信息工程系

教

案

课程名称： 工科数学

教　　师： 詹扬

总 学 时： 48

理论学时：

实训学时：

上课班级： 计算机应用技术（3+证书）251

授课学期： 2025－2026 第 1 学期

《工科数学》是计算机应用技术专业后续所有专业课程未来发展的重要基础、工具和语言，是学生进入大学学习影响较大的一门基础课程。该门课程除数学知识外，还包含丰富的文化资源和历史底蕴，具有强大的育人功能，是培养学生立德树人非常有效的载体，在专业人才培养方案中具有重要的地位和作用。本课程将在课堂上传播正能量，寓道于教，寓德于教，寓教于乐，让融入在数学中的思政元素成为学生求学、做人、做事的动力源泉，从而实现全员、全方位、全过程润物细无声的立体化育人的目的。

1、在课堂上将相关的数学史、数学家故事适时、适量、适当地引入课堂，使学生体会到现成结论背后的“火热的思考”，以数学家的精神品质感染学生，激发学生的好奇心与求知欲望，培养学生不畏艰难、勇于克服困难的良好精神品质，严谨的求学态度。
2、挖掘隐含于知识背后的思想方法与思维方式与方法，培养学生将复杂问题简单化、实际问题数量化的习惯，使学生能够有条理地理性思维、严密地思考和清晰准确地表达，学会从辩证的角度看待问题、思考问题及解决问题，帮助学生树立正确的世界观、人生观、价值观。
3、引导学生发现并学会欣赏数学的美。如数学符号的简洁美，推理的严谨美、图形的对称美，公式的和谐美、观点及想法的奇异美及概念的意境美等，引导学生从欣赏角度学习数学，在潜移默化中培养学生高尚的审美情操。通过极限概念的学习，使学生懂得人生中，每一点都是起点，也是终点，把每一点当作极限来追求，才能活出风采。
4、以学生为本，营造问题氛围，紧紧抓住学生，时时与学生互动探讨交流，结合所教的知识点，因势利导，画龙点睛，融入思政元素，传授知识的同时进行价值引领，使学生对知识能够逐渐地感悟、理解、消化与运用的同时，塑造健全的人格和高尚的情操，使之成为合格的有用的人才。

部分教学内容思政元素挖掘示例

教学内容	思政元素	达成目标
邻域	甘当绿叶的奉献精神	使命、担当
极限概念	中国数学成就和传统文化	文化自信、家国情怀
微分	真善美元素	培养真善美的情怀
微元法	对立统一哲学思想	培养哲学思维品质
级数、定积分定义	勿以善小而不为，勿以恶小而为之	价值塑造
反常积分	批判创新精神	培养追寻真理的热情

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 1 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 1 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">第一章、初等函数
1.1、一次函数和反比例函数</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">理解一次函数和反比例函数。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">画图。
反比例函数：$S=xy$ 不变。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

第一章、初等函数

1.1、一次函数和反比例函数

教学目的：理解一次函数和反比例函数。

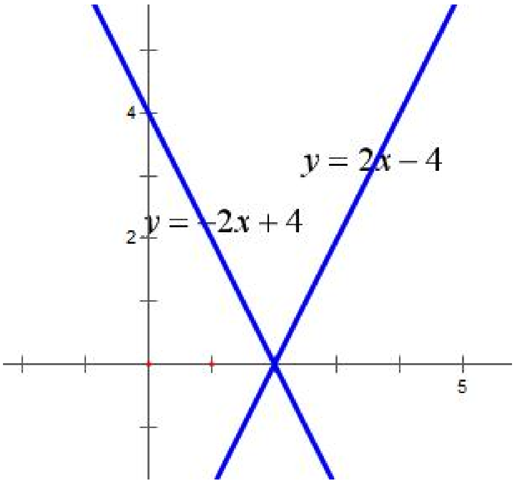
教学重点：画图。

教学难点：反比例函数：$S=xy$ 不变。

1、$k>0$ 时 y 随着 x 的增加而增加，

$k<0$ 时 y 随着 x 的增加而减少。

2、画 $y=2x-4$ 和 $y=-2x+4$ 的图像。



3、 $y=kx+b$ 过点(1，3)和(3，7)，求该一次函数。

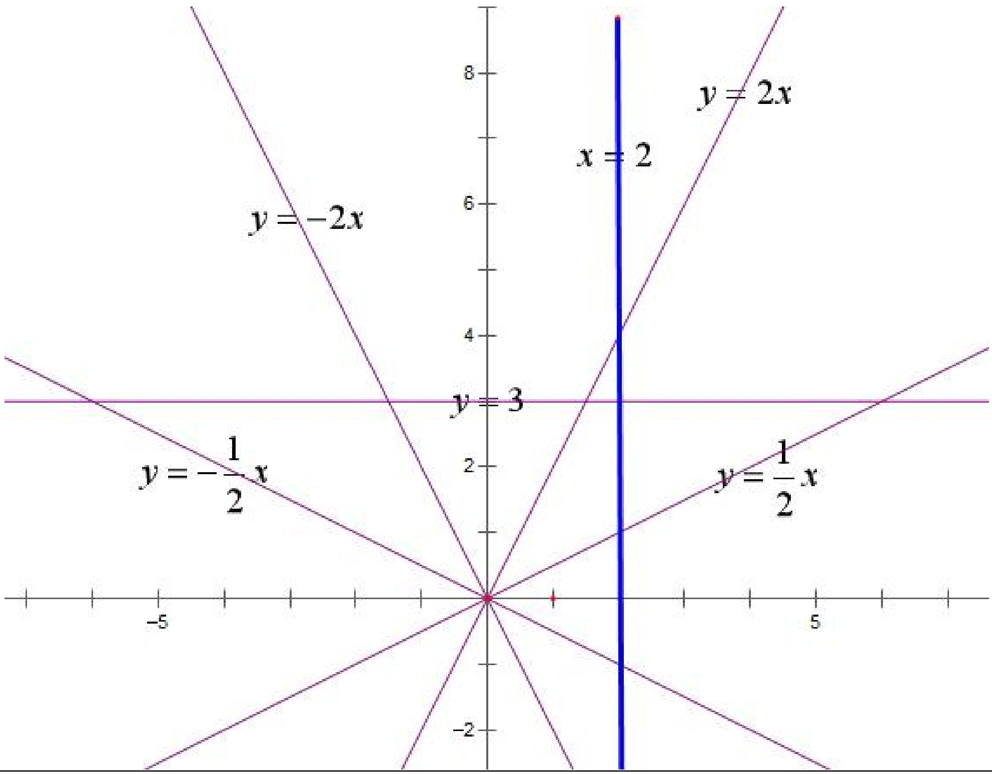
解：$\begin{cases}3=k+b\\7=3k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\k=2\end{cases}\Rightarrow y=2x+1$

4、画图。

(1)、 $y=2x$　　　　(2)、 $y=\frac{1}{2}x$

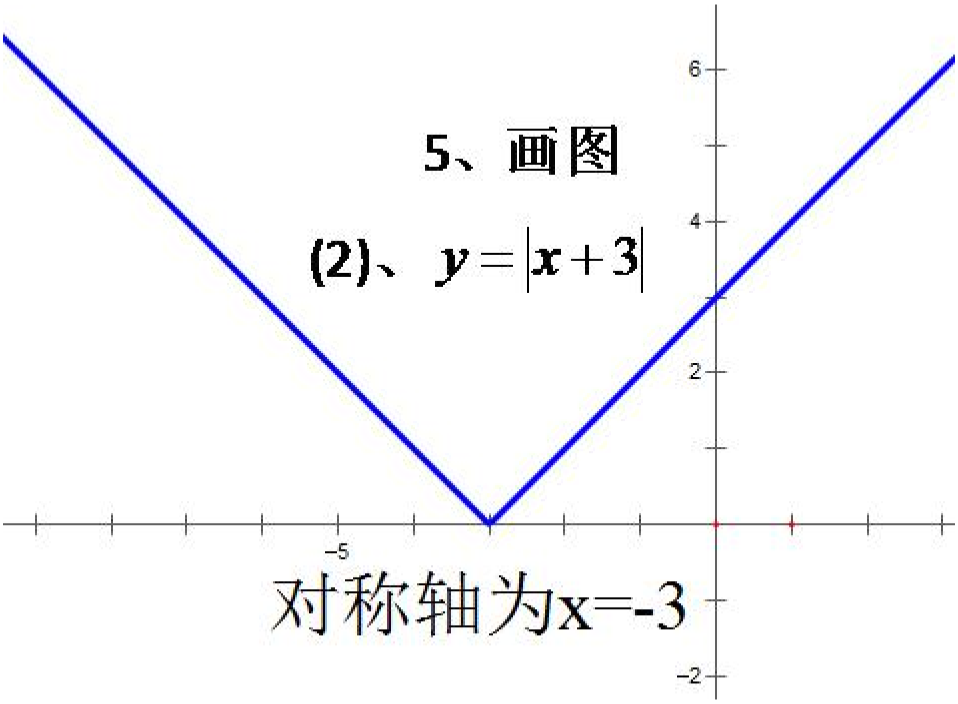
(3)、 $y=-2x$　　　　(4)、 $y=-\frac{1}{2}x$

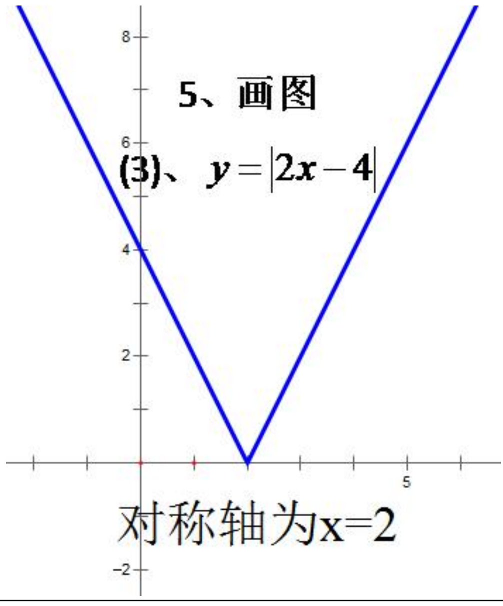
(5)、 $x=2$　　　　(6)、 $y=3$



5、画图

(1)、 $y=|x-2|$　　(2)、 $y=|x+3|$　　(3)、 $y=|2x-4|$





二、反比例函数：$y=\frac{k}{x}$

1、$k>0$时 y 随着 x 的增加而减少，

$k<0$时 y 随着 x 的增加而增加。

2、注意图像关于原点对称。

3、已知函数 $y=y_1+y_2$，其中 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 $x-2$ 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=3$ 时，$y=5$，求此函数的解析式。

解：y_1 与 x 成正比例，设比例系数为 k_1，则有 $y_1=k_1x$；y_2 与 $x-2$ 成反比例，设比例系数为 k_2，则有 $y_2=\frac{k_2}{x-2}$，故 $y=y_1+y_2=k_1x+\frac{k_2}{x-2}$，

当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=3$ 时，$y=5$，则 $\begin{cases}-1=k_1\times 1+\frac{k_2}{1-2}\\5=k_1\times 3+\frac{k_2}{3-2}\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=1\\k_2=2\end{cases}$，所以 $y=x+\frac{2}{x-2}$。

复习思考题、作业题：$y=kx+b$ 过点(2，4)和(3，8)，求该一次函数。	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第 2 周	课 次	第 2 次		
章 节 名 称	1.2、二次函数的基本性质				
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学时数	2
教 学 目 的 要 求	理解二次函数的概念。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：画图。 难点：求解二次不等式。				

教学步骤及内容：

1.2、二次函数的基本性质

二次函数： $y=ax^2+bx+c$ ， $(a\neq 0)$

教学目的：理解二次函数的概念。

教学重点：画图。

教学难点：求解二次不等式。

1、二次函数一定要讨论对称轴： $x=-\dfrac{b}{2a}$ 。

2、跟 x 轴的交点就是方程 ax^2+bx+c=0 的解。

3、韦达定理 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

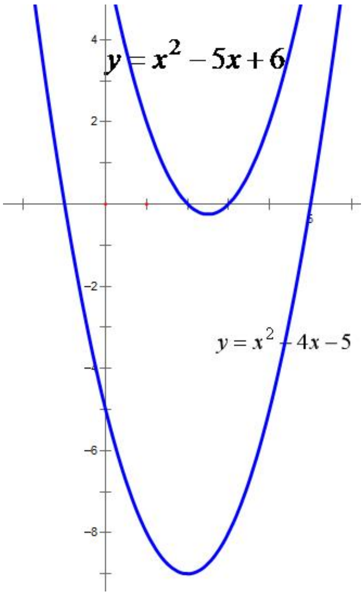
4、画图，求出 y 的取值范围。

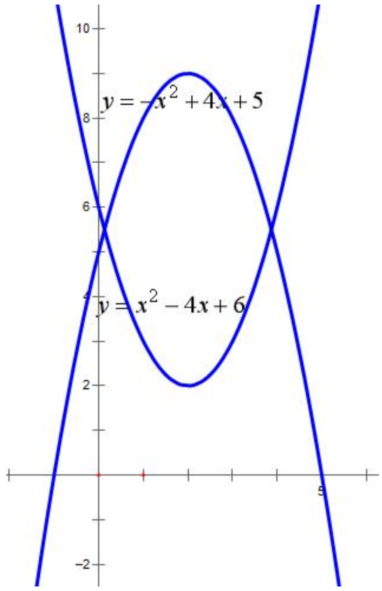
(1)、 $y=x^2-4x-5$ (2)、 $y=x^2-5x+6$

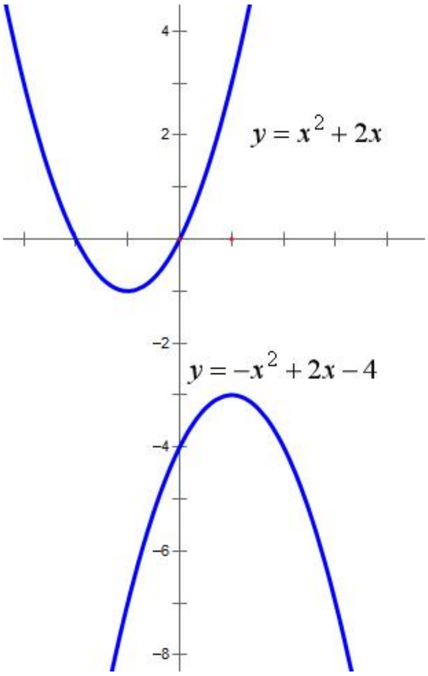
(3)、 $y=x^2-4x+6$ (4)、 $y=-x^2+4x+5$

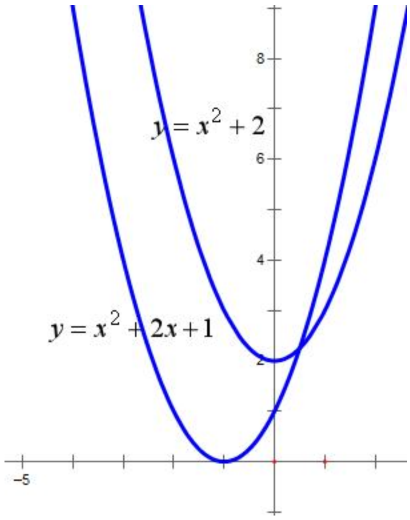
(5)、 $y=-x^2+2x-4$ (6)、 $y=x^2+2x$

(7)、 $y=x^2+2$ (8)、 $y=x^2+2x+1$









5、解不等式

(1)、 $x^2-4x-5>0$ (2)、 $x^2-5x+6<0$

(3)、 $x^2-4x+6>0$ (4)、 $x^2-4x+6<0$

(5)、 $-x^2+4x+5>0$ (6)、 $-x^2+4x+5<0$

(7)、 $-x^2+2x-4>0$ (8)、 $-x^2+2x-4<0$

解：(1)、先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5>0$ 的解为 $x>5$ 或 $x<-1$；

(2)、先解 $x^2-5x+6=0$ 可得 $x_1=2$ 或 $x_2=3$，故 $x^2-5x+6<0$ 的解为 $2<x<3$；

(3)、 $x^2-4x+6=0$ 的判别式 $\Delta=16-24<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使 $x^2-4x+6>0$，故解集为全体实数 R；

(4)、 $x^2-4x+6=0$ 的判别式 $\Delta=16-24<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使得 $x^2-4x+6>0$，没有 x 使得 $x^2-4x+6>0$，故解集为空集；

(5)、 $-x^2+4x+5>0 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0$，

先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5<0$ 的解为 $-1<x<5$；

(6)、 $-x^2+4x+5<0 \Leftrightarrow x^2-4x-5>0$，

先解 $x^2-4x-5=0$ 可得 $x_1=-1$ 或 $x_2=5$，故 $x^2-4x-5>0$ 的解为 $x>5$ 或 $x<-1$；

(7)、 $-x^2+2x-4>0 \Leftrightarrow x^2-2x+4<0$，判别式 $\Delta<0$，方程无解，开口向上，

故任何 x 都使得 $x^2-2x+4>0$，没有 x 使得 $x^2-2x+4<0$，故解集为空集；

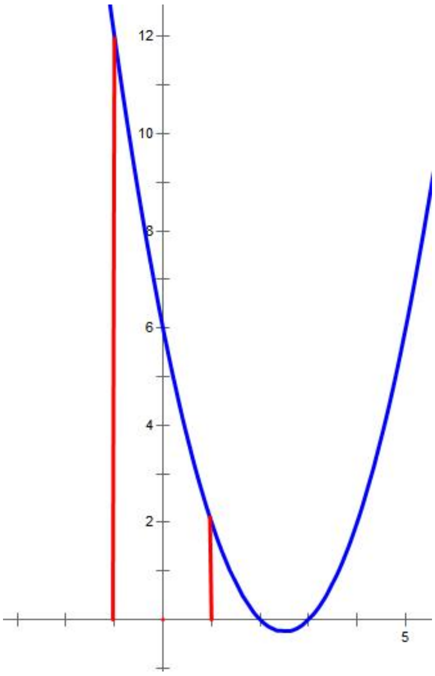
(8)、 $-x^2+2x-4<0 \Leftrightarrow x^2-2x+4>0$，判别式 $\Delta<0$，方程无解，开口向上，

