的得分之和也一定是个偶数。
方法点睛：答对与不答的得分相差 2，答错与答对的得分相差 4，都是 2 的倍数，即偶数。

例 3：甲盒中放有 180 个白色围棋子和 181 个黑色围棋子，乙盒中放有 181 个白色围棋子，李平每次任意从甲盒中摸出两个棋子，如果两个棋子同色，他就从乙盒中拿出一个白子放入甲盒；如果两个棋子不同色，他就把黑子放回甲盒。那么他拿多少次后，甲盒中只剩下一个棋子，这个棋子是什么颜色的？
分析：不论李平从甲盒中拿出两个什么样的棋子，他总会把一个棋子放入甲盒。所以他每拿一次，甲盒子中的棋子数就减少一个，所以他拿 180＋181－1＝360 次后，甲盒里只剩下一个棋子。

如果他拿出的是两个黑子，那么甲盒中的黑子数就减少两个。否则甲盒子中的黑子数不变。也就是说，李平每次从甲盒子拿出的黑子数都是偶数。由于 181 是奇数，奇数减偶数等于奇数。所以，甲盒中剩下的黑子数应是奇数，而不大于 1 的奇数只有 1，所以甲盒里剩下的一个棋子应该是黑子。

方法点睛：巧用奇偶数的性质来分析这一事件。

由上可知，在现实生活中好多问题我们都会利用奇数与偶数的性质来解答。下面就来做一些练习吧，来检验一下你对这些知识的掌握程度。

一、填空题

1．五个连续奇数的和是 85，其中最大的奇数是（ ），最小的奇数是（ ）。

2．有四个互不相等的自然数，最大数与最小数的差等于 4，最大数与最小数的积是一个奇数，而这四个数的和是最小的两位奇数，那么这四个数的乘积是（ ）。

3．有五个连续偶数，已知第三个数比第一个数与第五个数和的多 18，这五个偶数之和是（ ）。

二、选择题

1．设 a、b 都是整数，下列命题正确的个数是（ ）。

（1）若 a＋5b 是偶数，则 a－b 是偶数。

（2）若 a＋5b 是偶数，则 a－3b 是奇数。

（3）若 a＋5b 是奇数，则 a－3b 是奇数。

（4）若 a＋5b 是奇数，则 a－3b 是偶数。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．若 5×3×a×9×b 是奇数，则整数 a，b 的奇偶性适合（ ）。

A．a 奇 b 偶　B．a 奇 b 奇　C．a 偶 b 偶　D．a 偶 b 奇

3．若 a＋b＋c＝奇数，a×b×c＝偶数，则 a，b，c 的奇偶性适合（ ）。

A．三个都是奇数　B．两个奇数一个偶数　C．一个奇数两个偶数　D．三个都是偶数

三、解答题

1. 30 个连续自然数的乘积是奇数还是偶数？

2. 博物馆有并列的 5 间展室亮着灯，保安人员在里面巡逻。他每经过一间，就要拉一下这间展室的电灯开关。他从第一间展室开始，走到第二间，再走到第三间…，走到第五间后往回走，走到第四间，再走到第三间……如果开始时五间展室都亮着灯，那么他走过 100 个房间后，还有几间亮着灯？

分析：①根据题干分析可得：当一个房间的开关被拉动偶数次时，这间房间的灯亮着，反之则熄灭．②当他经过第 1、2、3、4、5、4、3、2 展室，又从第 1 展室开始重复这个过程，所以他一个来回行动的周期路线为：1、2、3、4、5、4、3、2．在这个过程中，2、3、4 展室的电灯开关被拉动 2 次，第 1、5 展室的开关被拉动 1 次．

