揭阳职业技术学院

师范教育系

授课教案

（2025-2026 第一学期）

课程名称：　趣味数理化

班　　级：小学语文教育 241 班

授课教师：　　卢潮辉

授课时间	第 1 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	**课程综述**		
授 课 方 式	理论课	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1.理解趣味数学的形式; 2.了解生活中的数学现象，拓宽数学视野。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	1.重点：理解趣味数学的形式 2.难点：几个趣味数学问题的求解		

教学步骤及内容：

我们所学习的数学，比较注重方法与理论，具有内容抽象性，应用广泛性，逻辑严谨性，结论明确性的特点。

很多人不喜欢数学，是觉得数学枯燥难懂，其实不然，数学来自丰富多彩、不断发展的现实世界，它既不枯燥也不神秘，趣味性自在其中。

1.数学有趣吗？

数学好玩——陈省身

数学大师陈省身先生在 2002 年国际数学家大会期间，为少年儿童题词，写下了“数学好玩”四个字。也许有些人认为他是数学大师，懂得数学的奥妙，所以觉得好玩，我们凡夫俗子怎么能理解数学好玩呢？

数学的趣味性一般包括以下几个方面的内容：

（1）生动形象的数学问题。数学源于生活用于生活，只有将数字赋予一定的背景，才能更好理解数字背后的含义，引人探究。因此，为了增加趣味性，趣味数学题往往表达得比较复杂，或者非常生活化，或者形象生动。

例 1　可乐促销

有一天，一个小朋友去买了 10 瓶可乐，商店老板说：“喝完饮料后，每 3 个空饮料瓶可换 1 瓶饮料。” 请问这个小朋友最多可以喝到多少瓶饮料？　【解答】15 瓶

【分析】

我们按照实际换饮料过程分析：

喝掉 10 瓶饮料，用 10 个空瓶换回 3 瓶饮料，还剩 1 空瓶；

喝掉 3 瓶饮料，用 3 个空瓶换回 1 瓶饮料，又余 1 个空瓶；

喝掉 1 瓶饮料，此时，再借 1 个空瓶，与剩下的 2 个空瓶一起又可换回 1 瓶饮料，喝完后将空瓶还了。

所以，他共喝到饮料 10+3+1+1=15（瓶）。

这是生活中的例子，大多数趣味数学的题目以这种形式出现。

（2）巧妙的解题过程。一些不同于一般解题规律，而使用对于特殊技巧即可解决的数学难题也归于趣味数学之中。在中国的小学奥数考题中，这类趣题开始大量出现。

例 2　苏步青趣题

我国著名数学家苏步青教授有一次到德国去，碰到一位数学家，两人同坐一电车。这位数学家即兴出了一道题给苏教授：

甲乙两人相对而行，距离为 50 千米．甲每小时走 3 千米，乙每小时走 2 千米，甲带一只狗，狗每小时走 5 千米，狗跑得比人快，同甲一起出发，碰到乙后又往甲方向走，碰到甲后它又往乙方向走，这样继续下去，问直到甲乙两人相遇，这只狗一共走了多少千米？

苏教授略加思索，未等下车，就把答案告诉了这位德国数学家，你知道怎么算吗？

【一般解法】

我们设狗从甲出发第一次碰到乙时所用时间为 t_1，所走路程为 S_1；再往回跑第两次遇见甲所花时间为 t_2，所走路程为 S_2；这样依次有 t_3、S_3、t_4、S_4；……直到甲、乙两人相遇为止，此时有 t_n，S_n．显然狗所花时间为 $t_1+t_2+t_3…t_n$，所走路程为 $S_1＋S_2+S_3+…+S_n$．只要逐个算出，总能算出最终结果．这是通常的算法，然而决非好方法．

【巧妙解法】

狗不断地跑，从出发到甲、乙相遇为止，整整跑了 10 小时，而狗的速度是每小时 5 千米，所以一共 50 千米

（3）出人意料的结果。有些问题看似简单，看似没联系，结果却出人意料，常常给人心灵的震撼。

例 3 折纸问题

一张薄纸，不断对折，折 30 次后，纸叠得有多厚？

（4）娱乐化的数学形式。很多有趣活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的组织者例如：七巧板，九连环，华容道是我国三大古典智力游戏，不少人玩起来乐而不疲，但玩的人不一定知道，他们所玩的其实是数学。