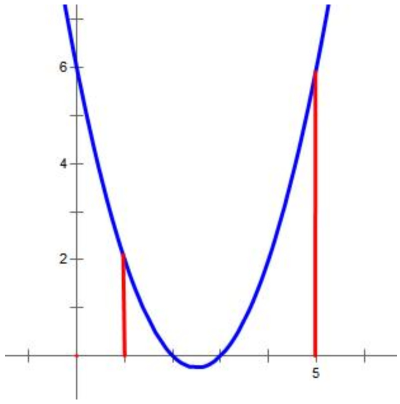
故任何 x 都使得 $x^2-4x+6>0$，故解集为全体实数 R；

6、求下列函数的 y 的取值范围

(1)、 $y=x^2-5x+6(-1\le x\le 1)$

(2)、 $y=x^2-5x+6(-1\le x\le 3)$



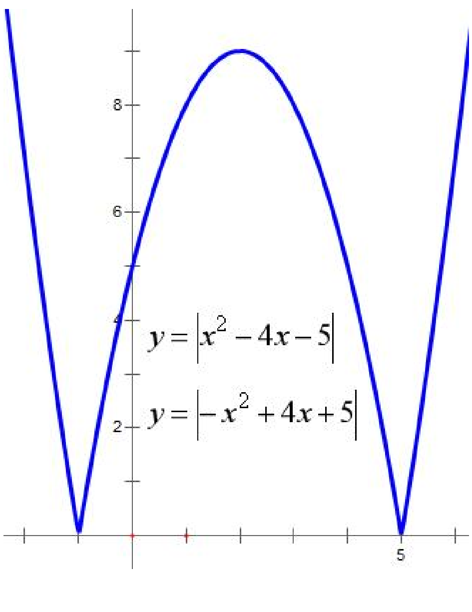


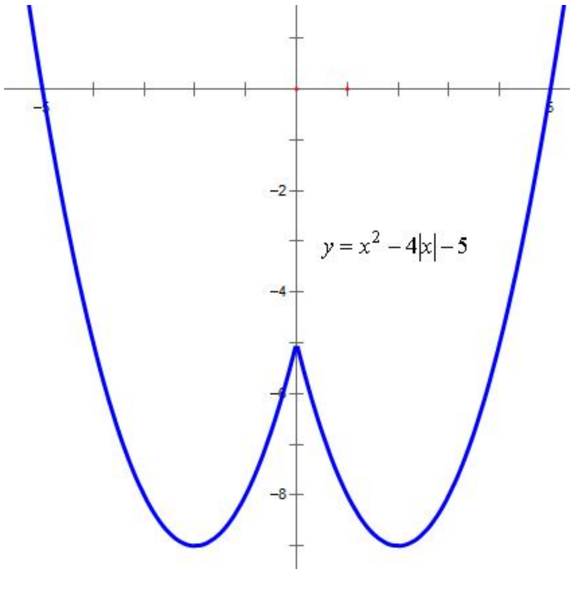
7、画图

(1)、 $y=\left|x^2-4x-5\right|$

(2)、 $y=\left|-x^2+4x+5\right|$

(3)、 $y=x^2-4|x|-5$





8、求 $y=x^2+2ax+a^2+1$ 在 $-1\le x\le 1$ 的最小值。

解：对称轴为 $x=-a$，

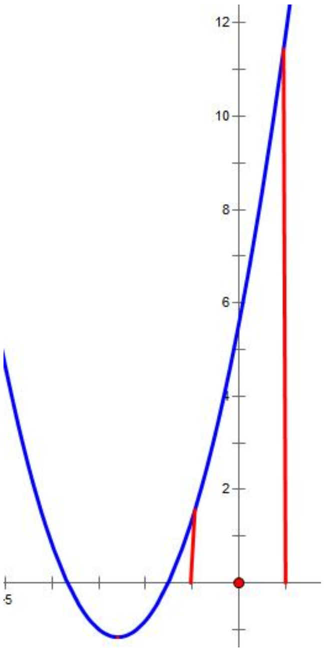
(1)、若 $-a\ge 1$ 即 $a\le -1$，则在 $x=1$ 处取得最小值：$1^2+2a1+a^2+1=a^2+2a+2$；

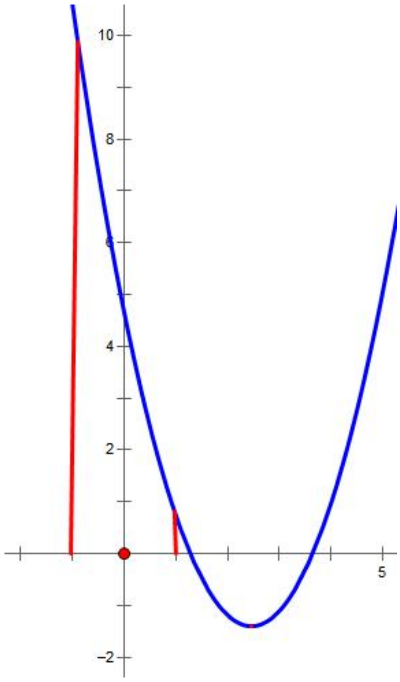
(2)、若 $-a\le -1$ 即 $a\ge 1$，则在 $x=-1$ 处取得最小值：

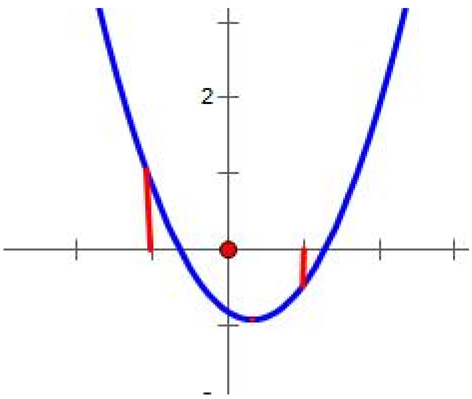
$(-1)^2+2a(-1)+a^2+1=a^2-2a+2$；

(3)、若 $-1<-a<1$ 即 $1>a>-1$，则在 $x=-a$ 处取得最小值：

$(-a)^2+2a(-a)+a^2+1=1$。







9、公式

1、$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

2、$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

3、$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。

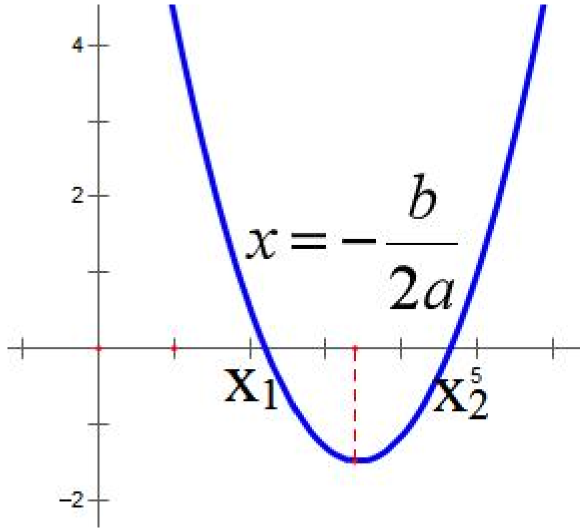
4、$(a+\frac{1}{a})^2-2=(a-\frac{1}{a})^2+2=a^2+\frac{1}{a^2}$。

5、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

10、二次函数：$y=ax^2+bx+c$，$(a\neq 0)$

①、图象是一条抛物线，关于$x=-\frac{b}{2a}$对称，顶点是$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$。

(怎么来的？)



复习思考题、作业题：解不等式：$x^2-2x-8<0$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　2-3　周	课　次	第　3-4 次
章　节 名　称	1.3、讨论二次函数		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	3
教　学 目　的 要　求	对二次函数分情况讨论。		
教　学 方　法	讲解法、讨论法		
教　学 重　点 难　点	重点：求解不等式。 难点：讨论对称轴的取值范围。		

教学步骤及内容：

1.3、讨论二次函数

1、不等式$(2+x)(1-x)>0$的解为(　　)。

$A.\{x|x<2或x>1\}$　　　$B.\{x|x<-1或x>2\}$

$C.\{x|-2<x<1\}$　　　$D.\{x|-1<x<2\}$

解：$(2+x)(1-x)>0 \Rightarrow (x+2)(x-1)<0$，故$-2<x<1$。

$ab=c \Rightarrow (-a)b=-c或a(-b)=-c$

$a+b=c \Rightarrow -a-b=-c$

2、不等式$\dfrac{x+1}{x-2}\le 2$的解集为______________。

解：$\dfrac{x+1}{x-2}\le 2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2}-2\le 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{2x-4}{x-2}\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x+1-2x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow \dfrac{-x+5}{x-2}\le 0 \Rightarrow (-x+5)(x-2)\le 0$

$\Rightarrow \dfrac{x+1-2x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow \dfrac{-x+5}{x-2}\le 0 \Rightarrow \begin{cases}(-x+5)(x-2)\le 0\\ x\ne 2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-5)(x-2)\geq 0\\ x\neq 2\end{cases} \Rightarrow x\geq 5 或 x<2$。

或解 $\frac{x+1}{x-2}\leq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-2\leq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-\frac{2x-4}{x-2}\leq 0$

$\Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2}\leq 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2}\leq 0 \Rightarrow \begin{cases}-x+5\geq 0\\ x-2<0\end{cases}$ 或

$\begin{cases}-x+5\leq 0\\ x-2>0\end{cases}$，解得 $x<2$ 或 $x\geq 5$。

3、已知关于 x 的不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$，则 $a+b$ 的值是(　　)。

$A.-5$　　$B.-3$　　$C.5$　　$D.6$

解：因为不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<3\}$，所以 $-1,3$ 是方程 $x^2-ax-b=0$ 的两实数根，由根与系数的关系得，$\begin{cases}-1+3=a\\ -1\times 3=-b\end{cases}$ 所以 $a=2,b=3$，则 $a+b=5$ 故选 C。

或解：$(x+1)(x-3)<0$ 的解集就是 $\{x|-1<x<3\}$，

即 $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow x^2-2x-3<0$ 和 $x^2-ax-b<0$ 同解，

比较系数可得 $a=2,b=3$。

4、不等式 $-x^2+5x-6>0$ 的解集是(　　)。

$A.\{x|-2<x<3\}$　　$B.\{x|-3<x<2\}$

$C.\{x|2<x<3\}$　　$D.\{x|-3<x<-2\}$

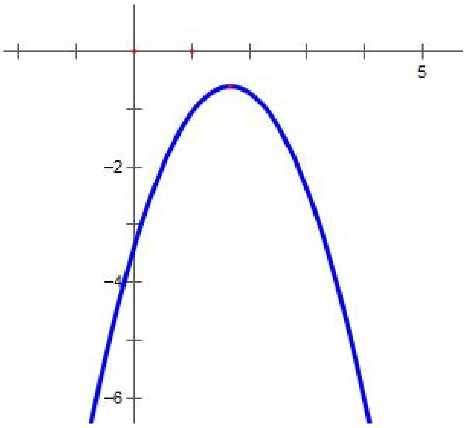
解：$-x^2+5x-6>0 \Rightarrow x^2-5x+6<0 \Rightarrow (x-2)(x-3)<0 \Rightarrow 2<x<3$。

5、若不等式 $ax^2+2x-3<0$ 的解集为 R，则实数 a 的取值范为(　　)。

$A.-\frac{1}{3}<a\leq 0$　　$B.a<-\frac{1}{3}$

$C.a>-\frac{1}{3}$　　$D.a<-\frac{1}{3}$ 或 $a=0$

解：$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<0\\ 4+12a<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<0\\ a<-\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow a<-\frac{1}{3}$。



6、已知不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-2<0$对任意$x\in R$恒成立，求实数a的取值范围是。

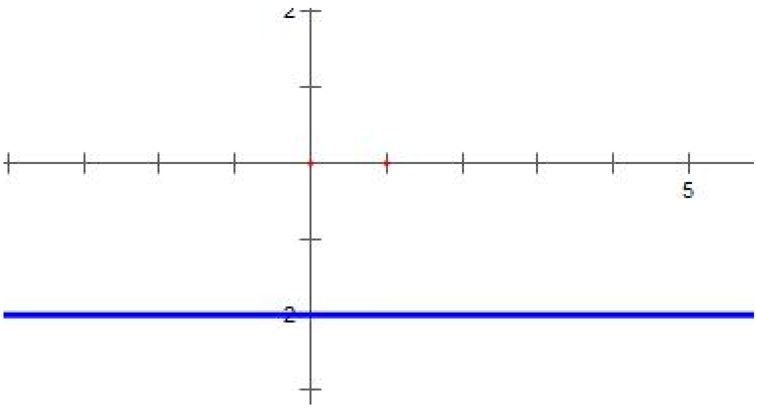
解：设$y=(a-2)x^2+2(a-2)x-2$，

①、当$a=2$时，$y=-2<0$，符合题意；

②、当$a\neq 2$时，只需$\begin{cases}a-2<0\\ \Delta<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ 4(a-2)^2+8(a-2)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ 4(a-2)+8>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a<2\\ a-2+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ a>0\end{cases}\Rightarrow 0<a<2$。

故$0<a\le 2$。



7、若不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$，求则不等式$a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$的解集。

解：$(x+1)(x-2)<0$的解集就是$\{x|-1<x<2\}$，

即 $(x+1)(x-2)<0 \Rightarrow x^2-x-2<0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

即 $-x^2+x+2>0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

比较系数可得 $a=-1$，$b=1$，$c=2$，

故 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 可化为 $x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$。

8、解不等式：$m^2x^2+2mx-3<0$。

解：若 $m=0$，$-3<0$ 永远成立，故解为全体实数，

若 $m\neq 0$，先解 $(mx-1)(mx+3)=0$ 可得 $x_1=\dfrac{1}{m}$，$x_2=-\dfrac{3}{m}$

(1)、若 $m>0$，则 $\dfrac{1}{m}>-\dfrac{3}{m}$，故不等式的解为：$-\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}$；

(2)、若 $m<0$，则 $\dfrac{1}{m}<-\dfrac{3}{m}$，故不等式的解为：$\dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}$。

9、已知 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，则不等式 $2x^2+bx+a<0$ 的解集为______。

解：$(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{3})<0$ 的解就是 $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，

即 $(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{3})<0 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}<0 \Rightarrow -12x^2-2x+2>0$ 和 $ax^2+bx+2>0$ 同解，比较系数可得 $a=-12$，$b=-2$，

故 $2x^2+bx+a<0$ 可化为 $2x^2-2x-12<0$

$\Rightarrow x^2-x-6>0 \Rightarrow (x-3)(x+2)>0 \Rightarrow x>3$ 或 $x<-2$。

10、解关于 x 的不等式 $ax^2+2x+a>0(a\geq 0)$。

解：(1)、若 $a=0$，$2x>0 \Rightarrow x>0$，故解为全体正实数；

(2)、若 $a>0$，$\Delta=4-4a^2$，

当 $\Delta<0$，即 $a>1$ 时，$x\in R$，

当 $\Delta=0$，即 $a=1$ 时，$x\neq -1$，

当 $\Delta>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $ax^2+2x+a=0$ 的两根为

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，且 $x_1<x_2$，

所以$x<\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$或$x>\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$。

11、解关于x的不等于$ax^2+(1-2a)x-2>0$。

解：若$a=0$，$x-2>0\Rightarrow x>2$，

若$a\neq 0$，先解$ax^2+(1-2a)x-2=0$可得$x_1=-\frac{1}{a}$，$x_2=2$

(1)、若$a>0$，则$-\frac{1}{a}<2$，故不等式的解为：$x>2$或$x<-\frac{1}{a}$；

(2)、若$a<0$，先解$-\frac{1}{a}>2\Rightarrow -1<2a\Rightarrow -\frac{1}{2}<a$，故

①、若$-\frac{1}{2}<a<0$，则解为$-\frac{1}{a}>x>2$；

②、若$-\frac{1}{2}=a$，则无解；

③、若$a<-\frac{1}{2}$，则解为$2>x>-\frac{1}{a}$。

12、对x^2-5x+6和x^2+x-1因式分解。

解：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$；

$x^2+x-1=(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$。

复习思考题、作业题：对x^2-5x-6和x^2+x-3因式分解。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　4　周	课　次	第　5　次		
章　节 名　称	1.4、指数运算				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	掌握指数的运算。				
教　学 方　法	讲解法、讨论法				
教　学 重　点 难　点	重点：指数的提取。 难点：指数的乘方。				

教学步骤及内容：

1.4、指数运算

教学目的：掌握指数的运算

教学重点：指数的提取。

教学难点：指数的乘方。

指数的性质：若 a、b、c 都大于 0，则：

①、$a^b a^c = a^{b+c}$　　　　②、$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

③、$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$　　　　④、$(\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}$

⑤、$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$　　　　⑥、$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

常用公式：

1、$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

2、$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，　　$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

3、$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$，　　$a^3-b^3 = (a+b)(a^2+ab+b^2)$。

1、化简 $\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt{(a-2b)^2}$ 的结果是(　　)。

A. $3b-2a$　　B. $2a-3b$　　C. b 或 $2a-3b$　　D. b

解：$\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt{(a-2b)^2}=a-b+|a-2b|$

若 $a\ge 2b$，则原式$=a-b+a-2b=2a-3b$，

若 $a<2b$，则原式$=a-b-(a-2b)=b$，选 C。

2、式子 $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的化简结果为(　)。

A、1　　B、10　　C、100　　D、$\sqrt{10}$

解：$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}$

$=\sqrt{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{6+2\sqrt{9-5}}=\sqrt{10}$。

3、已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，则 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=$(　　)。

解：$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3\Rightarrow x+x^{-1}+2=9\Rightarrow x+x^{-1}=7$，

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}=\pm\sqrt{x+x^{-1}-2}=\pm\sqrt{5}$。

(互为倒数一般要平方，这样才能用到互为倒数)