解答： 解：100=8×12+4，

即警卫走了 12 个来回，并重新走过第 1、2、3、4 展室．这时有如下情形：

第 1 展室的电灯开关被拉动了 12+1=13（次）；

第 2 展室的电灯开关被拉动了 12×2+1=25（次）；

第 3 展室的电灯开关被拉动了 12×2+1=25（次）；

第 4 展室的电灯开关被拉动了 12×2+1=25（次）；

第 5 展室的电灯开关被拉动了 12 次．所以，第 1、2、3、4 展室的灯熄灭了，第 5 展室的灯亮着；

答：还亮着灯的房间有 1 间，是第 5 间．

故答案为：1，5．

点评：抓住这个人活动的路线周期特点，以及开关偶数次为灯亮，反之为熄灭的规律，

第三节 分解质因数

如果整数 a 能被整数 b（不等于零）整除，或 b 整除 a，就说 b 是 a 的约数，a 是 b 的倍数。在小学数学解题中注意理解和掌握以下知识点：零是任何非零自然数的倍数；任何非零自然数都是零的约数；任何整数都是 1 的倍数；1 是任何整数的约数；一个非零自然数的约数的集合是一个有限集合；一个非零自然数的倍数的集合是一个无限集合。

一、质数与合数

自然数按因数的个数来分：质数、合数、1、0 四类

一个大于 1 的整数，如果只能被 1 和它本身整除，则称这个数为质数。

如果这个数除了能被 1 和它本身整除外还能被其他正整数整除，则称这个数为合数。

注：

①最小的质数是 2，最小的合数是 4，连续的两个质数是 2、3，1 既不是质数，也不是合数。

②每个合数都可以由几个质数相乘得到，质数相乘一定得合数。
③20 以内的质数：有 8 个（2、3、5、7、11、13、17、19）
二、分解质因数
把一个合数分解成若干个质因数的乘积的形式，即求质因数的过程叫做分解质因数。常采用短除法来分解质因数。

例 1. 已知三个质数的和是 80，要使这三个质数的乘积最大，这三个质数分别是多少？它们的乘积最大是多少？

分析与解：由题目中的条件知道，这三个质数的和是 80，是一个偶数，那么在这三个质数中必有一个是质偶数 2。因此，另外两个质数的和是 78。

三个质数，其中一个质数是 2 已经确定，要考虑三个质数的乘积最大，就要考虑另两个质数的乘积要最大。要考虑两个质数的乘积最大，就要考虑它们的差尽可能小。经过试算，和为 78 的两个质数中，41 和 37 它们的差最小。所以这三个质数 2、37、41 的乘积应该最大，是：

$2×37×41＝3034$

答：这三个质数分别是 2、37、和 41，它们的乘积最大是 3034。

例 2. 能否找到两个质数，使它们的和等于$\underbrace{11\ldots1}_{20}$。

分析与解：由于 2 是唯一的偶质数，除此之外的任何质数都是奇数，而连个奇数的和是偶数，这样的质数如果存在，其中一个必然是 2，从而另一个只能是$\underbrace{11\ldots1}_{20}-2=\underbrace{11\ldots1}_{18}09$，但由于$\underbrace{11\ldots1}_{18}09$各数位上的数字和是 18＋9=27，27 能被 3 整除，从而$\underbrace{11\ldots1}_{18}09$能被 3 整除，即$\underbrace{11\ldots1}_{18}09$是合数不是质数。

答：找不到两个质数，使它们的和等于$\underbrace{11\ldots1}_{20}$。

例 3. 在一间演播厅里装有 100 盏照明灯，依次编上号码：1、2、3、4、5、…98、99、100，每一盏照明灯都装有一个拉线开关。开始的时候，全部的照明灯都是关着的。有 100 位同学依次进入演播厅，严格按规定拉照明灯的开关：第 1 位同学进入演播厅，把编号是 1 的倍数的所有照明灯开关都拉了一下，也就是把所有的照明灯都打开了；接着第 2 位同学进入演播厅，把编号是 2 的倍数的所有照明灯的开关都拉了一下，也就是把所有编号是偶数的照明灯又都关上了；第 3 位同学进入演播厅，把编号是 3 的倍数的所有照明灯的开关都拉了一下；等等。如此下去，最后第 100 位同学进入演播厅，把编号是 100 的照明灯开关拉了一下。这样做完以后，哪些编号的照明灯还是亮着的？