1．巧切西瓜

一、教学目标

1．掌握竖切西瓜的规律

2．理解直线划分平面问题并进行拓展

3．了解切西瓜趣题

二、教学重难点

重点：竖切西瓜的规律

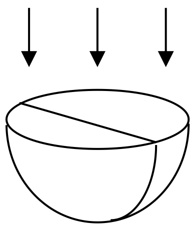
难点：平面划分问题到立体图形分割的推广

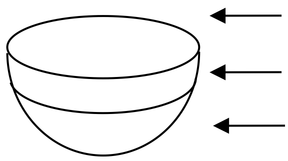
三、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

四、教学过程

现在有半个西瓜，平放在桌子上，由你来切。条件是只允许竖直地切，不允许横着切，也不允许斜着切。问问你：切两刀最多能把这半个西瓜切成几块？切三刀呢？





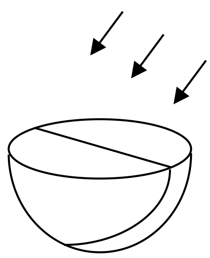


图 1-1 竖着切，可以！　　图 1-2 横着切，犯规！　　图 1-3 斜着切，也犯规！

解答：

让我们拿出一张纸，既然只能竖着切，那么用一个圆就可以表示半个西瓜，用一条直线就能表示每一刀怎么切，这样想就简单多啦，而不用拿着真的西瓜乱切了!

首先第一刀怎么切呢？我们画一下，就会发现原来第一刀怎么切都一样，只能将西瓜切成两块，如右图 1-4。

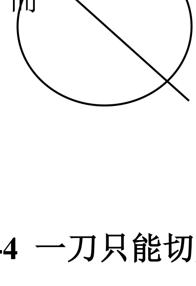


图 1-4 一刀只能切成两块

那么第二刀怎么切呢，我们可以想出两种切法。第一种切法如图 1-5，如果第二刀和第一刀不相交，只能把西瓜切成了三块；第二种切法如图 9-0-6，第二刀和第一刀相交，那么把西瓜切成了四块。经过试验小明知道了，竖着切两刀至多可以把西瓜切成四块！

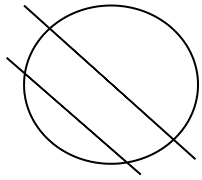


图 1-5 两刀可以切成 3 块

两刀的切法解决了，再解决三刀的切法就可以啦

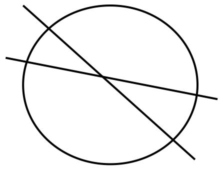


图 1-6 两刀最多切成 4 块

其实呢，三刀的切法在前两刀切法的基础上再切一刀就行了。只要我们继续试验，发现第三刀共有三种不同切法，第一种切法如图 1-7，第三刀与前两刀都不相交，结果切成了 5 块；第二种切法如图 1-8，第三刀只与前两刀中某一刀相交，结果切成了 6 块；第三种切法如图 1-9，第三刀与前两刀每一刀都相交，结果切成 7 块。