复习思考题、作业题：

设 a、b 满足 $0<a<b<1$，则下列不等式中正确的是(　　)。

A. $a^a<a^b$　　B. $b^a<b^b$　　C. $a^a<b^a$　　D. $b^b<a^b$

解：令 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，

对于 A，$(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow(\frac{1}{4})^1<(\frac{1}{4})^2\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{16}\Rightarrow 4>16$，矛盾；

对于 B，$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow(\frac{1}{2})^1<(\frac{1}{2})^2\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{4}\Rightarrow 2>4$，矛盾；

对于 C，$(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}\Rightarrow(\frac{1}{4})^1<(\frac{1}{2})^1\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\Rightarrow 4>2$，

成立； 对于 D，$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{1} < (\frac{1}{4})^{1} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 2 > 4$，矛盾；
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 4－5 周	课 次	第 6 次
章节名称	1.5、指数函数		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	掌握指数函数的性质		
教学方法	讲解法、讨论法		
教学重点难点	重点：指数的单调性 难点：指数的定义域和值域		

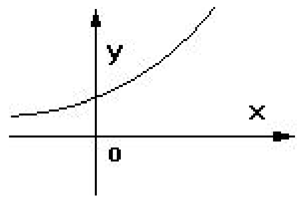
教学步骤及内容：

1.5、指数函数

方法：一定要化同底$4^x=(2^x)^2$，$9^x=(3^x)^2$

任何时候指数函数的底数不能为负，不是指指数的底数不能为负，例$y=(-2)^x$和$y=(-2)^3$。

一、指数函数的图象



方法：y永远大于 0，需要讨论的是a是否大于 1。

1、$y=a^x$ $(a>1)$ 由图象可知：

①、定义域是R

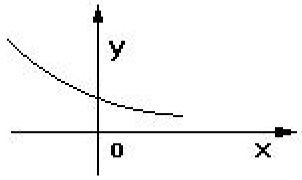
②、值域是(0，＋∞)。

(当$x\to-\infty$时，图象无限接近于x轴，但永远不会相交。)

③、过点(0，1)，在R上函数是递增。

④、当$x\in(-\infty，0)$时，$y\in(0，1)$；当$x\in[0，+\infty)$时，$y\in[1，+\infty)$。

2、$y=a^x$　(1＞a＞0) 由图象可知：



①、定义域是 R

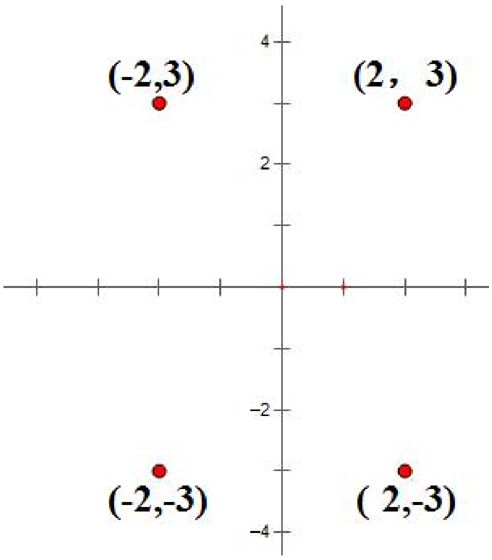
②、值域是(0，＋∞)。

(当 x→＋∞时，图象无限接近 x 轴，但永远不会相交。)

③、过点(0，1)，在 R 上函数是递减的。

④、当 x∈(－∞，0)时，y∈(1，＋∞)；当 x∈[0，＋∞)时，y∈(0，1]。

注意：会画 $y=2^x$、$y=2^{-x}$、$y=-2^x$、$y=-2^{-x}$、$y=2^{|x|}$、$y=\left|2^x\right|$ 的图象。



二、会判断 $y=a^{f(x)}$ 的单调区间。

(考试 $f(x)$ 一般是二次函数)

方法：增增$\Longrightarrow$增，减减$\Longrightarrow$增，增减$\Longrightarrow$减。

1、求 $y=2^{x^2-4x+7}$ 的值域和单调性。

解：$x^2-4x+7\geq 3\Rightarrow 2^{x^2-4x+7}\geq 2^3=8$，故值域为[8，＋∞)，

$y=2^t$ 在 R 上单调递增，

$t=x^2-4x+7$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增，

故 $y=2^{x^2-4x+7}$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增。

2、求 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}$ 的值域和单调性。

解：$x^2-4x+6\ge 2\Rightarrow 0<(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}\le(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，

故值域为 $(0,\frac{1}{4}]$，$y=(\frac{1}{2})^t$ 在 R 上单调递减，

$t=x^2-4x+6$ 在(－∞，2]单调递减，在[2，＋∞)单调递增，

故 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-4x+6}$ 在(－∞，2]单调递增，在[2，＋∞)单调递减。

三、综合练习

1、$f(x)=a^{x-2}$ 恒过定点______________。

2、$f(x)=3a^{x-2}+5$ 恒过定点___________。

3、求方程 $4^x-2^{x+2}-5=0$ 的解。

解：$4^x-2^{x+2}-5=0\Rightarrow(2^x)^2-2^2 2^x-5$，

令 $t=2^x$，可得 $t^2-4t-5=0\Rightarrow t=5\text{或}-1(\text{舍去})$，即 $2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5$。

4、求 $y=\dfrac{10^x-\frac{1}{10^x}}{10^x+\frac{1}{10^x}}$ 的值域和单调性。

解：$y=\dfrac{10^x-\frac{1}{10^x}}{10^x+\frac{1}{10^x}}=\dfrac{100^x-1}{100^x+1}=\dfrac{100^x+1-2}{100^x+1}=1-\dfrac{2}{100^x+1}$，

$100^x>0\Rightarrow 100^x+1>1\Rightarrow 0<\dfrac{1}{100^x+1}<1\Rightarrow 0<\dfrac{2}{100^x+1}<2$

$\Rightarrow 0 > -\frac{2}{100^x+1} > -2 \Rightarrow 1 > 1-\frac{2}{100^x+1} > -1$，故值域为(－1，1)，

$y=100^x+1$单调递增，故$y=\frac{1}{100^x+1}$单调递减，故$y=\frac{2}{100^x+1}$单调递减，

故$y=-\frac{2}{100^x+1}$单调递增，故$y=1-\frac{2}{100^x+1}$单调递增。

5、已知$f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$。

(1)、求奇偶性； (2)、求单调性； (3)、求解$f(t^2-2t)+f(-t-4)>0$。

解：(1)、$f(-x)=e^{-x}-\frac{1}{e^{-x}}=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，奇。

(2)、$y=e^x$单调递增，$y=e^{-x}$单调递减，故$y=-e^{-x}$单调递增，

故$f(x)=e^x-e^{-x}$单调递增。

(3)、$f(t^2-2t)+f(-t-4)>0 \Rightarrow f(t^2-2t)>-f(-t-4)$

$\Rightarrow f(t^2-2t)>f(t+4)$，$f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$单调递增，

故$t^2-2t>t+4 \Rightarrow t^2-3t-4>0$，故$(t+1)(t-4)>0$，故$t>4$或$t<-1$。

复习思考题、作业题：

1、$f(x)=2a^{x-3}+6$恒过定点____(3, 8)________。

2、$f(x)=2\log_a(x-2)+6$恒过定点___(3, 6)_____。

下次课预习要点

教 学 后 记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 6 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 7 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">1.6、对数运算</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>1</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">掌握对数的运算</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：对数的运算规则

难点：对数和指数的转换</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

1.6、对数运算

对数的性质：若 a、b、c 都大于 0，则：

①、$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$，　　$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$；

②、$\log_a b^c = c\log_a b$，　　$\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c}\log_a b$

③、$a^{\log_a b} = b$；

④、$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (换底公式)；

⑤、$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$；

⑥、若 a、b 同时大于 1 或同时大于 0 小于 1，则 $\log_a b > 0$。

1、求值 $\lg 25 + \frac{2}{3}\lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2$。

解：$\lg 25 + \frac{2}{3}\lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2$

$= 2\lg 5 + 2\lg 2 + \lg 5(\lg 5 + 2\lg 2) + \lg^2 2$

$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(\lg 5+2\lg 2)+\lg^2 2$

$=2+\lg^2 5+2\lg 5\lg 2+\lg^2 2$

$=2+(\lg 5+\lg 2)^2=3$。

2、求值$2\log_{12}2+\log_{12}3$。

解：$2\log_{12}2+\log_{12}3=\log_{12}4+\log_{12}3=\log_{12}12=1$。

3、求值$\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}$。

解：$\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}=-\log_2 25\cdot\log_3 8\cdot\log_5 9$

$=-\log_2 25\frac{\log_2 8}{\log_2 3}\frac{\log_2 9}{\log_2 5}=-2\log_2 5\frac{3}{\log_2 3}\frac{2\log_2 3}{\log_2 5}$

$=-12$。

4、求值$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$

解：$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}=\frac{\log_{2^3}3^2}{\log_2 3}=\frac{\frac{2}{3}\log_2 3}{\log_2 3}=\frac{2}{3}$。

5、已知 lg2＝a，lg3＝b，则$\log_3 6$＝(　　)。

A. $\frac{a+b}{a}$　　B. $\frac{a+b}{b}$　　C. $\frac{a}{a+b}$　　D. $\frac{b}{a+b}$

解：$\log_3 6=\frac{\lg 6}{\lg 3}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 3}=\frac{a+b}{b}$。

6、已知：$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，则$\log_{42}56$＝_________。

解：$\log_2 3=a\Rightarrow\log_3 2=\frac{1}{a}$，$\log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{\log_3 7\times 8}{\log_3 7\times 6}$

$$=\frac{\log_3 7+\log_3 8}{\log_3 7+\log_3 6}=\frac{b+\log_3 2^3}{b+\log_3 2\times 3}=\frac{b+3\log_3 2}{b+\log_3 2+\log_3 3}=\frac{b+3\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{a}+1}$$

$$=\frac{ab+3}{ab+1+a}$$。

复习思考题、作业题：

求值$\log_{64}32\cdot\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}$

解：原式=$\log_{2^6}2^5\cdot\log_2 5^{-2}\cdot\log_3 2^{-3}\cdot\log_5 3^{-2}$

$$=\frac{5}{6}\log_2 2\times[(-2)\log_2 5]\times[(-3)\log_3 2]\times[(-2)\log_5 3]$$

$$=-\frac{5}{6}\times 2\times 3\times 2\times\log_2 5\times\log_3 2\times\log_5 3$$

$$=-10\log_2 5\times\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=-10$$

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 6—7 周	课 次	第 8 次
章节名称	1.7、对数函数		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	掌握对数函数的性质		
教学方法	讲解法、讨论法		
教学重点难点	重点：指数的单调性 难点：对数函数的定义域和值域		

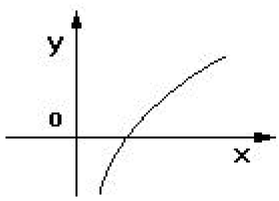
教学步骤及内容：

1.7、对数函数

一、对数函数的图象

方法：x 永远大于 0，需要讨论 x 是否大于 1。

1、$y=\log_a x$ $(a>1)$



由图象可以知道：

①、定义域是(0，＋∞)

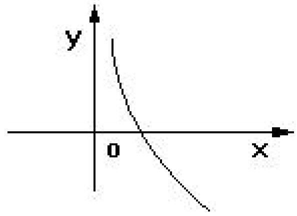
②、值域是 R。

(当 $x\to 0$ 时，图象无限接近于 y 轴，但永远不会相交。)

③、过点(1，0)，在 R 上函数是递增的。

④、当 $x\in(0，1)$时，$y\in(-\infty，0)$时；当 $x\in[1，+\infty)$时，$y\in[0，+\infty)$。

2、$y=\log_a x$ $(1>a>0)$



由图象可以知道：

①、定义域是(0，＋∞)

②、值域是 R。

(当 $x\to 0$ 时，图象无限接近于 y 轴，但永远不会相交。)

③、过点(1，0)，在 R 上函数是递减的。

④、当 $x\in(0，1)$时，$y\in(0，+\infty)$；当 $x\in[1，+\infty)$时，$y\in(-\infty，0]$

画图 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_2(-x)$，$y=-\log_2 x$，

$y=-\log_2(-x)$，$y=\log_2|x|$，$y=|\log_2 x|$，$y=|\log_2|x||$

二、会判断 $y=\log_a f(x)$ 的单调区间和值域。

方法：增增⟹增，减减⟹增，增减⟹减，

1、求 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 的单调区间。

解：$y=\log_{0.2}t$ 在(0，+∞)上单调递减，

而 $t=x^2-4x-5$ 在(-∞，2]单调递减，在[2，+∞)单调递增，

故 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 在(-∞，2]单调递增，在[2，+∞)单调递减。

解：$y=\log_{0.2}t$ 在(0，+∞)上单调递减，

而 $t=x^2-4x-5$ 在(-∞，-1)单调递减，在(5，+∞)单调递增，

故 $y=\log_{0.2}(x^2-4x-5)$ 在(-∞，-1)单调递增，在(5，+∞)单调递减。

2、求 $y=\log_{0.5}(x^2-4x+8)$ 的值域。

解：$x^2-4x+8\geqslant 4$，故 $\log_{0.5}(x^2-4x+8)\le\log_{0.5}4=-2$，

故函数的值域为(-∞，-2]。

3、已知函数 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]单调递减，则 a 的取值范围为____。

解：令 $y=\log_2 t$，$t=2-ax$，由于母函数 $y=\log_2 t$ 单调递增，

而原函数 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]单调递减，

故 $t=2-ax$ 在[0，1]单调递减，故 $a>0$，

但还必须保证 $y=\log_2(2-ax)$ 在[0，1]有意义：

$0\le x\le 1\Rightarrow 0\le ax\le a\Rightarrow 0\ge -ax\ge -a\Rightarrow 2\ge 2-ax\ge 2-a$

故 $2-a>0\Rightarrow a<2$。

三、综合练习

1、 判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的奇偶性。

解：$f(-x)=-f(x)$

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}$$

$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\sqrt{x^2+1}^2-x^2=1$$

$$1=1$$

成立，故是奇函数。

2、设 a，b，c 为正数，且 $3^a=4^b=6^c$，则有(　　)。

A. $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$　　C. $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$　　D. $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

解：$3^a=4^b=6^c\Rightarrow\begin{cases}a=\log_3 k\\ b=\log_4 k\\ c=\log_6 k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=\log_k 3\\ \frac{1}{b}=\log_k 4\\ \frac{1}{c}=\log_k 6\end{cases}$，

对于 A：$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow\log_k 6=\log_k 3+\log_k 4\Rightarrow\log_k 6=\log_k 12$，

对于 B：$\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow 2\log_k 6=2\log_k 3+\log_k 4\Rightarrow\log_k 36=\log_k 36$，成立，故选 B。

3、 $f(x)=\log_a(x-1)$ 恒过定点____________。

4、不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)>x^2-x+\frac{1}{2}$的解集为。

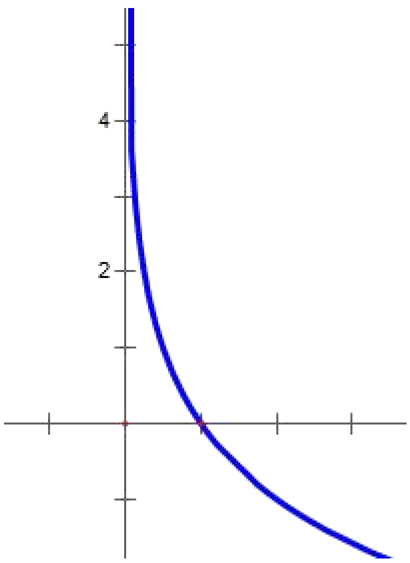
A. $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，0)∪(1，$\frac{1+\sqrt{3}}{2})$　　　　B.(－∞，$\frac{1-\sqrt{3}}{2})$∪$(\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，＋∞)

C. $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，0)　　　　D. (1，$\frac{1+\sqrt{3}}{2})$

解：代x＝1.1 可得$\log_{\frac{1}{2}}(1.21-1.1)>1.21-1.1+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}0.11>0.61$成立，故排除 B 和 C，

代x＝－0.1 可得$\log_{\frac{1}{2}}(0.01+0.1)>0.01+0.1+\frac{1}{2}$成立，选 A。



5、已知a＝0.3^3，b＝$3^{0.3}$，$c=\log_3 0.3$，$d=\log_{0.3}3$，则a,b,c,d的大小关系是＿＿＿＿＿。

解：$\log_3\frac{3}{10}<\log_3\frac{1}{3}=-1=\log_{\frac{3}{10}}\frac{10}{3}<\log_{\frac{3}{10}}3$，$0.3^3<0.3^0=1=3^0<3^{0.3}$。

6、$\log_a c$，$\log_b c$是方程x^2－3x＋1＝0 的两根，求$\log_{\frac{a}{b}}c$的值。

解：$\begin{cases}\log_a c+\log_b c=3\\ \log_a c\log_b c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c b}=3\\ \dfrac{1}{\log_c a}\dfrac{1}{\log_c b}=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_c a+\log_c b}{\log_c a\log_c b}=3\\ \dfrac{1}{\log_c a\log_c b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_c a+\log_c b=3,\\ \log_c a\log_c b=1\end{cases}$

$$\log_{\frac{a}{b}} c=\frac{1}{\log_c \frac{a}{b}}=\frac{1}{\log_c a-\log_c b}=\pm\frac{1}{\sqrt{(\log_c a-\log_c b)^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{(\log_c a+\log_c b)^2-4\log_c a\log_c b}}=\pm\frac{1}{\sqrt{9-4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}。$$

7、已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数。

(1)、求 m 的值；

(2)、判断 $f(x)$ 在(1，＋∞)的单调性；

(3)、当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，若对于任意 $x\in[3,4]$，$f(x)>(\dfrac{1}{2})^x+b$ 恒成立，求 b 的取值范围。