分析：这个问题的文字叙述较长，有 100 盏照明，有 100 位同学依次按规定拉开关，变化比较

复杂。我们可以先从这 100 盏照明灯中选定一盏照明灯，考察这盏照明灯被拉的情况。

如，选定编号是 50 号的照明灯，进入演播厅拉动这盏照明灯的同学的编号，应该是 50 的约数，他们分别是第 1、2、5、10、25、50 号同学。因此，这盏 50 号照明灯的开关被拉动了 6 次，是一个偶数，所以 50 号照明灯最后是不亮的。

由此可见，每盏照明灯的开关最终被拉动的次数，就是这盏照明灯编号的约数的个数。从这个约数个数的奇偶性就可以知道这盏照明灯是亮着还是不亮。所以，这个问题可以利用完全平方数和非完全平方数约数的个数的奇偶性来解决。

解：按照明灯的编号来思考解答：

由于非完全平方数的约数有偶数个，因此编号为非完全平方数的照明灯的开关被拉动了偶数次，这些照明灯最终都是不亮的。

由于完全平方数的约数有奇数个，因此编号为完全平方数的照明灯的开关被拉动了偶数次，这些照明灯最终都是亮着的。这些照明灯的编号是：1、4、9、16、25、36、49、64、81 和 100，有 10 盏照明灯是亮着的。

答：编号是 1、4、9、16、25、36、49、64、81 和 100 的照明灯是亮着的。

例 4. 筐里装有一些苹果，不多于 500 个。如果每次 2 个、每次 3 个、每次 4 个、每次 5 个、每次 6 个地取出来，筐里都剩下 1 个苹果；如果每次 7 个地取出，筐里苹果正好取完。筐里原有苹果多少个？

分析：从题目知道，筐里苹果的个数应该比 2、3、4、5、6 的公倍数多 1；同时由于“每次 7 个地取出，筐里苹果正好取完”，说明这个数还要能被 7 整除，苹果的个数比 7 个多。

先求出 2、3、4、5、6 的最小公倍数，再找出“比 2、3、4、5、6 的公倍数多 1”的一些数，通过试算求筐里原有苹果多少个。

解：由于 2、3、4、5、6 的最小公倍数是

[2、3、4、5、6]＝60

因此，苹果个数在 7 个至 500 个之间，并且比 2、3、4、5、6 的公倍数多 1 的数有：61、121、181、241、301、361、421、481。经过试算，在这些数中能被 7 整除的数只有 301。所以，筐里原有苹果 301 个。

答：筐里原有苹果 301 个。

例 5. 把一块长 54 厘米，宽 30 厘米的铁皮，裁剪成同样大小的正方形铁片，并且没有剩余，能裁剪成的最大正方形边长是多少厘米？可以裁剪成这样的正方形铁片多少块？

分析和解：要把这块铁片裁剪成正方形铁片，并且没有剩余，那么铁片的边长应该是大长方形边长的约数，即是长和宽的公约数。要求最大边长的正方形，就是求长 54 厘米和宽 30 厘米的最大公约数。由于 54=6×9，30=6×5，54 与 30 的最大公约数是 6，即裁剪成的最大正方形铁片的边长是 6 厘米。这样就可以算出裁剪出的正方形铁片的块数：

（54÷6）×（30÷6）=9×5=45（块）

答：剪成的最大正方形边长是 6 厘米，可以裁剪成这样的正方形铁片 45 块。

三、最大公约数 最大公约数，也称最大公因数、最大公因子，指两个或多个整数共有约数中最大的一个。a，b 的最大公约数记为（a，b）。 短除法：短除法求最大公约数，先用这几个数的公约数连续去除，一直除到所有的商互质为止，然后把所有的除数连乘起来，所得的积就是这几个数的最大公约数。 四、最小公倍数 两个或多个整数公有的倍数叫做它们的公倍数，其中除 0 以外最小的一个公倍数就叫做这几个整数的最小公倍数。整数 a，b 的最小公倍数记为[a，b]。 短除法求最小公倍数，先用这几个数的公约数去除每个数，再用部分数的公约数去除，并把不能整除的数移下来，一直除到所有的商中每两个数都是互质的为止，然后把所有的除数和商连乘起来，所得的积就是这几个数的最小公倍数
复习思考题、作业题： 思考题：1.**在解题教学过程中教师应该注意哪几个问题？** **2.你如何看待小学生学习奥数？**
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　　周	课　次	第 32-33 次
章　节 名　称	**第七章 推理与反驳**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	掌握逻辑推理的一般方法和思维过程；理解和掌握逻辑推理的三条基本规律：同一律、矛盾律和排中律。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：用启发式教学培养学生的逻辑思维能力，并使其在解决问题过程中体会数学思想，能将知识进行合理的运用及拓展。 难点：反驳诡辩		