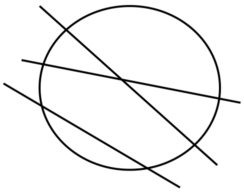


图 1-7 切成 5 块

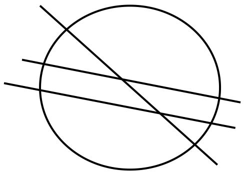


图 1-8 切成 6 块

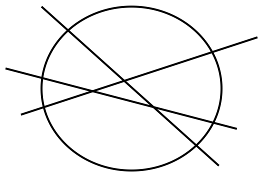


图 1-9 切成 7 块

原来，竖着切三刀最多可以将西瓜切成 7 块！

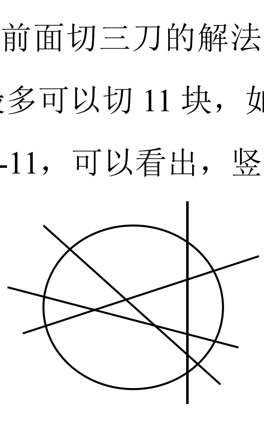
评论：如果想使切成的块数最多，切每一刀的时候就要使它和前面的每一刀都相交！

例 1 半个西瓜，竖着切 5 刀，最多能切多少块？竖直切 9 刀呢？

解答：

从前面我们的切法中可以知道，要想使切出的块数最多，就必须使每一刀都与以前每一刀尽量相交。

我们在前面切三刀的解法的基础上再切第四刀，并让第四刀与前三刀都相交，发现最多可以切 11 块，如图 1-10；然后再切第 5 刀，并且与前四刀也都相交，如图 1-11，可以看出，竖直切 5 刀，最多可以切成 16 块。



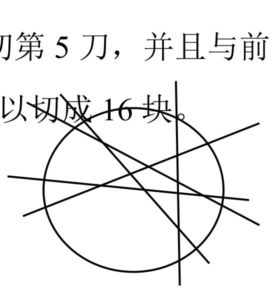


图 1-10　4 刀最多切成 11 块　　　　图 1-11　5 刀最多切成 16 块

5 刀的问题我们解决了，但是如果继续切到 9 刀，画图的难度似乎越来越大了。别着急，我们先回过头来观察一下已经得到的结论，看看有没有什么规律呢？

我们把竖直切的刀数和最多能切出的块数排列如下；

刀数	最多切的块数
0	1=1
1	1+1=2
2	1+1+2=4
3	1+1+2+3=7
4	1+1+2+3+4=11
5	1+1+2+3+4+5=16
…	…
n	1+（1+2+3+…+n）= ？

经过仔细观察分析，我们发现有这样的规律：

最多可以切出的块数 $= 1+1+2+3+\ldots+n$

在这里还有一个规律：$1+2+3+\ldots+n = (1+n)\times n\div 2$，你发现了没有？（以后我们会详细研究等差数列的，大家可不要小看等差数列呦）

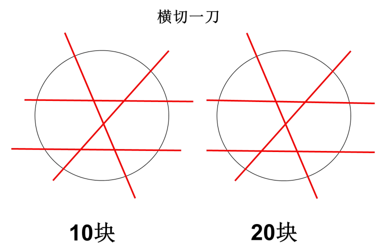
所以：最多可以切出的块数 $= 1+1+2+3+\ldots+n = (1+n)\times n\div 2 + 1$

有了这个规律，我们就不用去切 9 刀或者画 9 刀了，我们可以直接算出来，竖着切 9 刀最多可切出的块数为：

$1+（1+9）\times 9\div 2 = 1 + 45 = 46$（块）

注意：我们这个规律只适合竖着切的情况，其他情况（横着切或斜着切）就不成立了！

例 2　一个西瓜切 5 刀要切成 20 块，如何切？



解答：竖着切 4 刀，最多可以得到 11 块，再横切一刀，分成相等的两部分，因此最多可以得到 22 块。可如图 1-12 所示：

图 1-12

练习：

1．一块月饼，要切成 11 块，竖着切最少要切几刀？

2． 一块月饼，要切成 20 块，竖直切最少要切多少刀？

3． 你能把一块豆腐切 3 刀，切成 8 小块吗？怎样切？

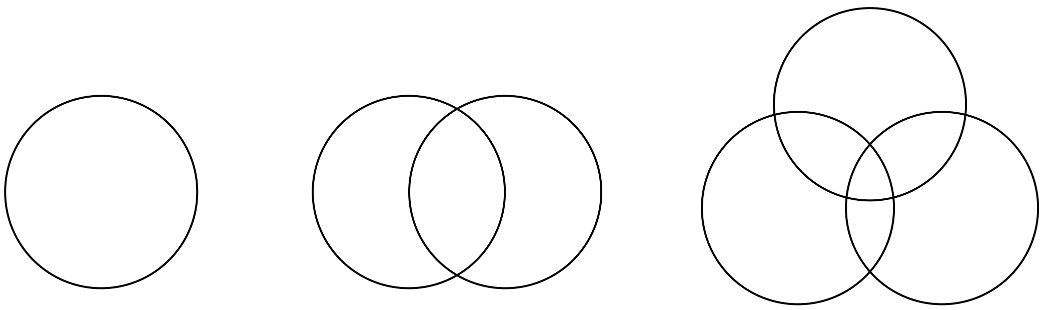
4． 小明过生日，要把一个大蛋糕分成 12 块，想一想，小明要怎样切，最少切几刀？