解：(1)、是奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$

$$\Rightarrow\log_a\frac{1+mx}{-x-1}=-\log_a\frac{1-mx}{x-1}\Rightarrow\log_a\frac{1+mx}{-x-1}=\log_a\frac{x-1}{1-mx}$$

$$\Rightarrow\frac{1+mx}{-x-1}=\frac{x-1}{1-mx}\Rightarrow 1-m^2x^2=1-x^2,$$

比较系数可知 $m=1$(舍去)或 $m=-1$。

(2)、$f(x)=\log_a\dfrac{x+1}{x-1}=\log_a\dfrac{x-1+2}{x-1}=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$，

若 $a>1$，$y=x-1$ 在(1，＋∞)单调递增，

$y=\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，$y=1+\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，

$y=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$ 在(1，＋∞)单调递减；

若 0＜a＜1，y＝x－1 在(1，＋∞)递增，

$y=\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，$y=1+\dfrac{2}{x-1}$ 在(1，＋∞)递减，

$y=\log_a(1+\dfrac{2}{x-1})$ 在(1，＋∞)单调递增；

解：(3)、$f(x)>(\dfrac{1}{2})^x+b \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x>b$，

即 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 的最小值$>b$，

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}$ 和 $y=-(\dfrac{1}{2})^x$ 在(1，＋∞)都单调递增，

故 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 在(1，＋∞)单调递增，

故 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{x-1}-(\dfrac{1}{2})^x$ 的最小值为：

$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3+1}{3-1}-(\dfrac{1}{2})^3=-1-\dfrac{1}{8}=-\dfrac{9}{8}$，故 $-\dfrac{9}{8}>b$。

复习思考题、作业题：

$f(x)=\log_a(x-1)+6$ 恒过定点________。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　8　周	课　次	第　9　次
章　节 名　称	第二章　函数与极限 2.1、映射与函数		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	1
教　学 目　的 要　求	理解映射与函的概念。		
教　学 方　法	讲解法、讨论法		
教　学 重　点 难　点	重点：认识基本初等函数。 难点：理解邻域。		

教学步骤及内容：

第二章　函数与极限

2.1、映射与函数

教学目的：理解映射与函的概念。

教学重点：认识基本初等函数。

教学难点：理解邻域。

一、集合

1、集合：具有某种特定性质的事物的总体叫做集合。组成这个集合的事物称为该集合的元素. 用 A，B，C，D 表示集合；用 a，b，c，d 表示集合中的元素，元素与集合的关系：$a \notin A$　　$a \in A$。

一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；

不是有限集的集合称为无限集。

2、集合的特性：确定性、无序性、互异性，举例。

(1)、元素的确定性：

A={1,2,3}
A={全国大于 50 公斤的人}
A={很帅的人}

(2)、元素的互异性：

A={3，6，8}
A={1，2，1}

(3)、元素的无序性：{1,2,3}={3,1,2}。

3、注意研究的对象：

$\{x|y=\sqrt{x-2}+3\}=\{大于等于2的所有数\}$

$\{y|y=\sqrt{x-2}+3\}=\{大于等于3的所有数\}$

4、几个常见的集合。

$R=\{所有实数\}$

$Q=\{所有有理数\}$

有理数：有限小数或无限循环小数，即 $\frac{q}{p}$， $q,p\in Z$。

无理数：无限不限循环小数，例 π， $\sqrt{}$

$Z=\{所有整数\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$

$N=\{自然数\}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$N^*=\{正整数\}=\{1,2,3,\cdots\}$

5、表示方法：

(1)、列举法： 把集合的全体元素一一列举出来。

例如 A={a, b, c, d, e, f, g}。

(2)、描述法： 例如 M={x|x>5 }。

(3)、常见的数集：N，Z，Q，R，N^+。

(4)、集合与集合的关系：A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$。如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。若作 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 则称 A 是 B 的真子集。空集 ϕ： $\phi\subset A$。

6、集合的运算

并集 $A\cup B$ ： $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}\in\mathrm{A}或x\in B\}$。

交集 $A\cap B$ ： $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}\in\mathrm{A}且x\in B\}$。

差集 $A\setminus B$： $A\setminus B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$。

二、区间与邻域

1、区间：开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开半闭区间 $(a,b]$， $[a,b)$，有限、无限区间。

2、邻域：以 a 为中心的 δ 邻域：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ (开区间)

去心邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$。

三、函数

1、函数的概念：设数集 $D\subset$R，则称映射 f ： D $\to$R 为定义在 D 上的函数，通常简记为 y=$f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。

2、 函数的两个要素：定义域、对应法则。

3、常见的几种函数：常量函数： $y=2$

绝对值函数： $y=|x|$；

符号函数 $y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

取整函数 $y=[x]$ ；

分段函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$。

4、函数的几种特性

(1)、函数的有界性 (上界、下界；有界、无界) 有界的充要条件：既有上界又有下界。

(2)、函数的单调性 (单增、单减)。

(3)、函数的奇偶性(定义域对称、 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关系决定图形特点 (关于原点、 y 轴对称) 。

(4)、函数的周期性(定义域中成立： $f(x+l)=f(x)$)。

5、基本初等函数：

(1)、幂函数：$y=x^a$。

(2)、指数函数：$y=a^x$ 。

(3)、对数函数 $y=\log_a(x)$。

(4)、三角函数：$y=\sin(x), y=\cos(x), y=\tan(x)$。

6、初等函数：

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数， 例如：

$$y=\sqrt{1-x^2}，\quad y=\sin^2 x, \quad y=\sqrt{tg\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数。

复习思考题、作业题：下列关系中，表示正确的是（ ）。

A、$1\in\{0,1\}$ B、$1 \subseteq \{0,1\}$

C、$1\subseteq\{0,1\}$ D、$\{1\}\in\{0,1\}$

解：1 是集合的元素，要用$\in$，子集用$\subseteq$。

下次课预习要点

教 学 后 记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 8 周</td><td>课 次</td><td colspan="3">第 10 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="5">2.2、函数的极限</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="3">理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>1</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="5">理解函数的极限的概念。</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="5">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="5">重点：用定义求证函数的极限。

难点：函数的极限的$\varepsilon-\delta$定义。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

2.2、函数的极限

教学目的：理解函数的极限的概念。

教学重点：用定义求证函数的极限。

教学难点：函数的极限的$\varepsilon-\delta$定义。

揭示数学中蕴含的哲学思想，培养哲学思维品质

数列极限的ε-N 定义及性质。

知识点对应的思政元素

让学生感受、领悟数学概念本身所蕴含的辩证对立统一思想；以退为进，以柔克刚；用已知的近似值去逼近未知的精确值，从而达到培养学生哲学思维品质教育目的。

一、引例

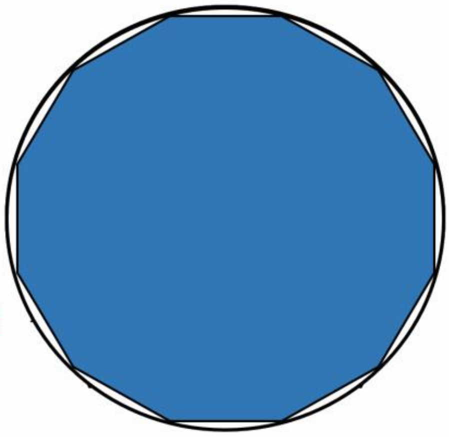
例 1 刘徽“割圆求周” 马克思主义辩证法

数列$\{a_n\}$:

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

n 趋于无穷大时,

a_n无限逼近圆的周长.



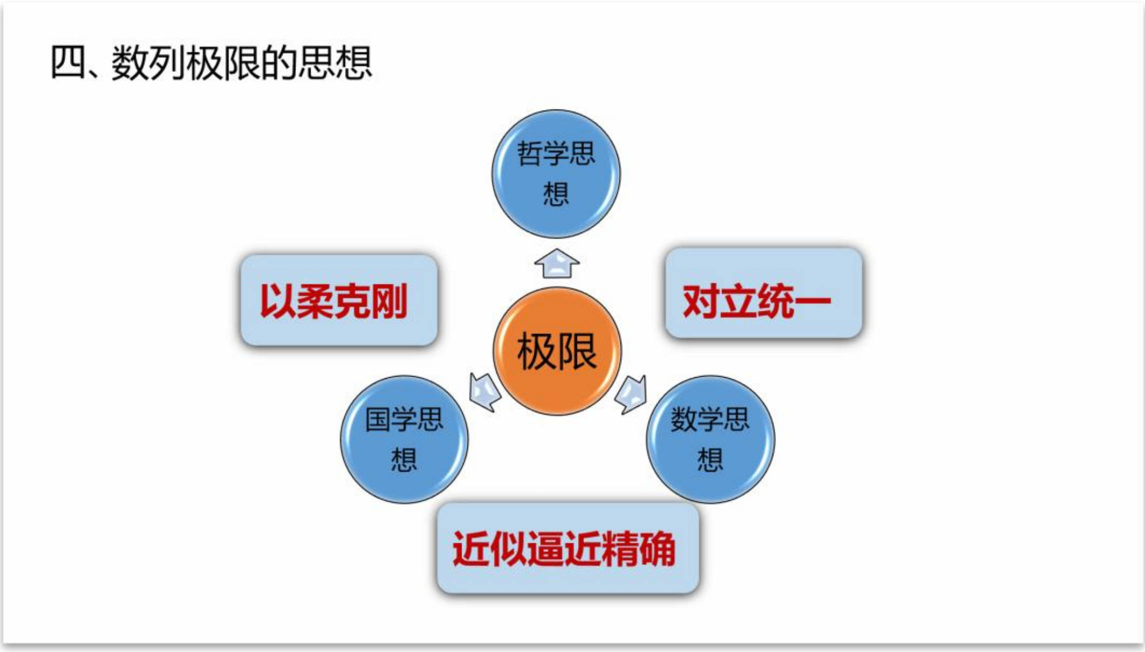
三、“$\varepsilon-N$”定义中两个关键符号

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$$

2. 符号 N

$\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$: 数列极限研究的是数列在 n 趋于无穷大时的变化趋势,

关注的是“远方”, 而不是前 N项



一、 $x \to x_0$时， 函数 $f(x)$ 的极限

1、定义： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$， $\forall x$， 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， 有 $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ 。

注：(1)、x_0 可在函数的定义域内，也可不在，不涉及 f 在 x_0 有没有定义，以及函数值 $f(x_0)$ 的大小。只要满足：存在某个 $\rho > 0$ 使：

$(x_0 - \rho, x_0) \cup (x_0, x_0 + \rho) \subset D$ 。

(2)、如果自变量 x 趋于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 有一个总趋势-----以某个实数 A 为极限，则记为： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 。

2、几何意义：

例 1. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ 。

证明：这里$|f(x)-A|=|c-c|=0$,

因为$\forall \varepsilon>0$，可任取$\delta>0$， 当 $0<|x-x_0|<\delta$时， 有$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ 。

例 2、证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

分析：$|f(x)-A|=|x-x_0|$， 因此$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$|x-x_0|<\varepsilon$。

证明：因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

例 3、证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$。

分析：$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

证明: 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon/2\ \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$， 当 $0<|x-1|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$。

例 4. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

分析: 注意函数在 $x=1$ 是没有定义的, 但这与函数在该点是否有极限并无关系。

当 $x\neq 1$ 时， $|f(x)-A|=|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2|=|x-1|$， $\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$ ，只要$|x-1|<\varepsilon$ 。

证明: 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$时，有$|f(x)-A|=|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2|=|x-1|<\varepsilon$，

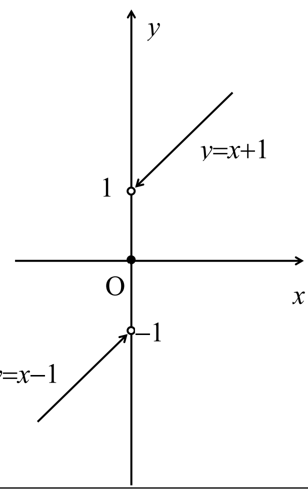
所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

3、单侧极限

若当 $x\to x_0^-$ 时， $f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，$\forall x$：$x_0-\delta<x<x_0$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

若当 $x\to x_0^+$ 时， $f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$，记为

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$， $\forall x$：$x_0<x<x_0+\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。



4、定理： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

例 5、函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限不存在。

这是因为，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，

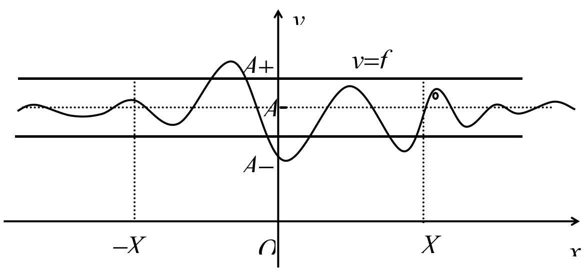
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$。

二、$x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1、定义：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists \mathrm{X}>0$，对于 $\forall x$，若 $|x|>X$，则 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$。

2、几何意义：



其中，直线 $y=c$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线。

3、定理：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

例 6、证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

分析：$|f(x)-A|=|\dfrac{1}{x}-0|=\dfrac{1}{|x|}$，$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

证明：因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|=|\dfrac{1}{x}-0|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

二、函数极限的性质

1、极限的唯一性

2、函数极限的局部有界性

3、函数极限的局部保号性

复习思考题、作业题：证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$。
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　9　周	课　次	第　11　次
章　节 名　称	2.3、无穷小与无穷大		

授课方式	理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	理解无穷小与无穷大的概念。		
教学方法	讲解法、讨论法		
教学重点难点	重点：无穷小与无穷大的转换。 难点：无穷小和无穷大的关系。		

教学步骤及内容：

2.3、无穷小与无穷大

教学目的：理解无穷小与无穷大的概念。

教学重点：无穷小与无穷大的转换。

教学难点：无穷小和无穷大的关系。

一、无穷小定义

1、定义：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小， 特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小。

$\lim\limits_{x\to t} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to t$ 时的无穷小。

例：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$， 故函数 $x-1$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，故数列 $\{\dfrac{1}{n+1}\}$ 为当 $n\to\infty$ 时的无穷小。

2、很小很小的数只要它不是零， 作为常数函数在自变量的任何变化过程中, 其极限就是这个常数本身，不会为零，故不是无穷小；

3、0 是无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to t}0=0$ 。

二、无穷大定义

1、定义： 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时， 对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，就称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大，记为：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)。

注：当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$，按函数极限定义来说，极限是不存在的，但为了便于叙述函数的这一性态， 我们也说“函数的极限是无穷大”， 并记作：

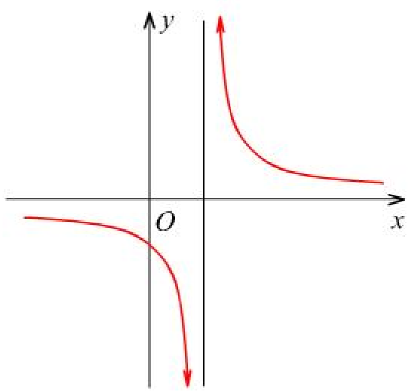
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$)

2、 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ 。

证：因为$\forall M>0, \exists\delta=\dfrac{1}{M}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有$|\dfrac{1}{x-1}|>M$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

提示: 要使$|\dfrac{1}{x-1}|=\dfrac{1}{|x-1|}>M$，只要$|x-1|<\dfrac{1}{M}$.



三、无穷小和无穷大的关系

定理：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$ 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

即：非零的无穷小量与无穷大量是倒数关系：

当 $x_n \neq 0$ 时，有： $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$$

注意是在自变量的同一个变化过程中。

4、求下列极限

(1)、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$

解：(1)、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 2+0=2$ 。

(2)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1+0=1$ 。

复习思考题、作业题：求极限： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+6}{2x}$ 。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　10　周	课　次	第　12　次

章　节 名　称	2.4、极限运算法则		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	能够对极限进行四则运算。		
教　学 方　法	讲解法、讨论法		
教　学 重　点 难　点	重点：极限运算的性质。 难点：复合函数的极限运算法则。		

教学步骤及内容：

2.4、极限运算法则

教学目的：能够对极限进行四则运算。

教学重点：极限运算的性质。

教学难点：复合函数的极限运算法则。

一、无穷小的性质

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是无穷小量于是：

1、两个无穷小量的和差也是无穷小量：

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0,\ \lim_{x\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{x\leftarrow\infty}(x_n \pm y_n) = 0$$

例：$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x + x)$

2、对于任意常数 C，数列$\{c\cdot x_n\}$也是无穷小量：

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(c\cdot x_n) = 0,$$

例：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

3、$\{x_n \cdot y_n\}$也是无穷小量，两个无穷小量的积是一个无穷小量。

$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$， $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$。

4、$\{|x_n|\}$也是无穷小量：

$\lim\limits_{x\to x_0} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |x_n| = 0$。

5、无穷小与有界函数的积为无穷小。

例：$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$。

二、函数极限的四则运算

1、若函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0有极限，则

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

2、函数$f(x)$在点x_0有极限，则对任何常数a成立

$\lim\limits_{x\to x_0}(a\cdot f(x)) = a\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

3、若函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0有极限，则

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

4、若函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0有极限，并且

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$。

注意：(1)、极限的四则运算成立的条件是若函$f(x)$和$g(x)$在点x_0有极限。

(2)、有理函数的极限$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$，

当$Q(x_0) \neq 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$，

当$Q(x_0)=0$且$P(x_0)\neq 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$，

当 $Q(x_0)=P(x_0)=0$ 时， 先将分子分母的公因式$(x-x_0)$约去。

例 1、 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1$。

例 2、 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}。$$

例 3、求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$。

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\dfrac{1}{6}$。

例 4、求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$，

根据无穷大与无穷小的关系得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$。

例 5、 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$。

解：先用x^3 去除分子及分母，然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}。$$

例 6、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$。

解：先用 x^3 去除分子及分母, 然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0。$$

例 7、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$。

例 8、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$。

解：当 $x\to\infty$时, 分子及分母的极限都不存在,

故关于商的极限的运算法则不能应用.