教学步骤及内容：

第一节　逻辑推理

在小学数学解题中，有一些数学问题不是直接依靠数学概念、数学公式和计算法则进行解答，而是根据题目中的条件认真进行分析、思考，充分利用有关知识和条件的联系进行合理的推理、判断而得出问题的结论。这种以事实为根据，通过巧妙清晰的推理判断得出正确结论的问题，就叫做逻辑推理问题。

解答逻辑推理问题，对于培养学生有条理地分析问题、全面而有联系地思考问题和解决问题的能力，以及在学生智力开发等方面都有重要意义。

逻辑推理问题一般给的已知条件都较多，而且有一定的隐含条件和迷惑条件，又没有一定的解题模式。在解答逻辑推理问题的过程中，必须遵循逻辑推理的一般规律，即**同一律、矛盾律、排中律。**

（1）同一律：在逻辑推理过程中，同一对象的内涵必须是确定的，在进行判断和推理的过程中，每个概念都必须在同一意义下使用，不许偷换。

（2）矛盾律：在逻辑推理过程中，对同一结论的推理不能自相矛盾。

（3）排中律：在逻辑推理过程中，一个思想或为真或为假，不能既不真、也不假。

以这三种逻辑推理的基本规律为基础，可以帮助我们在解答逻辑推理问题的过程中，找到解决问题的方法和途径，得出正确的判断。并通过学习活动，总结解题规律，认真研究解题策略的方法，提高和培养解题能力。

常采用的解题法：**假设法和排除法**

例 1. 猜猜名次。有穿红、黄、蓝、白、紫五种不同运动服的五支运动队参加长跑比赛，有 A、B、C、D、E 五个小朋友猜名次，每人只准猜两支运动队的名次。

A 猜：紫队第二，黄队第三。　　　B 猜：蓝队第二，红队第四。

C 猜：红队第一，白队第五。　　　D 猜：蓝队第三，白队第四。

E 猜：黄队第二，紫队第五。

猜完后发现每人都猜对了一个队的名次，并且每队的名次只有一人猜对。五支运动队参加长跑比赛的名次顺序是什么？他们各猜对哪个队的名次？（选自《小学迎春杯数学竞赛指导讲座》下册，北京师范大学出版社，1991 年 9 月版，第 58 页。文字有改动。）

分析与解：解题的关键是抓住“每队名次只有一个人猜对，而每人都猜对了一个队的名次”的限定条件。我们采用表格的方法进行排列和判断。

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
红队		④×	①√		
黄队	③√				②×
蓝对		②√		③×	
白队			⑤×	④√	

紫队	②×				⑤√

从表格中不难发现只有 C 一人猜了红队是第一名，所以这个结论应该是正确的，那么白队第五错了。因此，紫队应该排第五，那么黄队第二就错；又因为紫队已经排在第五，所以紫队排第二就错，那么黄队排第三就对。同样道理推下去，红队第一、蓝队就排在第二，这样五支运动队的名次排列依次是红队、蓝队、黄队、白队和紫队。

答：五支运动队参加长跑比赛的名次排列顺序是红队、蓝队、黄队、白队和紫队。A 猜对黄队第三，B 猜对蓝队第二，C 猜对红队第一，D 猜对白队第四，E 猜对紫队第五。

在这道问题的推理过程解答中，实际上主要根据基本逻辑规律**“同一律和矛盾律”**进行排列、选择和判断，即一个运动队只能穿单一色服装，穿红色的运动服装就不能穿蓝色的运动服，穿红的运动服与不是穿红的运动服也是唯一确定的。在解答问题的过程中，我们充分利用已知条件，全面地进行分析思考，从而找到解决问题的突破口。