5．爸爸下班回家带回一只大西瓜，爸爸给儿子小斌出了道难题：这只西瓜只切四刀，把它切成 9 块，吃完以后出现 10 块西瓜皮，怎么切?

例 3： 三个完全一样的圆，最多可以将平面分成几部分？

分析：

切西瓜的问题可以看成是直线划分平面的问题，仿照例 1 的思路，仍然从一个圆的简单情形开始考虑，做出图形来参考，如下图分别为一个、二个、三个相同的圆最多可以将平面分成几部分。发现与例题非常类似，新画的圆和原来的圆交点越多，划分出的部分越多。如图可知三个同样的圆最多可以将平面分成 8 部分。



练习：

6．两个完全一样等边三角形，可以把一个平面分成多少个部分？最多呢？

7．两个同样大小的正方形，最多能将平面分成多少个区域？

8．一个长方形，用剪刀剪下一个角，还剩多少个角？

2． 火柴棒趣题

一、教学目标

1． 掌握如何用火柴棒摆数字及算式

2． 掌握移动火柴棒改变图形

3． 理解如何数图形

二、教学重难点

重点：1.移动火柴棒使等式成立

　　　2． 移动火柴棒改变图形形状

难点：移动两根火柴棒使等式成立

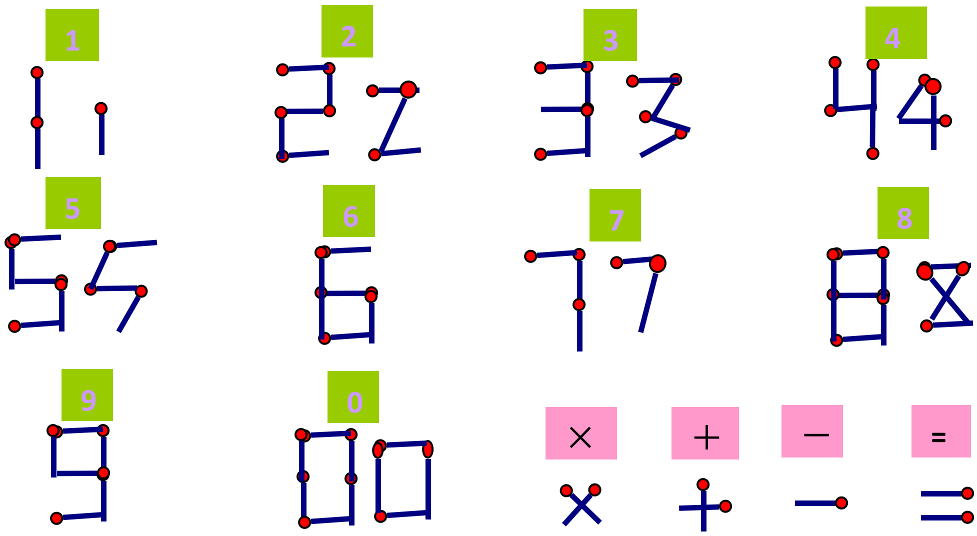
三、教学方法

动手操作，计算机辅助

四、教学过程

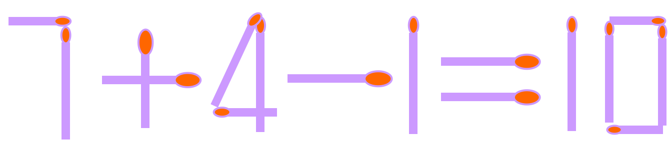
（一）用火柴棒摆算式

（1）用火柴棒摆 0¯9 这几个数字，以及运算符号



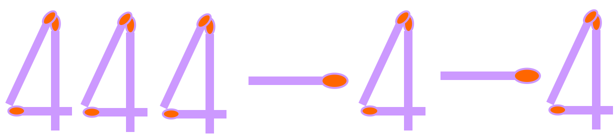
（2）移动一根火柴

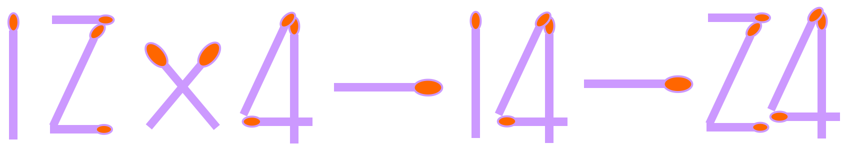
[例 1] 下面这个火柴算式是成立的。请移动一根火柴，仍能得到一个正确的算式。



[例 2] 移动一根或两根火柴棍使下列各算式分别成为一个等式。

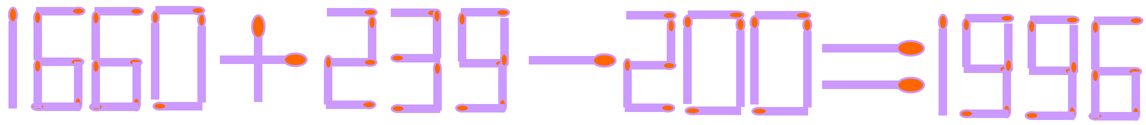
（1）

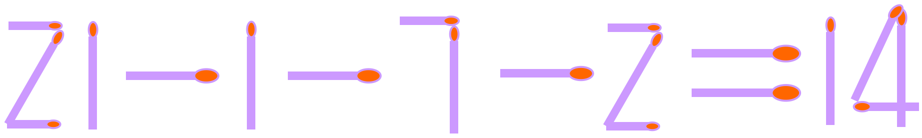


（2）

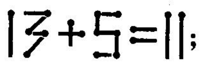
（3）移动两根火柴