因为 $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x$, 是无穷小与有界函数的乘积,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$。

三、复合函数的极限运算法则

定理：设函数 $y=f[g(x)\}$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(u)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \overset{0}{u}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$。

例 1、求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 。

解：$y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 复合而成的，

因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to 6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$ 。

或解：$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}$ 。

习题

1、计算下列极限

(1)、$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$ 。

(2)、$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{3-3}{3+1}=0$

(3)、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$ 。

(4)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{0-0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$。

(5)、$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$。

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$。

(6)、$\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=2-0+0=2$。

(7)、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1-0}{2-0-0}=\dfrac{1}{2}$。

(8)、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{x}{x^4}}{1-3\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-3\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{0+0}{1-0+0}=0$。

(9)、$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$。

解：$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$。

(10)、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})$ 。

解： $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})=(1+0)(2-0)=2$ 。

(11)、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$ 。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1[1-0]}{\frac{1}{2}}=2$ 。

(12)、 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$ 。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$ 。

(13)、 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$ 。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{5}$

$=\frac{(1+0)(1+0)(1+0)}{5}=\frac{1}{5}$ 。

(14)、 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to 1}[\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{3}{1-x^3}]$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2} = \dfrac{-(1+2)}{1+1+1^2} = -1$。

3、计算下列极限

(1)、$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$。

解：$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$，而 $\sin \dfrac{1}{x}$ 是有界函数，即 $\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \le 1$，故 $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ 还是无穷小，

即 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$。

复习思考题、作业题：求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{3x^2 + 6x + 8}$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 11 周	课 次	第 13 次
章 节 名 称	2.5 极限存在准则和两个重要极限		
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握两个重要极限。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：两个重要极限的变形求法。 难点：理解两边夹定理。		

教学步骤及内容：

2.5 极限存在准则和两个重要极限

教学目的：掌握两个重要极限。

教学重点：两个重要极限的变形求法。

教学难点：理解两边夹定理。

一、夹逼准则：三数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$和$\{z_n\}$，如果从某项起：

(1)、 $y_n \le x_n \le z_n$；

(2)、 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

用夹逼准则证明证明第一个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$。

例 1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{1}$=3。

例 2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$。

二、单调有界数列必有极限：单调增加有上界的数列一定收敛；单调减少有下界的数列一定收敛。

根据此定理，可以证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$。

例 3、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$。

例 4、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x$。

解：令 $t=-x$，则 $x\to\infty$时，$t\to\infty$，于是

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\dfrac{1}{e}$。

或解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{-x})^{-x(-1)}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}$。

例 5、求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x(1-\dfrac{1}{x})$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x(-1)}1=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}\text{。}$$

例 6、求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

三、习题

1、计算下列的极限

(1)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\omega\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega\times 1=\omega$。

(2)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 3x}\dfrac{\sin 3x}{x}$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 3x}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\dfrac{1}{1}1=3$。

(3)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{5}\dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}\times 1\times 1=\dfrac{2}{5}$。

(4)、$\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\dfrac{x}{\sin x}=1\times 1=1$。

(5)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\times 1=2$ 。

(6)、 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ 。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x\times 1=x$ 。

2、计算下列的极限

(1)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}([1+(-x)]^{\frac{1}{-x}})^{-1}=e^{-1}$ 。

(2)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$ 。

(3)、 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}$ 。

解： $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\dfrac{1}{x})^{x}]^2=e^2$ 。

(4)、 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{1}{x})^{kx}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{1}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-k}=e^{-k}$。	
复习思考题、作业题：求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 6x}$。	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第 11 周	课 次	第 14 次
章节名称	第三章、导数与微分 3.1、导数概念		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	3
教学目的要求	掌握导数的概念。		
教学方法	讲解法、讨论法		
教学重点难点	重点：$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$。 难点：理解自变量增量 Δx 和因变量 Δy。		

教学步骤及内容：

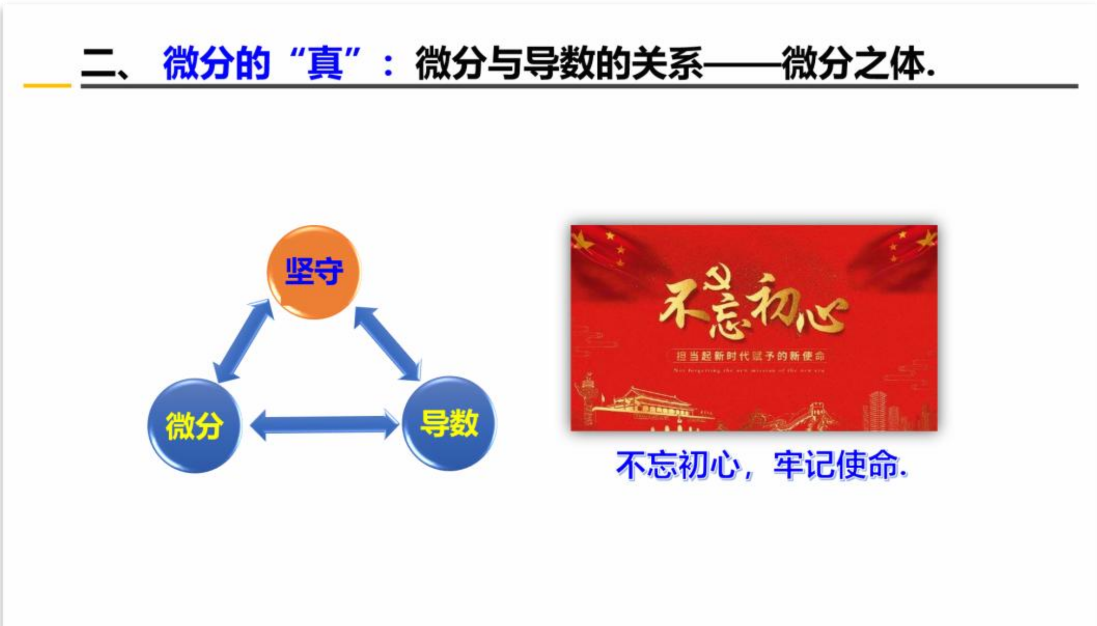
案例 1——展现数学中蕴含的真善美，激发探寻真理的热情

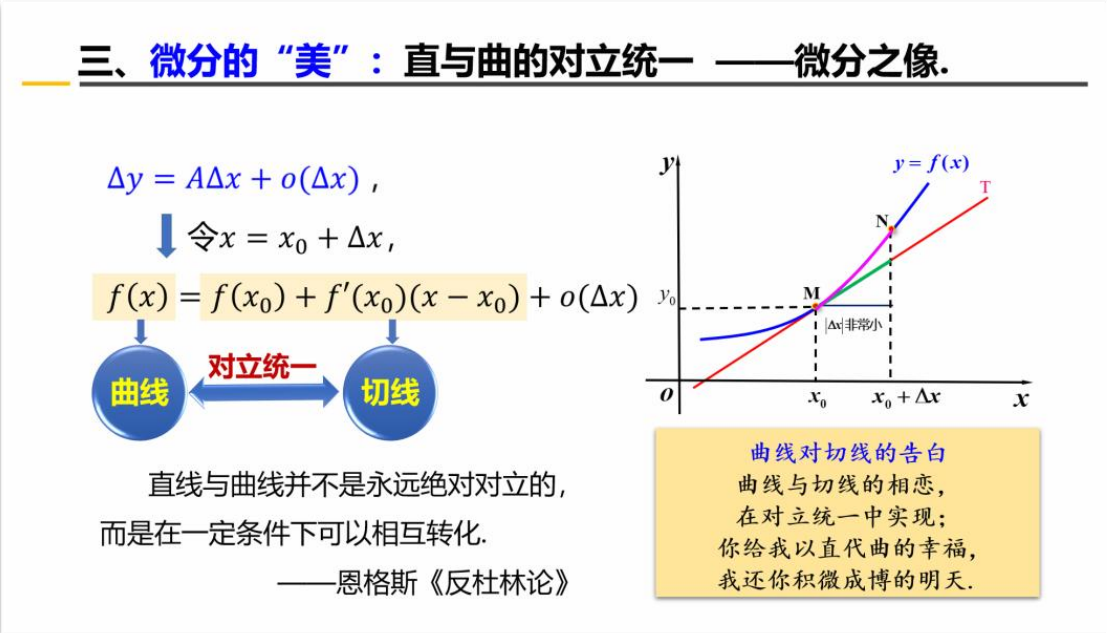
课程知识点介绍

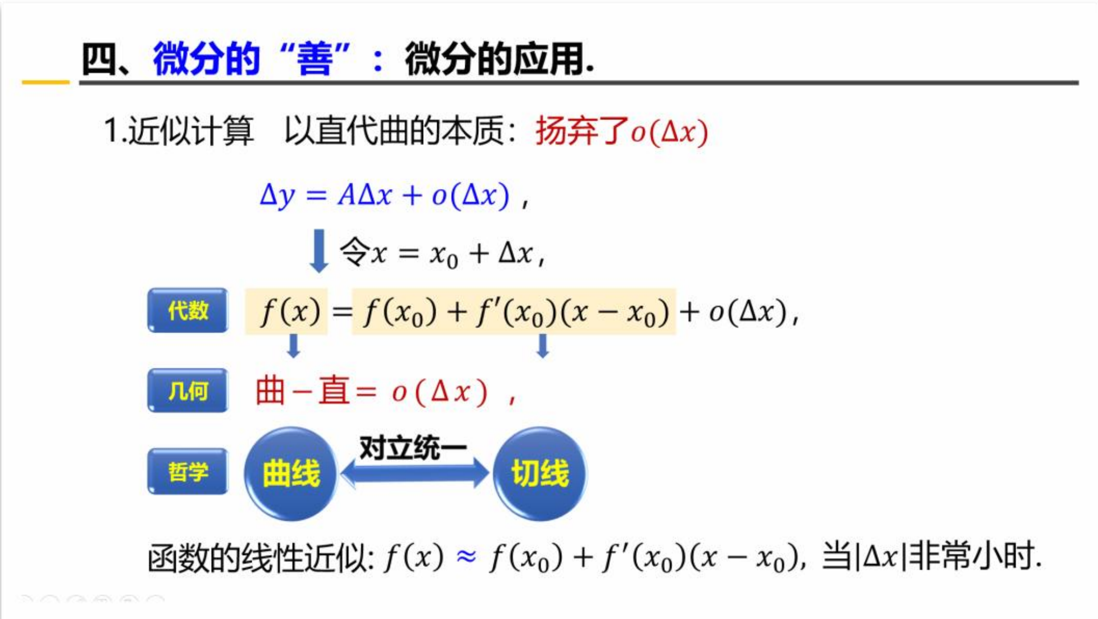
微分的概念，可微与可导的关系，微分的近似计算。

知识点对应的思政元素

可微即可导，而可导就是一种极限，就是一种不变性，不变性就是真；直线与曲线本来是对立的，但如果函数可微时，直线和曲线可以达到统一，直与曲的对立统一就是美，有了以直代曲，我们就可以应用微分解决实际的问题，微分的应用即为微分的善。引导学生全方位、多角度地分析观察微分定义，发现微分定义中蕴含的真善美，感染学生的心灵，引导学生发现事物最本质的奥秘，从而激发学生探寻真理热情。







案例 2——剖析数学中蕴含的特殊与一般关系，培养批判创新精神和爱国主义家国情怀

课程知识点介绍

三个微分中值定理。

知识点对应的思政元素

通过三个中值定理的关系展示从特殊性出发，不断打破平衡，冲破限制，放宽条件，就会得到更有普遍意义的结论，从而使得理论得以进步和升华，引申到个人和民族，让学生明白只有不断发展与进步，我们的民族才能在世界上立于不败之地。通过介绍微分中值定理是联系导数与函数的桥梁，为学生介绍珠港澳大桥及 “一带一路”政策，增加学生的民族自豪感。通过分析微分中值定理中 ξ 点的性质，联系实际，讲述生活中默默无闻奉献者，激发学生的爱国情怀。

关系

罗尔中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 柯西中值定理

罗尔中值定理 ← 拉格朗日中值定理：特例：$f(a)=f(b)$

拉格朗日中值定理 ← 柯西中值定理：特例：$F(x)=x$

- **数学意义**：

  打破樊笼 → 理论的进步

- **现实意义**：

  打破现状 → 发展和进步

珠港澳大桥

一带一路

第三章、导数与微分

3.1、导数概念

教学目的：掌握导数的概念。

教学重点：$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$ 。

教学难点：理解自变量增量Δx和因变量Δy 。

一、导数概念

1、定义：

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\Delta x)-\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\Delta x}$$ 。

$f(x)$在x_0的左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

$f(x)$在x_0的右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

2、$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$。

注：如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

3、导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0，f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角。

4、曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0，y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

过切点 $M(x_0，y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线方程为：

$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

例 1、求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数。

解：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$，

即 $(C)'=0$，介绍书中的求导基本公式。

例 2、求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数。

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=1$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

例 3、求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程。

解：$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，所求切线及法线的斜率分别为 $k_1=(-\dfrac{1}{x^2})|_{x=\frac{1}{2}}=-4$，$k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{4}$，

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$，

所求法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$。

例 4、设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ ax+b & x>0 \end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a、b。

解：$(e^x)'=e^x$，$(ax+b)'=a$，故 $e^0=a\Rightarrow a=1$，

可导肯定连续，故 $e^0=a0+b\Rightarrow b=1$。

二、函数的可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在，则

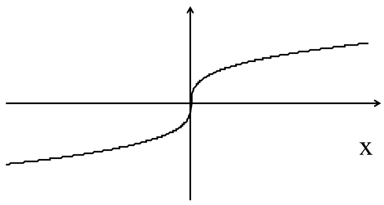
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0\ ，$$

这就是说，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处是连续的， 所以，如果函数 $y=f(x)$在点 x 处可导，则函数在该点必连续。

另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点处可导。

例 5、 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty，+\infty)$内连续，但在点 $x=0$ 处不可导，这是因为函数在点 $x=0$ 处导数为无穷大

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=+\infty\ 。$$



三、导数的计算

1、导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

2、设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于(　)。

A、$f'(1)$　　B、$3f'(1)$　C、$\dfrac{1}{3}f'(1)$　　D、$f'(3)$

解：$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(1)$。

3、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=-f'(1)=-2$。

4、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$

$=2f'(1)=4$。

5、函数 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$。

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)+f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$

$=2f'(1)=4$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$

$=2f'(1)$

6、已知 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$ 等于____。

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$

$=\dfrac{5}{4}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1-3\Delta x)+5\Delta x]-f(1-3\Delta x)}{5\Delta x}=\dfrac{5}{4}\ f'(1)=\dfrac{5}{2}$。

复习思考题、作业题：设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$ 等于( )。

A、$f'(1)$　B、$2f'(1)$　C、$\dfrac{1}{2}f'(1)$　D、$f'(3)$

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 12 周	课 次	第 15 次	
章 节 名 称	3.2、函数的求导法则			
授 课 方 式	理论课（ √ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	6
教 学 目 的 要 求	掌握函数导数的计算。			
教 学 方 法	讲解法、讨论法			
教 学 重 点 难 点	重点：求导法则。 难点：复合函数的求导。			

教学步骤及内容：

3.2、函数的求导法则

教学目的：掌握函数导数的计算。

教学重点：求导法则。

教学难点：复合函数的求导。

一、导数四则运算法则

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$都可导，则

(1)、$(u \pm v)'=u'\pm v'$,

(2)、$(C\,u)'=C\,u'$,

(3)、$(u\,v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$,

(4)、$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

二、复合函数的求导法则

如果 $u=g(x)$在点 x 可导，函数 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导，且其导数为：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$。

三、基本初等函数的倒数

(1)、$(c)'=0$　　(2)、$(x^n)'=nx^{n-1}$

(3)、$(e^x)'=e^x$　　(4)、$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(5)、$(\sin x)'=\cos x$　　(6)、$(\cos x)'=-\sin x$

例 1、$f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$及 $f'(\frac{\pi}{2})$。

解：$f'(x)=3x^2-4\sin x$，故 $f'(\frac{\pi}{2})=3(\frac{\pi}{2})-4\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi^2}{4}-4$。

例 2、$y=e^x\sin x$，　求 y'。

解：$f'(x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$。

例 3、$y=\tan x$ ，求 y'。

解：$y'=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$。

例 4、求的 $f(x)=\sin x\cos x$ 导数。

解：$f'(x)=\sin' x\cos x+\sin x\cos' x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$。

例 5、求的 $f(x)=\frac{\ln x}{\cos x}$ 导数。

解：$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cos x-(\cos x)'\ln x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{x}\cos x+\sin x\ln x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\sin x\ln x}{x\cos^2 x}$。

例 6、 $y=\dfrac{1}{\cos x}$，求 y'。

解： $y'=(\dfrac{1}{\cos x})'=(\cos^{-1}x)'=-1\cos^{-2}x(\cos x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$。

例 7、 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求 y'。

解： $y'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'=2e^x\cos x$。

例 8、求导 $f(x)=(x^2+2x)e^x+\cos x$。

解： $f(x)=(x^2+2x)'e^x+(x^2+2x)(e^x)'+(\cos x)'$

$=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x-\sin x=(x^2+4x+2)e^x-\sin x$。

例 9、求导 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+\sin x$。

解： $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}+(\sin x)'$

$=\dfrac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}+\cos x=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2\ln x}{x^3}+\cos x$。

例 10、求 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sin x}+x^{25}+3$ 的导数。

解： $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\sin x-(\sin x)'\ln x}{\sin^2 x}+25x^{24}=\dfrac{\sin x-x\cos x\ln x}{x\sin^2 x}+25x^{24}$。

例 11、求 $f(x)=e^x\ln x+\tan x$ 的导数。

解： $f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'+(\dfrac{\sin x}{\cos x})'$

例 12、求下列函数的导数：

(1)、 $y = x \cdot \tan x$；　　(2)、 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

解：(1)、 $y' = x'\dfrac{\sin x}{\cos x} + x(\dfrac{\sin x}{\cos x})' = \tan x + x(\dfrac{\sin x}{\cos x})'$

$= \tan x + x\dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \tan x + x\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$；