这道问题在解答的过程中，通过列出两个有关系的表，首先确定红队是第一，然后就容易通过条件进行判断、推理。由于借助表格，并根据“排中律和同一律”进行判断，可以使条件更清晰，判断、推理过程自然流畅。

例 2. 王芳、赵丽和胡小霞三位老师是六年级的任课教师，在语文、数学、社会、体育、音乐和美术 6 门课程的教学工作中，每人承担 2 门课程的教学工作。并且知道：

（1）社会课老师和数学课老师是邻居；

（2）赵丽老师最年轻；

（3）王芳老师经常与体育课老师、数学课老师交流读书心得；

（4）体育课老师比语文课老师年龄大；

（5）赵丽老师、音乐课老师和语文课老师，三人经常一起去游泳。

请确定：王芳、赵丽和胡小霞三位老师每人各承担哪 2 门课程的教学工作？

分析与解：根据题目中的条件，我们可以用**排除法**列表推断这三位老师不教什么课程。

	语文	数学	社会	体育	音乐	美术
王　芳	√	×	√	×	×	×
赵　丽	×	√	×	×	×	√
胡小霞	×	×	×	√	√	×

根据条件（3）可以推得王芳老师不教体育课和数学课，在表中画出“×”；再根据条件（5）可以推得赵丽老师不教音乐课和语文课，在表中画出“×”。从条件（2）和（4）中知道，赵丽老师最年轻，不教体育，由此可以推得胡小霞教体育课，分别在相应的位置画出“×”与“√”。

根据条件（1）知道社会课老师和数学课老师不是同一位老师，因此赵丽教美术课，而王芳、胡小霞就不教美术课，在相应位置画出“√”与“×”。又根据条件（4），知道体育课老师与语文课老师不是同一位老师，因此，胡小霞不教语文，那么只有王芳教语文，在相应位置画出“×”与“√”。再根据条件（3）可以推得体育课老师与数学课老师也不是同一位老师，所以胡小霞不教数学课，只有赵丽教数学课，那么赵丽就不教社会课，在相应位置画出“×”与“√”。

根据条件（5）音乐课老师和语文课老师也不是同一位老师，因此王芳不教音乐，教社会课；最

后可以推得胡小霞不教社会课，只有教音乐课，在相应位置画出“×”与 “√”。随着表的填写，所确定的结果也就清楚了。

答：王芳承担语文、社会课的教学，赵丽承担数学、美术课的教学工作，胡小霞承担体育、音乐课的教学工作。

例：有 8 个球编号是①至⑧，其中有 6 个球一样重，另外两个球都轻 1 克。为了找出这两个轻球，用天平秤了 3 次，结果如下：

第一次：①+②>③+④

第二次：⑤+⑥<⑦+⑧

第三次：①+③+⑤>②+④+⑧

那么，两个轻球分别是几号？

例：五年（3）班有 52 人，从甲、乙、丙、丁、戊五位候选人中选出班长。投票结果，甲得票最多 28 张，乙得票数排第二，丙、丁得票相同，戊得票最少，只有 5 票。乙得票多少张？（矛盾律）

例：甲乙丙丁四人在争论今天是星期几，甲说：明天是星期五；乙说：昨天是星期日；丙说：你俩说的都不对；丁说：今天不是星期六。实际上这四个人只有一人说对了，那么请问今天是星期几？

例：老师有一黑两白三顶帽子，给两个学生看后，让他们闭上眼睛，从中取出两顶给他们戴上，然后让他们睁开眼睛，互相看清对方戴的帽子，并立即说出自己头上戴的帽子是什么颜色，两位同学都不能立即说出，请问你知道这两位学生戴的各是什么颜色的帽子吗？

分析：运用**排中法**：假设一个学生戴的是黑色，那么根据排中律“非此即彼”，对方可以推断出自己戴的是白帽子，因为黑帽子只有一顶。现在双方都无法说出自己头上戴的帽子的颜色，说明都戴白帽子。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	