[例 3]　1）在下面算式中移动两根火柴棍，使等式成立。



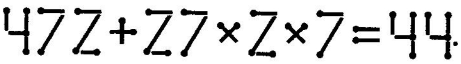
2）

练习：1.移动一根火柴，使下面的等式成立。

(1) 

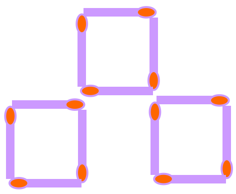
(2) 

(3) 

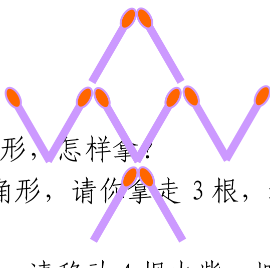
(4) 

（二）图形转换

[例 4]　　下图是由 12 根火柴组成的三个正方形，你能移动三根火柴棒使图中出现 7 个正方形吗？



[例 5]　用 10 根火柴棍摆成向上飞的蝙蝠图形，如图所示。试移动三根火柴，使它变成向下飞的蝙蝠图形。

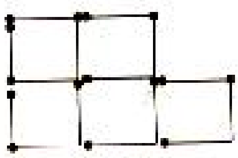


练习：

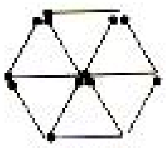
2.如图：拿掉 3 根火柴，使它变成 3 个正方形，怎样拿？

3.用 12 根火柴棒，摆成 6 个大小一样的三角形，请你拿走 3 根，还剩下 3 个大小一样的三角形

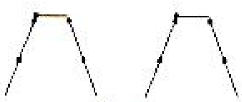
4.如下图，由火柴棒摆了两只倒扣着的杯子，请移动 4 根火柴，把杯口正过来。



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3．分饼干问题

一、教学目标

1．掌握比例分配法

2．利用方程合理分配

二、教学重难点

重点：按比例分配问题

难点：设而不求的未知数

三、教学方法

启发讲授式、计算机辅助

四、教学过程

【1 分饼干】

把 5 块饼干平均分给 6 个小朋友，可是不能把任何一块饼干切成六等份，应该怎么分？

分析：P30

问题推广：把 5 张纸平均分给 8 个学生，又不要把任何一张纸分成 8 等份，应该怎么分？

【2 分马】

有一位阿拉伯老人，生前养有 11 匹马，他去世前立下遗嘱：大儿子、二儿子、小儿子、分别继承遗产的 1/2，1/4，1/6。儿子们想来想去没法分，只好请教他们的舅父，舅父很快就解决了问题。你知道他们的舅父是如何分的吗？