(2)、 $y' = \dfrac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

或 $y = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1} = 1 + 2(x-1)^{-1}$，

$y' = 1' - 2(x-1)^{-2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$。

例 13、设 $f\left(x\right) = x\mathrm{e}^x$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，则 $f'\left(1\right)$ 的值为(　　)。

A. e　　B. $\mathrm{e}+1$　　C. $2\mathrm{e}$　　D. e+2

解： $f\left(x\right) = x\mathrm{e}^x$ 的导函数为 $f'\left(x\right) = x'\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$，

所以 $f'\left(1\right) = (1+1)\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$，故选 C。

例 14、求下列函数的导数：

(1)、 $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$；　　(2)、 $y = \left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)$。

解：(1)、 $y' = 4x^3 - 6x - 5$；

(2)、 $y' = \left(x+1\right)'\left(x+2\right)\left(x+3\right) + \left(x+1\right)\left(x+2\right)'\left(x+3\right) + + \left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)'$

$= \left(x+2\right)\left(x+3\right) + \left(x+1\right)\left(x+3\right) + \left(x+1\right)\left(x+2\right)$

$= x^2 + 5x + 6 + x^2 + 4x + 3 + x^2 + 3x + 2$

$= 3x^2 + 12x + 11$。

例 15、 $y = e^{2x}$，求 y'。

解：令 t =2x，则 $y' = (e^{2x})' = e^t t' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$。

例 16、 $y=e^{x^2}$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(e^{x^2})'=e^t t'=e^{x^2}(x^2)'=2xe^{x^2}$。

例 17、 $y=\ln 2x$，求 y'。

解：令 $t=2x$，则 $y'=(\ln 2x)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{1}{x}$。

或解： $y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$，故 $y'=(\ln 2)'+(\ln x)'=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$。

例 18、 $y=\ln x^2$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(\ln x^2)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{x^2}(x^2)'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$。

或解： $y=\ln x^2=2\ln x$，故 $y'=2\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$。

例 19、 $y=\sin 2x$，求 y'。

解：令 $t=2x$，则 $y'=(\sin 2x)'=t'\cos t=(2x)'\cos 2x=2\cos 2x$。

例 20、 $y=\cos x^2$，求 y'。

解：令 $t=x^2$，则 $y'=(\cos x^2)'=t'(-\sin t)=-(x^2)'\sin x^2=-2x\sin x^2$。

例 21、 $y=(x^3+2x^2+3x+6)^6$，求 y'。

解： $y'=6t^5t'=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(x^3+2x^2+3x+6)'$

$=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(3x^2+4x+3)$。

例 22、y=lnsin$x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：令 t=sinx，则 $y'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}$。

例 23、 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，求 y'。

解： $y'=[(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(1+[(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}]')=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x})']$

$$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}]$$

$$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}]。$$

例 24、$y=e^{x^3}$，求 y'。

解：$y'=(e^{x^3})'=(e^t)'t=e^{x^3}(x^3)'=3x^2e^{x^3}$。

例 25、$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 y'。

解：$y'=(\mathrm{s\,int})'(t)'=\cos\frac{2x}{1+x^2}(\frac{2x}{1+x^2})'$

$$=\frac{(2x)'(1+x^2)-2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}。$$

例 26、$y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 y'。

解：$y'=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1}(1-2x^2)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(-4x)=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$。

例 27、$y=\ln\cos(e^x)$，求 y'。

解：$y'=\frac{1}{\cos e^x}(\cos e^x)'=-\frac{1}{\cos e^x}\sin e^x(e^x)'=-\frac{e^x\sin e^x}{\cos e^x}$。

例 28、$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'。

解：$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$。

例 29、$f(x)=x^2e^x+\dfrac{\ln x}{x}+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+8$，求 $f'(1)$。

解：$f'(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'+\dfrac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}-\sin x+(x^{-\frac{1}{2}})'$

$=2xe^x+x^2e^x+\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\sin x-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，

故 $f'(1)=2e+e+1-\sin x-\dfrac{1}{2}=3e+\dfrac{1}{2}-\sin 1$。

例 30、$f(x)=x^{-3.8}e^{x-2}+\dfrac{2\ln x}{x^3}+\cos x\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}+8$，求 $(f(1))'$。

解：$(f(1))'=0$。

复习思考题、作业题：已知 $y=\cos x\sin x$，求 y'。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　13　周	课　次	第　16 次	
章　节 名　称	3.3、洛必达法则			
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）		教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	掌握利用洛必达法则求极限。			
教　学 方　法	讲解法、讨论法			
教　学 重　点 难　点	重点：多次用洛必达法则。 难点：判断哪些情况可以用洛必达法则。			

教学步骤及内容：

3.3、洛必达法则

教学目的：掌握利用洛必达法则求极限。

教学重点：多次用洛必达法则。

教学难点：判断哪些情况可以用洛必达法则。

未定形：如下的函数极限都是未定形：

1、$\frac{0}{0}$ 型：　　如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-x}$ 型：

2、$\frac{\infty}{\infty}$ 型：　　如：$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^a}$　　$a>0$

它们的计算不能用函数极限的四则运算法则，且它们只表示类型，没有具体意义。

1、$\frac{0}{0}$ $(\frac{\infty}{\infty})$型的洛必达法则 $x\to a$ (同理 $x\to\infty$)

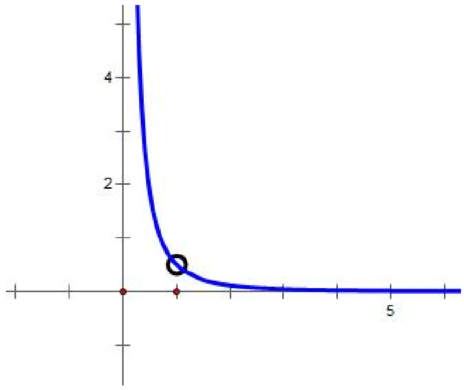
定理：对函数和，如果：

(1)、$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，　$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=0$

(2)、在某个邻域 $N(a,\delta)$ 内（$x>X$ 后）有导数 f' 和 g'，且 $g'(x)\neq 0$；

(3)、 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或无穷），则成立：$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。

例 1、$[\frac{\ln x}{x(x^2-1)}]'=\frac{\frac{x(x^2-1)}{x}-(3x^2-1)\ln x}{[x(x^2-1)]^2}$，



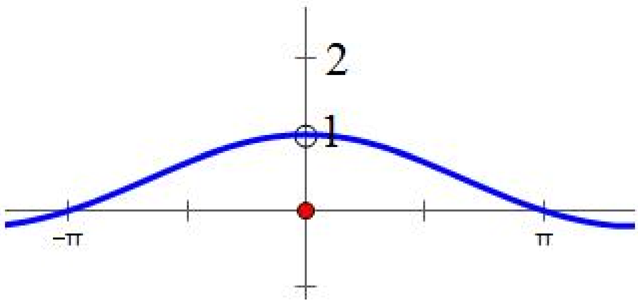
但 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2-1}=\frac{1}{2}$，

意思是 $f(x)=\frac{\ln x}{x(x^2-1)}$ 在 $x=1$ 处没意义，

但无穷接近 $\frac{1}{2}$。

例 2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$。

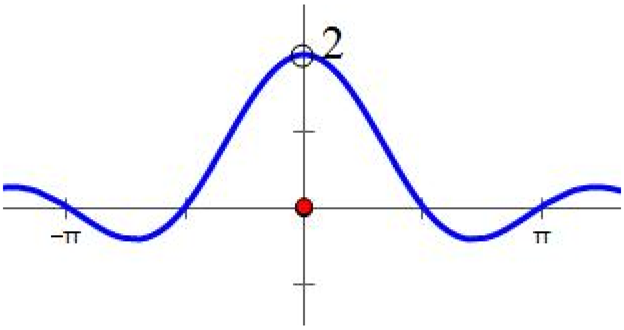
解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$。



意思是 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处没意义，但无穷接近 1。

例 3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1}=2$。



意思是 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ 在 $x=0$ 处没意义，但无穷接近 2。

例 4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$。

意思是 $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 在 $x=0$ 处没意义，但无穷接近 $\dfrac{1}{6}$。

例 5、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a\cos 0}{b\cos 0}=\dfrac{a}{b}$。

例 6、求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{6}{6-2}=\dfrac{3}{2}$。

例 7、求极限：$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{3x^3}=0$。

例 8、用洛必达法则求下列极限：

(1)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$； (2)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$。

解：(1)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1+0}=1$；

(2)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{e^{0}+e^{0}}{\cos 0}=\dfrac{1+1}{1}=2$。

例 9、用洛必达法则求下列极限：

(1)、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^{2}}$； (2)、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{6}-2^{6}}{x^{8}-2^{8}}$。

解：(1)、 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'}{2(\pi-2x)^{2-1}(\pi-2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{8x-4\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{-\sin^{2}x-\cos^{2}x}{\sin^{2}x}}{8}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-1}{8\sin^{2}x}=-\dfrac{1}{8}$；

(2)、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{6}-2^{6}}{x^{8}-2^{8}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x^{6\text{-}1}}{8x^{8\text{-}1}}=\dfrac{6\times 2^{5}}{8\times 2^{7}}=\dfrac{6}{8\times 2^{2}}=\dfrac{3}{16}$。

复习思考题、作业题：用洛必达法则求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x\cos x}$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　14　周	课　次	第　17 次	
章　节 名　称	3.4、导数与单调			
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）		教学 时数	1
教　学 目　的 要　求	导数与单调的关系。			
教　学 方　法	讲解法、讨论法			
教　学 重　点 难　点	重点：能够快速画出 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 和 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图像。 难点：讨论带参数的函数的单调性。			

教学步骤及内容：

3.4、导数与单调

教学目的：导数与单调的关系。

教学重点：能够快速画出 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 和 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图像。

教学难点：讨论带参数的函数的单调性。

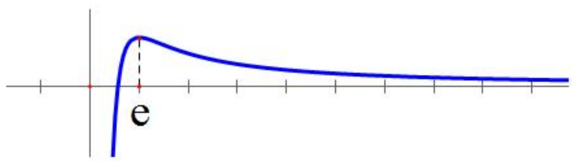
1、证明不等式：$e^x \ge x+1$。

解：即证 $f(x)=e^x-x-1$ 的最小值 ≥ 0，

$f'(x)=e^x-1=e^x-e^0$，可知 $x=0$ 是唯一极小值点，

故 $f_{\min}(x)=f(0)=e^0-0-1=0$，

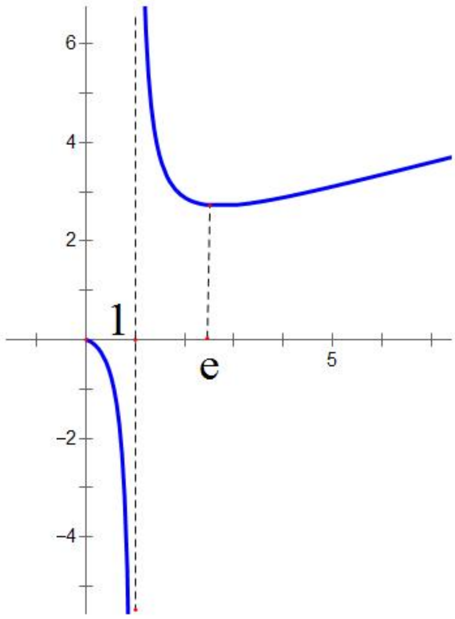
故 $e^x \ge x+1$。



2、求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间。

解：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{\ln e-\ln x}{x^2}$，故 $x=e$ 是唯一极大值点，在 $(0,e)$ 单调递增，在 $[e,+\infty)$ 单调递减；

3、求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的单调区间。



解： $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-\ln e}{\ln^2 x}$，

故在 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 上单调递减，在 $[e,+\infty)$ 单调递增。

4、已知函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+mx+n$。

(1)、若 $f(x)$ 的图像有与 x 轴平行的切线，求 m 的取值范围；

(2)、若 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极值，且 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)<n^2$ 恒成立，求 n 的取值范围。

解：(1)、 $f'(x)=3x^2-x+m$， $\Delta=1-12m\geq 0$，可得 $m\leq\dfrac{1}{12}$。

(2)、 $f'(1)=3-1+m=0$， $m=-2$，

解 $f'(x)=3x^2-x-2=0$ 可得： $x=-\dfrac{2}{3}$ 或 $x=1$。

x	-1	$(-1,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},1)$	1	(1,2)	2
$f'(x)$		+		—		+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

故： $f(-\dfrac{2}{3})=-\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{9}+2\dfrac{2}{3}+n=n+\dfrac{22}{27}$，

$f(2)=8-2-4+n=2+n$， 故有 $2+n<n^2$。

5、函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{8}{\cos\theta}$ 在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 的最小值。

解： $f'(x)=\dfrac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{8\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(2\sin\theta-\cos\theta)(4\sin^2+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

零点为$2\sin\theta=\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，代入$f(x)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{8}{\cos\theta}$可得$f_{\min}(x)=\sqrt{5}+8\dfrac{\sqrt{5}}{2}=5\sqrt{5}$

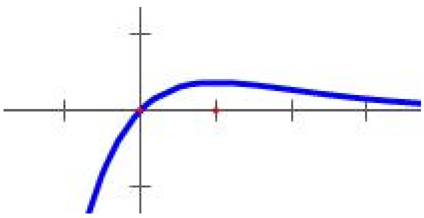
6、已知$f(x)=x^2+2xf'(-\dfrac{1}{3})$，则$f'(-\dfrac{1}{3})=$______。

解：$f'(x)=2x+2f'(-\dfrac{1}{3})\Rightarrow f'(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{2}{3}+2f'(-\dfrac{1}{3})$，

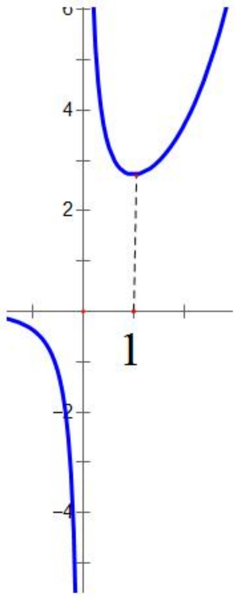
故$f'(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{2}{3}$。

7、求函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$的单调区间。

解：$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上递增，在$[1,+\infty)$上递减。



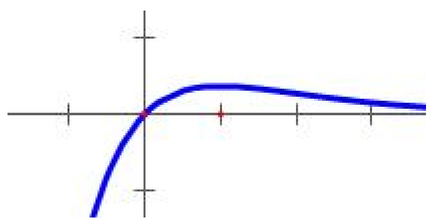
8、求函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$的单调区间。



解：$f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=e^x\dfrac{x-1}{x^2}$，

$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,1)$上递减，在$[1,+\infty)$上递增。

9、若$f(x)=kx-e^x$有零点，求k的取值范围。



解：$kx-e^x=0\Rightarrow\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{1}{k}$，设$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，

则$g'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$，故$g(x)$在$(0,1)$单调递增，

在$(1,+\infty)$单调递减，

故 $g_{\max}(x)=g(1)=\dfrac{1}{e}$，故 $0<\dfrac{1}{k}\le\dfrac{1}{e}\Rightarrow k\ge e$， 显然 $k<0$ 也是可以的。	
复习思考题、作业题：证明不等式：$x-1\ge\ln x$。 证明：即证 $f(x)=x-1-\ln x$ 的最小值 ≥ 0， $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，可知 $x=1$ 是唯一极小值点， 故 $f_{\min}(x)=f(1)=1-1-\ln 1=0$，故 $x-1\ge\ln x$。	
下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第 15 周	课 次	第 17 次		
章 节 名 称	3.5、函数的极值与最大值最小值				
授 课 方 式	理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学时数	2
教 学 目 的 要 求	求函数的最大值最小值。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：最大值和最小值的求法。 难点：极值和最值的区别				

教学步骤及内容：

3.5、函数的极值与最大值最小值

教学目的：求函数的最大值最小值。

教学重点：最大值和最小值的求法。

教学难点：极值和最值的区别

一、函数的极值

1、极大(小)值的定义：如在 x_0 邻域内，恒有 $f(x)\le f(x_0)$，$\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值。

2、定理 1 (必要条件)设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么这函数在 x_0 处的导数为零，即 $f'(x_0)=0$。

简要证明：假定 $f(x_0)$是极大值，根据极大值的定义，在 x_0 的某个去心邻域内有 $f(x)<f(x_0)$，于是 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，同时

$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，从而得到 $f'(x_0)=0$ 。

3、驻点： 使导数为零的点(即方程$f'(x)=0$的实根)叫函数$f(x)$的驻点，定理 1 就是说：可导函数$f(x)$的极值点必定是函数的驻点，但的过来，函数$f(x)$的驻点却不一定是极值点。

二、函数极值的求法

1、第一充分条件：设函数$f(x)$在x_0连续，且在x_0的某邻域$\mathrm{U}(x_0,\delta)$内可导，

(1)、如果在$(x_0-\delta, x_0)$内$f'(x)>0$，在$(x_0, x_0+\delta)$内$f'(x)<0$，那么函数$f(x)$在x_0处取得极大值；

(2)、如果在$(x_0-\delta, x_0)$内$f'(x)<0$，在$(x_0, x_0+\delta)$内$f'(x)>0$，那么函数$f(x)$在x_0处取得极小值；

(3)、如果在$(x_0-\delta, x_0)$及$(x_0, x_0+\delta)$内 $f'(x)$的符号相同，那么函数$f(x)$在x_0处没有极值。

该定理也可简单地说成导数变号就有极值： 当x在x_0的邻近渐增地经过x_0时，如果$f'(x)$的符号由负变正，那么$f(x)$在x_0处取得极大值，如果$f'(x)$的符号由正变负，那么$f(x)$在x_0处取得极小值； 如果$f'(x)$的符号并不改变，那么$f(x)$在x_0处没有极值 (注: 定理的叙述与教材有所不同) 。

2、确定极值点和极值的步骤：

(1)、求出导数$f'(x)$；

(2)、求出$f(x)$的全部驻点和不可导点；

(3)、列表判断(考察$f'(x)$的符号在每个驻点和不可导点的左右邻近的情况，以便确定该点是否是极值点，如果是极值点，还要按定理 2 确定对应的函数值是极大值还是极小值)；