分析一：

聪明的舅父牵来了自己的 1 匹马，对他们说："你们看，现在有 12 匹马了，老大得 12 匹的 1/2，就是 6 匹中，老二得 12 匹的 1/4 就是 3 匹，老三得 12 匹的 1/6 就是 2 匹，还剩下一匹我照样牵回家去。

分析二：

因为 1/2：1/4：1/6=6:3:2， 现在有 12 匹马了，老大得 6 匹，老二得 3 匹，老三得 2 匹。

【3 分零食】

幼儿园的老师们捧着 3 只纸箱，给小朋友送零食。大纸箱有 74 个橘子，中纸箱装 200 块饼干，小纸箱装 120 颗糖。平均分发后，纸箱剩 2 个橘子，12 糖和 20 块饼干。问共有几位小朋友？

分析：P30

【4 分奖品】

学校举办数学竞赛，老师准备 35 支铅笔作为奖品，发给一二三等奖获得者。原计划发给一等奖获得者每人 6 支，发给二等奖每人 3 支，发给三等奖每人 2 支，正好发完。后来改为发给一等奖每人 13 支，发给二等奖每人 4 支，发给三等奖每人 1 支，也正好发完。那么，一二三等奖各多少人？

分析：P31

练习：

1.把 7 张纸平均分给 10 个同学，可是不能把任何一张纸 10 等分，应该怎样分？

2.法国有个守财奴，死后要把 13 颗钻石留给 3 个女儿，规定大姐得 1/2,二姐得 1/3,三妹得 1/4,三个女儿不知道如何分配，只好请教她们的舅父，你知道舅父是怎么分的吗？

4．毛毛虫爬树

一、教学目标：

1．理解间歇性问题的求解

2．了解追赶问题与间歇性问题的相通性

二、教学重难点

重点：毛毛虫爬树问题

难点：追赶问题

三、教学方法

启发讲授式

四、教学过程

【1 青蛙上岸】

一只青蛙从一个斜坡底部往岸上跳，斜坡长度为 15 米，青蛙每次可跳出 5 米，又下滑 3 米，则它需要几次才能跳上岸？

分析：

除最后一次外，青蛙每次实际前进 2 米，到第 5 次前进了 10 米，再跳一次就到岸上了，所以实际跳 6 次即可。

【2 乘船过河问题】

有 42 个人需要渡河，现仅有一只小船，每次只能载 6 人，但需要 3 个人划船。请问一共需要几次才能渡完?（来回算一次）

分析：

除最后一次可以载 6 人外，其他几次实际只送 3 人过河，到第 12 次，共有 36 人过河，再渡一次可渡完。因此，需要 13 次。

【3 毛毛虫爬树】

星期天早晨 6 点，有一条毛毛虫开始爬树。白天，到 18 点钟，它爬了 5 米；晚上，退下来 2 米。请问：它什么时候爬到 9 米呢？

分析：P33

【4 电车追骑车人问题】

骑车人以每分钟 300 米的速度，从 102 路电动车始发站出发，沿 102 路电车线前进，骑车人离开出发地 2100 米时，一辆 102 路电车开车了始发站。这辆电车每分钟行 500,米，行驶 5 分钟到达一站，并停 1 分钟。那么，要用多少分钟才能追上骑车人呢？

分析：P34

【5 钟声问题】

小明家离火车站很近，他每天都可以根据车站大楼的钟声起床，车站大楼的钟，每敲响一下延时 3s 间隔 1s 后再敲第二下。假如从第一下钟声响起，小明就醒了，那么小明确切判断出已是清晨 6 点，前后共经过了几秒钟？