(4)、确定出函数的所有极值点和极值。

例 1、求函数$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$的极值。

解：(1)、$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 除$x=-1$外处处可导，且$f'(x)=\dfrac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}$；

(2)、令$f'(x)=0$，得驻点$x=1$， $x=-1$为$f(x)$的不可导点；

(3)、列表判断

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不可导	−	0	+
$F(x)$	↗	0	↘	$-3\sqrt[3]{4}$	↗

(4)、极大值为 $f(-1)=0$，极小值为 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$ 。

3、第二种充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，那么

(1)、当 $f''(x_0)<0$ 时， 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2)、当 $f''(x_0)>0$ 时， 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

三、函数的最值

1、极值与最值的关系：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数的最大值和最小值一定存在，函数的最大值和最小值有可能在区间的端点取得，如果最大值不在区间的端点取得，则必在开区间 (a, b) 内取得，在这种情况下，最大值一定是函数的极大值，因此，函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值一定是函数的所有极大值和函数在区间端点的函数值中最大者，同理，函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最小值一定是函数的所有极小值和函数在区间端点的函数值中最小者。

2、最大值和最小值的求法：

(1)、求出 $[a，b]$ 内可能的极值点，不需判别极大还是极小，求出它们的函数值，再与端点的函数值进行比较，其中最大的(小)为最大(小)值。

(2)、在 $(a，b)$ 内可能极值点唯一，如是极小值则为最小值；如是极大值则为最大值。

(3)、如 $f'(x)>0$，则 $f(a)$ 是最小值， $f(b)$ 是最大值。

(4)、实际问题据题意可不判别。

例 2、求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在 $[-3, 4]$ 上的最大值与最小值。

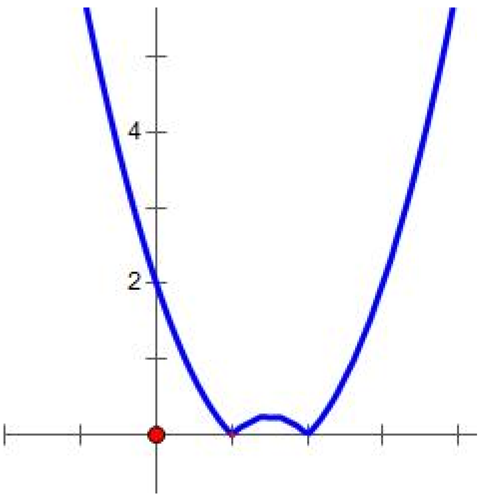
解、$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$，

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$，

在$(-3, 4)$内，$f(x)$的驻点为$x=\dfrac{3}{2}$，

不可导点为x=1 和x=2。

由于$f(-3)$=20，$f(1)$=0，$f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{4}$，$f(2)$=0，$f(4)$=6，比较可得$f(x)$在$x$=−3 处取得它在[−3, 4]上的最大值 20，在x=1 和x=2 处取它在[−3, 4]上的最小值 0。



例 3、求$f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$的极值点与极值。

解：$f'(x)=2x-\dfrac{432}{x^2}=\dfrac{2x^3-432}{x^2}=2\dfrac{x^3-216}{x^2}=2\dfrac{(x-6)(x^2+6x+36)}{x^2}$

故$x\in(-\infty,6)$时，$f'(x)<0$；$x\in(6,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以x=6 是$y=f(x)$的极小值点。

另解：显然$f'(6)=0$，又$f''(x)=2+\dfrac{864}{x^3}$，故$f''(6)>0$，故$x=6$是极小值点。

复习思考题、作业题：求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值。

解：$f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}$，故$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

解$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}>0$，可得$x>1$或$x<0$，

故 x=0 是极大值点，x=1 是极小值点。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第 15 周	课 次	第 18 次
章 节 名 称	第四章 不定积分 第一节 不定积分的概念与性质		
授 课 方 式	理论课（√ ）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	1
教 学 目 的 要 求	掌握不定积分的概念		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：理解并记住基本积分表。 难点：求基础函数的积分。		

教学步骤及内容：

第四章 不定积分

4.1、不定积分的概念与性质

教学目的：掌握不定积分的概念。

教学重点：理解并记住基本积分表。

教学难点：求基础函数的积分。

一、原函数与不定积分的概念

1、原函数

在区间 I 上，如 $F'(x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的导函数，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，

如：因为 $(\sin x)'=\cos x$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数。

又如当 $x\in(1,+\infty)$ 时，因为 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $\sqrt{x}$ 是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数。

提问：$\cos x$ 和 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 还有其它原函数吗？

1：$f(x)$ 的任意两个原函数之间只差一个常数，

即如果$\Phi(x)$和 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,

则$\Phi(x))-F\ (x)=C$　(C 为某个常数)。

2：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$，

那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数，$F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的全体原函数。

3：原函数与导函数是一种互逆关系。

2、不定积分

$f(x)$ 在 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$，根据定义，如果 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即 $\int f(x)dx = F(x)+C$。

其中记号$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量。

例 1、 因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数，所以$\int \cos x dx = \sin x + C$；

因为$\sqrt{x}$ 是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的原函数， 所以$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$。

例 2、求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分。

解：当 $x>0$ 时，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$ (x>0)；

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$，$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$ (x<0)，

合并上面两式， 得到$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ($x\neq 0$)。

例 3、在下列等式中，正确的结果是 C

A、$\int f'(x)dx = f(x)$　　　B、$\int df(x) = f(x)$

C、$\frac{d}{dx}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$　　　D、$d\int f(x)dx = f(x)$

二、基本积分表

(1)、$\int kdx = kx + C$ (k 是常数),

(2)、$\int x^{\mu}dx = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$,

(3)、$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$,

(4)、$\int e^{x}dx = e^{x} + C$,

(6)、$\int \cos xdx = \sin x + C$,

(7)、$\int \sin xdx = -\cos x + C$。

例 3、求$\int \frac{1}{x^3}dx$。

解：$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$。

或解：$(x^{-2})' = -2x^{-3} \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^{-2})' = x^{-3}$

$\Rightarrow (-\frac{1}{2}x^{-2})' = x^{-3}$，即$(-\frac{1}{2x^2})' = \frac{1}{x^3}$，故$\int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2} + C$。

例 4、求$\int x^2\sqrt{x}dx$。

解：$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$。

或解：$(x^{\frac{7}{2}})'=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow\frac{2}{7}(x^{\frac{7}{2}})'=x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})'=x^{\frac{5}{2}}$，

即$\int x^{\frac{5}{2}}dx==\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$。

例 5、求$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$。

解：$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{4}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=-3x^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$。

或解：$(x^{-\frac{1}{3}})'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow-3(x^{-\frac{1}{3}})'=x^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow(-3x^{-\frac{1}{3}})'=x^{-\frac{4}{3}}$，

即$\int x^{-\frac{4}{3}}dx==-3x^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$。

例 6、求$\int\sqrt{x\sqrt{x}}(1-\frac{1}{x^2})dx$。

解：$\int\sqrt{x\sqrt{x}}(1-\frac{1}{x^2})dx=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}(1-\frac{1}{x^2})dx$

$=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$。

三、不定积分的性质

性质 1、函数的和的不定积分等各个函数的不定积分的和，

即$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$。

这是因为：$[\int f(x)dx+\int g(x)dx]'=[\int f(x)dx]'+[\int g(x)dx]'=f(x)+g(x)$。

性质 2、求不定积分时，被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来，

即$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k 是常数, $k\neq0$)。

例 7、求$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$。

解：$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx$

$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx \quad = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$。

例 8、求$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$。

解：$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx = \int (x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx$

$= \int xdx - 3\int dx + 3\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C$。

例 9、求$\int (e^x - 3\cos x)dx$。

解：$\int (e^x - 3\cos x)dx = \int e^x dx - 3\int \cos x dx = e^x - 3\sin x + C$。

例 10、求$\int 3e^x dx$。

解：$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + C$。

复习思考题、作业题：

作业：求$\int (1+2x+3x^2+4e^x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　16　周</td><td>课　次</td><td colspan="2">第　18 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="4">4.2、换元积分法</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="2">理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="4">通过换元计算积分。</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="4">讲解法、讨论法</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="4">重点：把一个函数换为一个变元。

难点：构造哪个函数为导数的形式。</td></tr>
</table>

教学步骤及内容：

4.2、换元积分法

一、第一类换元法

设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 可微，那么，根据复合函数微分法，有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

$=[F(u)+C]_{u=\varphi(x)}=F[\varphi(x)]+C$。

1.运算形式 设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$

$=\int f(u)du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$。

被积表达式中的 dx 可当作变量 x 的微分来对待，从而微分等式 $\varphi'(x)dx=du$ 可以应用到被积表达式中。

在求积分 $\int g(x)dx$ 时，如果函数 $g(x)$ 可以化为 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式，

那么 $\int g(x)dx=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$。

2.应用技巧 运用第一类换元积分法时，准确的选定中间变量 $u=\varphi(x)$ 为做题的关键，采用换 $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$ 的技巧。

例 1、$\int 2\cos 2xdx = \int \cos 2x \cdot (2x)'dx = \int \cos 2xd(2x)$

$= \int \cos udu = \sin u + C$=sin 2$x$+$C$。

例 2、$\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}(3+2x)'dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d(3+2x)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$。

例 3、$\int 2xe^{x^2}dx$。

解：$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}(x^2)'dx = \int e^{x^2}d(x^2) = \int e^u du$

$= e^u + C = e^{x^2} + C$。

例 4、$\int x\sqrt{1-x^2}dx$。

解：$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}dx^2$

$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$。

例 5、$\int \tan xdx$。

解：$\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u|+C$

$=-\ln|\cos x|+C$ ，

即$\int \tan xdx = -\ln|\cos x|+C$。

类似地可得$\int \cot xdx = \ln|\sin x|+C$。

熟练之后，变量代换就不必再写出了。

例 6、$\int \frac{1}{x^2-1}dx$。

解：$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx = \frac{1}{2}[\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx]$

$= \frac{1}{2}[\int \frac{1}{x-1}d(x-1) - \int \frac{1}{x+1}d(x+1)] = \frac{1}{2}[\ln|x-1| - \ln|x+1|] + C$

$= \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + C$。

即 $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + C$。

例 7、$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$。

解：$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \int \frac{(\ln x)'dx}{1+2\ln x} = \int \frac{d\ln x}{1+2\ln x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C$。

例 8、$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$。

解：$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{3\sqrt{x}}(\sqrt{x})'dx = 2\int e^{3\sqrt{x}}d\sqrt{x}$

$= \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d3\sqrt{x} = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$。

含三角函数的积分:

例 9、$\int \sin^3 x dx$。

解：$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x$

$= -\int (1-u^2)du = -\int 1du + \int u^2 du = -u + \frac{1}{3}u^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$。

例 10、 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

解：$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x(\cos^4 x)\cos x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x(\sin x)' dx$

$= \int \sin^2 x \cos^4 x d\sin x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x$

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d\sin x = \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du$

$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$。

复习思考题、作业题：

作业：$\int 2x(e^{x^2} + x^2 + x^4 + \sin x^2) dx$。

解：$\int 2x(e^{x^2} + x^2 + x^4 + \sin x^2) dx$

$= \int (x^2)'(e^{x^2} + x^2 + x^4 + \sin x^2) dx$

$= \int (e^{x^2} + x^2 + x^4 + \sin x^2) dx^2$

$= \int (e^u + u + u^2 + \sin u) du$

$= e^u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \cos u + C$

$= e^{x^2} + \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2)^3 - \cos x^2 + C$

$= e^{x^2} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \cos x^2 + C$。

下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 17 周	课 次	第 19 次		
章 节 名 称	4.3、分部积分法				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	教学目的：通过分部积分法求积分。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：掌握分部积分法公式。 难点：掌握被积的两个函数要哪一个构造为导数的形式。				

教学步骤及内容：

4.3、分部积分法

设函数 $u=u(x)$及 $v=v(x)$具有连续导数，那么，两个函数乘积的导数公式为 $(uv)'=u'v+uv'$，移项得 $uv'=(uv)'-u'v$，对这个等式两边求不定积分， 得：

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx，$$

这个公式称为分部积分公式。$\int udv = uv - \int vdu$。

1、运算形式：$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$。

2、应用关键：准确的选择 u 函数为解题关键。

例 1、$\int x\cos xdx = \int x(\sin x)'dx$

$= x\sin x - \int (x)'\sin xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$ 。

例 2、$\int xe^x dx$。

解：$\int xe^x dx = \int x(e^x)'d = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$。

例 3、$\int x^2 e^x dx$。

解：$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$

$= x^2 e^x - 2\int x(e^x)' dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2\ ) + C$。

例 4、$\int x \ln x dx$。

解：$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}\int (x^2)' \ln x d\ = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 (\ln x)' dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx\ = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$。

例 5、$\int x^2 \ln x dx$。

解：解：$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}\int (x^3)' \ln x dx = \frac{1}{3}[x^3 \ln x - \int x^3 (\ln x)' dx]$

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$。

例 6、求$\int e^x \sin x dx$。

解:$\int e^x \sin x dx = \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx = e^x \sin x - [e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' dx]$

$= e^x \sin x - [e^x \cos x + \int e^x \text{sin} x dx] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \text{sin} x dx$

所以，$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x (\sin x - \cos x) + C$。

例 7、求$\int e^{\sqrt{x}}dx$。

解：令 $x=t^2$，则 $dx=dt^2=2tdt$，

于是$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^t dt=2\int t(e^t)'dt=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+C$

$=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$。

例 8、求$\int x\sin xdx$。

解：$\int x\sin xdx=-\int x(\cos x)'dx=-[x\cos x-\int (x)'\cos xdx]$

$=-[x\cos x-\int \cos xdx]=-x\cos x+\int \cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$。

例 9、求$\int \ln xdx$。

解：$\int \ln xdx=\int (x)'\ln xdx=x\ln x-\int x(\ln x)'dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx$

$=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$。

复习思考题、作业题：作业、$\int x^3e^x dx$。

解：$\int x^3e^xdx=\int x^3(e^x)'dx=x^3e^x-\int (x^3)'e^xdx=x^3e^x-3\int x^2e^xdx$

$=x^3e^x-3\int x^2(e^x)'dx=x^3e^x-3[x^2e^x-\int (x^2)'e^xdx]$

$=x^3e^x-3x^2e^x+3\int 2xe^xdx=x^3e^x-3x^2e^x+6\int x(e^x)'dx$

$=x^3e^x-3x^2e^x+6[xe^x-\int (x)'e^xdx]=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6\int e^xdx$

$=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C$。

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　17　周	课　次	第　20 次		
章　节 名　称	第五章　定积分 5.1、定积分概念与性质				
授　课 方　式	理论课（ √ ）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	1
教　学 目　的 要　求	理解定积分的概念。				
教　学 方　法	讲解法、讨论法				
教　学 重　点 难　点	重点：定积分的性质及定积分中值定理 难点：定积分的概念				

教学步骤及内容：

第五章　定积分

5.1、定积分概念与性质

教学目的：理解定积分的概念。

教学重点：

教学难点：定积分的概念

一、曲边梯形的面积

1、曲边梯形：设函数 $y=f(x)$在区间$[a, b]$上非负、连续，由直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧称为曲边。

2、曲边梯形面积：

设函数 $y=f(x)$在区间$[a, b]$上非负、连续，求直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$
及曲线 $y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积。

(1)、用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间$[a，b]$分成 n 个小区间：

$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$[x_2, x_3]$，···，$[x_{n-1}, x_n]$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1，2，···，n)。

(2)、任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，以$[x_{i-1}, x_i]$为底的小曲边梯形的面积可近似为

$f(\xi_i)\Delta x_i$ (i=1，2，···，n)；

所求曲边梯形面积 A 的近似值为：$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

(3)、记$\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，

所以曲边梯形面积的精确值为$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

二、定积分定义

抛开上述问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，就抽象出下述定积分的定义。

1、定积分的定义：设函数$f(x)$在$[a, b]$上有界，

用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 把$[a, b]$分成 n 个小区间：

$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，···，$[x_{n-1}, x_n]$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i=1，2，···，n)，

任意$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (i=1，2，···，n)，作和$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记$\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当$\lambda \to 0$时，上述和式的极限存在，且极限值与区间$[a, b]$的分法和$\xi_i$的取法无关，则称这个极限为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，

记作$\int_a^b f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

其中$f(x)$叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a, b]$叫做积分区间。

根据定积分的定义，曲边梯形的面积为$A = \int_a^b f(x)dx$。

注意：

(1)、定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关，

即$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$。

(2)、和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为$f(x)$的积分和。

(3)、如果函数$f(x)$在$[a，b]$上的定积分存在，我们就说$f(x)$在区间$[a，b]$上可积。

2、定积分的几何意义：

在区间$[a，b]$上，

当$f(x)\geq 0$时，积分$\int_a^b f(x)dx$在几何上表示由曲线$y=f(x)$、两条直线$x=a$、$x=b$ 与x轴所围成的曲边梯形的面积：

当$f(x)\leq 0$时，由曲线$y=f(x)$、两条直线$x=a$、$x=b$ 与x轴所围成的曲边梯形位于x轴的下方, 定义分在几何上表示上述曲边梯形面积的负值。

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b[-f(x)]dx。$$

当$f(x)$既取得正值又取得负值时，函数$f(x)$的图形某些部分在x轴的上方，而其它部分在x轴的下方，如果我们对面积赋以正负号，在x轴上方的图形面积赋以正号，在x轴下方的图形面积赋以负号，则在一般情形下，定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义为：它是介于x轴、函数$f(x)$的图形及两条直线$x=a$、$x=b$之间的各部分面积的代数和。

函数$f(x)$在$[a，b]$上满足什么条件时，$f(x)$在$[a，b]$上可积呢？

3、定理 1：设$f(x)$在区间$[a，b]$上连续，则$f(x)$ 在$[a, b]$上可积。

4、定理 2：设$f(x)$在区间$[a，b]$上有界，且只有有限个间断点, 则$f(x)$ 在$[a，b]$上可积。

例 1、利用定义计算定积分$\int_0^1 x^2dx$。

解：把区间$[0, 1]$分成n等份，分点为和小区间长度为

$x_i=\frac{i}{n}(i=1，2，\cdots，n-1)$，$\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1，2，\cdots，n)$，

取$\xi_i=\frac{i}{n}(i=1，2，\cdots，n)$，作积分和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2\cdot\frac{1}{n}$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})，$$

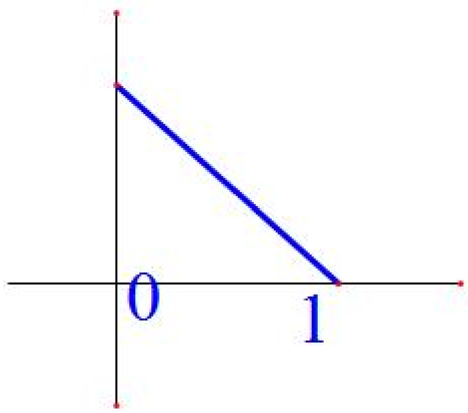
因为$\lambda=\frac{1}{n}$，当$\lambda\to 0$时，$n\to\infty$，

所以$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$。

利定积分的几何意义求积分。

例 2、用定积分的几何意义求 $\int_0^1 (1-x)dx$。

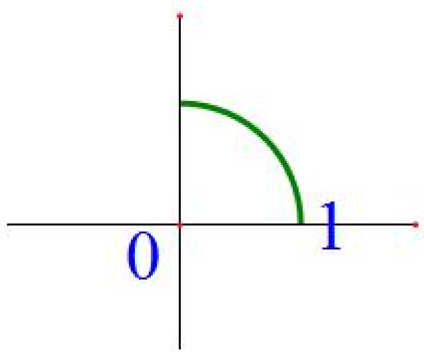
解：函数 y=1− x 在区间[0，1]上的定积分是以 y=1−x 为曲边，以区间[0, 1]为底的曲边梯形的面积，因为以 y=1−x 为曲边，以区间[0, 1]为底的曲边梯形是一直角三角形，其底边长及高均为 1，所以 $\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}$。



例 3、用定积分的几何意义求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$。

解：函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间[0，1]上的定积分是以 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为曲边，

和 x 轴、y 轴围成的面积，即四分之一圆多面积 $\frac{\pi}{4}$。



三、定积分的性质

两点规定：

(1)、当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = 0$。

(2)、当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$。

性质 1：函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差)，

即 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

证明：$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$ 。

性质 2：被积函数的常数因子可以提到积分号外面，

即 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，

证明：$\int_a^b kf(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$。

性质3：如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和，即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$。

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性。

值得注意的是不论 a，b，c 的相对位置如何总有等式：

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 成立，

例如，当 $a<b<c$ 时，由于 $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$，

于是有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$。

性质 4：如果在区间[a，b]上 $f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b 1dx=\int_a^b dx=b-a$ 。

性质 5：如果在区间[a，b]上 $f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0\,(a<b)$。

推论 1：如果在区间[a，b]上 $f(x)\leq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx\quad(a<b)$。

证明：$g(x)-f(x)\geq 0$，

从而 $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx\geq 0$，

所以 $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ 。

推论 2：$|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx\quad(a<b)$，

证明：$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$，

所以 $-\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|dx$，

即 $|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx$。

性质 6：设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$在区间[a，b]上的最大值及最小值，

则 $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)\quad(a<b)$。

证明：因为 $m\leq f(x)\leq M$，所以 $\int_a^b mdx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b Mdx$，

从而 $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$ 。

性质 7：(定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$在闭区间[a, b]上连续，则在积分区间[a，b]上至少存在一个点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，

这个公式叫做积分中值公式。

证明：由性质 6，$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$，

各项除以 $b-a$ 得 $m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M$，

再由连续函数的介值定理, 在[a，b]上至少存在一点 ξ,

使 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$， 于是两端乘以 $b-a$ 得中值公式：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$。 积分中值公式的几何解释： 应注意：不论 $a<b$ 还是 $a>b$，积分中值公式都成立。
复习思考题、作业题： 作业：用定积分的几何意义求 $\int_0^1 (x+2)dx$。
下次课预习要点

教学后记	

授课时间	第 18 周	课 次	第 21 次	
章节名称	5.2、微积分基本公式			
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学时数	2
教学目的要求	掌握定积分的计算。			
教学方法	讲解法、讨论法			
教学重点难点	重点：牛顿—莱布尼茨公式。 难点：计算曲线的和 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 围成的面积。			

教学步骤及内容：

5.2、微积分基本公式

一、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$在区间$[a，b]$上连续，并且设 x 为$[a，b]$上的一点，我们把函数 $f(x)$在部分区间$[a，x]$上的定积分 $\int_a^x f(x)dx$ 称为积分上限的函数，它是区间$[a，b]$上的函数，记为$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$，或$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$。

定理 1：如果函数 $f(x)$在区间$[a，b]$上连续，则函数$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ 在$[a，b]$上具有导数，并且它的导数为$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\ (a\le x<b)$。

简要证明：若 $x\in(a，b)$，取Δx 使 $x+\Delta x\in(a, b)$，

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)\Delta x,$$

应用积分中值定理，有$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x$，其中$\xi$在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，$\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，

于是$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$，

若 $x=a$，取$\Delta x>0$，则同理可证$\Phi_+'(x)=f(a)$；

若 $x=b$，取$\Delta x<0$，则同理可证$\Phi_-'(x)=f(b)$。

定理 2：如果函数 $f(x)$在区间[a，b]上连续，则函数$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$，

就是 $f(x)$在[a，b]上的一个原函数。

定理的重要意义：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，

另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系。

二、牛顿--莱布尼茨公式

定理 3：如果函数 $F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间[a，b]上的一个原函数，

则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，此公式称为牛顿--莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式。

这是因为 $F(x)$和$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 都是 $f(x)$的原函数，所以存在常数 C，

使 $F(x)-\Phi(x)=C$ (C 为某一常数)，

由 $F(a)-\Phi(a)=C$ 及$\Phi(a)=0$，得 $C=F(a)$，$F(x)-\Phi(x)=F(a)$，

由 $F(b)-\Phi(b)=F(a)$，得$\Phi(b)=F(b)-F(a)$，

即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

证明：已知函数 $F(x)$是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，又根据定理 2，

积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，也是 $f(x)$的一个原函数，于是有一常数 C，

使 $F(x)-\Phi(x)=C$ ($a\le x\le b$)，

当 $x=a$ 时，有 $F(a)-\Phi(a)=C$，而$\Phi(a)=0$，所以 $C=F(a)$；

当 $x=b$ 时，$F(b)-\Phi(b)=F(a)$，所以$\Phi(b)=F(b)-F(a)$，

即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

为了方便起见，可把 $F(b)-F(a)$记成$F(x)\Big|_a^b$，于是$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$。

进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系。

例 1、计算$\int_0^1 x^2dx$。

解：由于$\frac{1}{3}x^3$是 x^2 的一个原函数，所以$\int_0^1 x^2dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$。

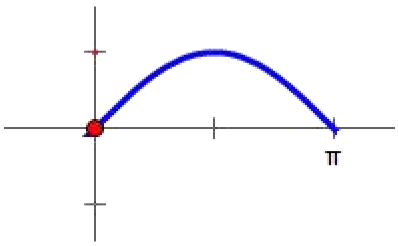
例 2、计算$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$ 。

解：$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}$ =ln 1−ln 2=−ln 2。

例 3、计算正弦曲线 y=sin x 在[0，π]上与 x 轴所围成的平面图形的面积。

解：这图形是曲边梯形的一个特例，它的面积为

$A=\int_{0}^{\pi}\sin xdx=(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=$−(−1)−(−1)=2。



例 4、求$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^3}dx$ 。

解：$\int_{1}^{2}\frac{1}{x^3}dx=\int_{1}^{2}x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{1}^{2}$

$=-\frac{1}{2}(2^{-2}-1^{-2})=-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-1)=\frac{1}{2}\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$。

例 5、求$\int_{0}^{4}x^2\sqrt{x}dx$ 。

解：$\int_{0}^{4}x^2\sqrt{x}dx=\int_{0}^{4}x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_{0}^{4}=\frac{2}{7}x^3x^{\frac{1}{2}}\Big|_{0}^{4}=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}\Big|_{0}^{4}$

$=\frac{2}{7}(4^3\sqrt{4}-0^3\sqrt{0})=\frac{2}{7}128=\frac{256}{7}$。

例 6、求$\int_{1}^{8}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ 。

解：$\int_{1}^{8}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int_{1}^{8}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx=\int_{1}^{8}x^{-\frac{4}{3}}dx=-3x^{-\frac{1}{3}}\Big|_{1}^{8}=-3\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\Big|_{1}^{8}=-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big|_{1}^{8}$

$$=-3(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}-\frac{1}{\sqrt[3]{1}})=-3(\frac{1}{2}-\frac{1}{1})=3\frac{1}{2}=\frac{3}{2}。$$

例 7、求 $\int_1^4\sqrt{x}(x^2-5)dx$。

解：$\int_1^4\sqrt{x}(x^2-5)dx=\int_1^4(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx=\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}dx-\int_1^4 5x^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_1^4-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{7}x^3x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4-\frac{10}{3}xx^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4$$

$$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}\Big|_1^4-\frac{10}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{7}(4^3\sqrt{4}-1^3\sqrt{1})-\frac{10}{3}(4\sqrt{4}-1\sqrt{1})$$

$$=\frac{2}{7}(128-1)-\frac{10}{3}(8-1)=\frac{254}{7}-\frac{70}{3}。$$

例 8、求 $\int_1^e\frac{(x-1)^3}{x^2}dx$。

解：$\int_1^e\frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int_1^e\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\int_1^e(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx$

$$=\int_1^e xdx-\int_1^e 3dx+\int_1^e\frac{3}{x}dx-\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e-3x\Big|_1^e+3\ln|x|\Big|_1^e+\frac{1}{x}\Big|_1^e$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1^2)-3(e-1)+3(\ln|e|-\ln|1|)+(\frac{1}{e}-\frac{1}{1})$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}-3e+3+3(1-0)+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{2}e^2-3e+\frac{1}{e}+\frac{9}{2}。$$

例 9、求 $\int_0^\pi(e^x-3\cos x)dx$。

解：$\int_0^\pi(e^x-3\cos x)dx=\int_0^\pi e^xdx-3\int_0^\pi\cos xdx$

$$=e^x\Big|_0^\pi-3\sin x\Big|_0^\pi=(e^\pi-e^0)-3(\sin\pi-\sin 0)=e^\pi-1。$$

<table>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：求$\int_1^2 3e^x dx$。

解：$\int_1^2 3e^x dx = 3\int_1^2 e^x dx = 3e^x \Big|_1^2 = 3(2^2 - 1^2) = 9$。</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

授课时间	第 18 周	课 次	第 22 次		
章 节 名 称	5.3、定积分的换元法和分部积分法				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学时数	2
教 学 目 的 要 求	利用换元法和分部积分法求定积分。				
教 学 方 法	讲解法、讨论法				
教 学 重 点 难 点	重点：定积分的换元后积分上下限要跟着换。 难点：区分要用换元积分法还是分部积分法。				

教学步骤及内容：

5. 3、定积分的换元法和分部积分法

一、定积分的换元积分法

1、定理：假设函数$f(x)$在区间$[a，b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

(1)、$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

(2)、$\varphi(t)$在$[\alpha,，\beta]$(或$[\beta，\alpha]$)上具有连续导数，且其值域不越出$[a，b]$，

则有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。 这个公式叫做定积分的换元公式。

证明：由假设知，$f(x)$在区间$[a，b]$上是连续，因而是可积的，

$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha，\beta]$ (或$[\beta，\alpha]$)上也是连续的，因而是可积的，

假设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，

另一方面，因为$\{F[\varphi(t)]\}'=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，

所以$F[\varphi(t)]$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数，

从而$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$，

因此，$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。

注：应用该方法时要注意换元的同时要换限。

例 1、计算$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$。

解：$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \overset{令 x=a\sin t}{=\!=\!=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t dt$

$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^2$。

提示: $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$，$dx$=$a$cos t，

当 $x=0$ 时 $t=0$，当 $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$。

例 2、计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx$。

解 令 t=cos x，则

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x d\cos x$

$\overset{令 \cos x=t}{=\!=\!=\!=} -\int_1^0 t^5 dt=\int_0^1 t^5 dt=[\frac{1}{6}t^6]_0^1=\frac{1}{6}$。

提示：当 x=0 时 t=1，当 $x=\frac{\pi}{2}$时 t=0。

或$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x d\cos x$

$=-[\frac{1}{6}\cos^6 x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{6}\cos^6\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\cos^6 0=\frac{1}{6}$。

例 3、计算$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$.

解：$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx \overset{令 \sqrt{2x+1}=t}{=\!=\!=\!=} \int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t dt=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3+3t]\Big|_1^3=\frac{1}{2}[(\frac{27}{3}+9)-(\frac{1}{3}+3)]=\frac{22}{3}$。

提示：$x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=tdt$；当 x=0 时 t=1，当 x=4 时 t=3。

例 4、证明：若 $f(x)$在$[-a, a]$上连续，则

(1)、若 $f(x)$为偶函数 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$，

(2)、若 $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$。

证明：因为 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$，

而 $\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{令x=-t}{=\!=\!=} -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$,

所以若 $f(x)$为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$= \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx = \int_{-a}^{a} 2f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$。

若 $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$，

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx = 0$。

例 5、若 $f(x)$在[0，1]上连续，证明：

(1)、$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

(2)、$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$。

证明：(1)、令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2} - t)]dt$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(\frac{\pi}{2} - t)]dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

(2)、令 $x=\pi-t$，则 $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt$

$= \int_{0}^{\pi} (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt = \int_{0}^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt$

$= \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt$

$= \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx - \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx$，

所以 $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$。

例 6、求解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx$。

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d2x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$。

例 7、求解：$\int_{-1}^{0} \frac{1}{3+2x} dx$。

解：$\int_{-1}^{0} \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{(3+2x)'}{3+2x} dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{3+2x} d(3+2x) = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln|t| \Big|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$。

例 8、求解：$\int_0^2 2xe^{x^2} dx$。

解：$\int_0^2 2xe^{x^2} dx = \int_0^2 (x^2)' e^{x^2} dx$

$= \int_0^2 e^{x^2} dx^2 = \int_0^4 e^t dt = e^t \Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$。

二、分部积分法

设函数 $u(x)$、$v(x)$在区间$[a，b]$上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，由$(uv)'=u'v+uv'$得 $uv'=uv-u'v$，式两端在区间$[a, b]$上积分得：

$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx$，或$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$，

这就是定积分的分部积分公式。

分部积分过程：$\int_a^b uv'dx = \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx$。

例 1、计算$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$。

解：令$\sqrt{x}=t$，则$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 e^t tdt=2\int_0^1 tde^t$

$=2[te^t]_0^1-2\int_0^1 e^t dt=2e-2[e^t]_0^1=2$。

例 2、计算$\int_0^1 xe^x dx$。

解：$\int_0^1 xe^x dx==\int_0^1 x(e^x)'dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 x'e^x dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 x'e^x dx$

$=(1e^1-0e^0)-\int_0^1 e^x dx=e^1-e^x\Big|_0^1=e^1-(e^1-e^0)=1$。

例 3、计算$\int_0^1 x^2e^x dx$。

解：$\int_0^1 x^2e^x dx=\int_0^1 x^2(e^x)'dx=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 (x^2)'e^x dx$

$=(1^2e^1-0^2e^0)-\int_0^1 2xe^x dx=e-2\int_0^1 x(e^x)'dx=e-2[xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 (x)'e^x dx]$

$=e-2[(1e^1-0e^0)-\int_0^1 e^x dx]$

$=e-2[e-\int_0^1 e^x dx]=-e+2\int_0^1 e^x dx=-e+2e^x\Big|_0^1=-e+2(e^1-e^0)$

$=-e+2e-2=e-2$。

例 4、计算$\int_1^e x\ln xdx$。

解：$\int_1^e x\ln xdx=\dfrac{1}{2}\int_1^e (x^2)'\ln xd=\dfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x^2(\ln x)'dx$

$=\dfrac{1}{2}(e^2\ln e-1^2\ln 1)-\dfrac{1}{2}\int_1^e x^2\dfrac{1}{x}dx$

$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\int_1^e xdx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}x^2\Big|_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{4}(e^2-1^2)=\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$。

例 5、计算$\int_1^e x^2\ln xdx$。

解：$\int_1^e x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int_1^e (x^3)'\ln xdx$

$=\frac{1}{3}[x^3\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^3(\ln x)'dx]$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^3\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx$

$=\frac{1}{3}(e^3\ln e-1^3\ln 1)-\frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3\Big|_1^e$

$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}(e^3-1^3)=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$。

例 6、求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$。

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)'dx=-[x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\cos xdx]$

$=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\cos xdx]$

$=-(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cos 0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$

$=-(0-0)+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$。

作业：$\int_0^3 2x(e^{x^2}+x^2+x^4+\sin x^2)dx$。

解：$\int_0^3 2x(e^{x^2}+x^2+x^4+\sin x^2)dx$

$=\int_0^3 (x^2)'(e^{x^2}+x^2+x^4+\sin x^2)dx$

$=\int_0^3 (e^{x^2}+x^2+x^4+\sin x^2)dx^2$

$=\int_0^9 (e^u+u+u^2+\sin u)du$

$=e^u\Big|_0^9+\frac{1}{2}u^2\Big|_0^9+\frac{1}{3}u^3\Big|_0^9-\cos u\Big|_0^9$

$=(e^9-e^0)+\frac{1}{2}(9^2-0^2)+\frac{1}{3}(9^3-0^3)-(\cos 9-\cos 0)$

$=e^9-1+\frac{81}{2}+243-\cos 9+1$

$=e^9+\frac{567}{2}-\cos 9$。

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	