分析：P35

5.韩信分油问题

一、教学目标

1.了解韩信的数学事迹

2．掌握分液问题的技巧

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学重难点

1.重点：三个容器的分液问题

2.难点：如何使分油次数最少

四、教学过程

【1 韩信分油】韩信是汉代的大将，从小便爱动脑筋，聪明过人。

据说有一天，韩信骑马走在路上，看见两个人正在路边为分油发愁。这两个人有一只容量10斤的篓子，里面装满了油；还有一只空的罐和一只空的葫芦，罐可装7斤油，葫芦可装3斤油。要把这10斤油平分，每人5斤。但是谁也没有带秤，只能拿手头的三个容器倒来倒去。应该怎样分呢？

韩信骑在马上，了解情况以后，说："葫芦归罐罐归篓，二人分油回家走。"说完了，打马就走。两个人按照韩信的办法倒来倒去，果然把油平均分成两半，每人5斤，高高兴兴，各自回家。

你知道如何分油吗？

设10斤、3斤、7斤的桶命名为 A、B、C。如何把这一桶10斤的油分成两个5斤呢？

先从 A 中倒3斤油把 B 灌满,然后再把这3斤油倒入 C 中。接着,再从 A 中倒出3斤油把 B 灌满,再把这3斤油倒入 C 中。第三次,从 A 中倒出3斤油把 B 灌满。此时,A 中剩油1斤,B 中剩油3斤,C 中剩油6斤。此时,从 B 中倒出1斤油,把 C 灌满。这时,A 中剩油1斤,B2斤,C7斤。把 C 中的油全部倒入 A 中,再把 B 中油全部倒入 C 中。此时,A 中剩油8斤,B0斤,C2斤。从 A 中倒油入 B,直至 B 满为止,再把 B 中3斤油全部倒入 C 中,终于,A 中剩油5斤,B0斤,C5斤,满足题意。

规律：从小的容器着手（3斤的油葫芦），一点一点分配 10=5+5；5=3+2；再联想到大的7斤的瓦罐 2+7=9；而9=3+3+3

为什么都是加没有减了？因为加2斤的有到7斤的瓦罐有可能，而从7斤的瓦罐倒出2斤的油很难（如果可以的话，就不用这么复杂了）!

韩信分油利用倒推法可以求出这种解法。

【2如何分配饮料】

2个朋友，各买了4L 饮料，装在1个大桶里。拿回家后，他们准备把饮料分开，可是手边没有别的量器，只有2个空小桶，一个能装5L，一个能装3L。他们应该如何平分呢？

分析：P27

【3 三人分桶】

有21个一样大小的小桶，其中7个装满清凉饮料，7个装了一半的清凉饮料，还有7个是空的。

现在要把这些小桶和清凉饮料平均分给3个人，使每人得到的饮料和小桶数一样多，可是不能将饮料从一个桶倒进另一个桶，应该怎样分？

分析：P29

6.年龄问题

一、教学目标

1.利用差倍公司求解年龄问题

2.利用线段求解年龄问题

3．了解一些年龄趣题

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学重难点

1.重点：用公式、线段求解年龄问题

2.难点：如何划线段

四、教学过程

【1 父子的年龄】

今年许鹏比爸爸小30岁，4年后爸爸的年龄是许鹏的3倍。问许鹏和爸爸今年各多少岁？

【2王英李明各几岁】

王英5年前的年龄等于李明7年后的年龄，王英4年后与李明3年前的年龄和是35岁。王英、李明二人今年各几岁？

【3哥哥弟弟各几岁】

哥哥与弟弟两人3年后的年龄和是27岁。弟弟今年的年龄等于两人的年龄差。哥哥和弟弟今年各几岁？

【4 现在多大】

有一天宋老师对小芳说：“我像你那么大时，你才一岁”。小芳说：“我长大你这么大时，您已经43岁了”。试问他们现在各多少岁？

【5 兄弟俩的年龄】

今年兄弟俩的年龄加起来是55岁，曾经有一年，哥哥的岁数是弟弟今年的岁数，那时哥哥的年龄恰好是弟弟年龄的2倍。问，哥哥弟弟年龄各是多少岁？

练习：

1．爸爸比小刚大25岁，爸爸的年龄比小刚年龄的5倍少3岁。爸爸多少岁？

2．现在母女年龄和是48岁,3年后母亲年龄是女儿年龄的5倍,求母亲、女儿现在的年龄？

3．哥哥5年前的年龄等于妹妹7年后的年龄，哥哥4年后与妹妹3年前年龄的和是35岁。求哥哥、妹妹今年的年龄？

7.过河问题

一、教学目标

1.掌握过河问题中的积极因素

2.理解图论法解答过河问题

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学重难点

1.重点：挖掘过河问题中的积极因素

2.难点：利用数形结合思想解答过河问题

四、教学过程

例 1 农夫过河

一个农夫带了一只狼、一只羊和一棵菜过河，河上只有一条独木船，每次除人之外只能带一样东西，而且人不在旁边时，狼要吃羊，羊要吃菜。怎样渡河，才能做到安全而且来回次数最少呢？

简析:狼和羊在一起时不能没有人维持秩序，羊和菜在一起时不能没有人保护白菜。狼和菜可以和平共处，因为菜不能引起狗的食欲。

解决办法的要点是：先把羊送过河去；回来后，再把狼送过河，把羊随船带回来；然后再把菜送过河去；再回来一趟，最后把羊带过河去。

在这个过河问题的条件中，只说到狼和羊不能留在一起，羊和菜不能留在一起，说的都是消极因素。通过分析，发现狼和菜可以留在一起，找出了隐含的积极因素，从而使问题得到解决。

例 2 敌我军事人员

敌我双方各两名军事人员同到某地去谈判，途中要渡过一河，无桥，现仅有一条最多能乘两人的小船，为了安全，敌我双方同时在场时，我方人员不得少于对方人员，问如何才能安全过河？

练习；

1.有 3 个木匠，各带一个徒弟，在河边相遇，都要到对岸去做活，他们找来一条小船，可以坐 2 个人，要把师徒 6 人渡过去不难，谁知这 3 个徒弟提出来过河先后不挑，只是要和自己的师傅在一起。要是自己师傅不在，就不能跟别人的师傅在一起。这不是故意出难题吗?可是，3 个木匠一合计，终于想出了办法。他们是怎样渡河的呢?

2.有 8 位远足者想过一条河，但是河上没有桥，只有两个孩子在一条小船上玩耍。这条小船很小，只能坐两个孩子或一个大人。一个大人和一个小孩坐在船上就会翻船。那么，如何把这 8 个人都送到河那边呢？

8. 趣味数字谜

一、教学目标

1．了解如何猜谜语

2．理解数学名词的谜语

3．体会猜谜语的乐趣

二、教学重难点

数学名词谜语

三、教学方法：

启发讲授式、计算机辅助

四、教学过程：

猜谜是一种非常有趣有益的智力活动，猜谜语也是锻炼思维能力的一种好方法。听了谜语以后，就会动脑筋想：这说的是什么东西呢？“思源于疑”，“疑”是思维的开始,是创造的基础，大家觉得是不是呢？今天我们就来猜谜语！

先看几个简单例子：

1．一加一不是二。（打一字）

“一”字、加号“＋”、再来一个“一”字，组合在一起，得到的字不是“二”，而是“王”。谜底是王。

2．一减一不是零。（打一字）

“一”字、减号“-”、再来一个“一”字，组合在一起，得到的字不是“零”，而是“三”。谜底是三。

3．八分之七。（打一成语）

“八分之七”用数学符号写出来，把数字7写在分数线上面，8写在分数线下面，谜底是成语“七上八下”。

在上面这些谜语里，用一些很简单的数学知识，对谜语的文字作出新的理解，可以帮助猜出答案。

另外一类谜语，谜底是数学名词。还是来看几个例子：

4．七六五四三二一。（打一数学名词）

平常报数目，是从小到大顺着数，就像流行歌曲里唱的，“一二三四五六七，我的朋友在哪里”。现在他说“七六五四三二一”，是从大到小，倒过来数了，所以谜底是“倒数”。

5．讨价还价。（打一数学名词）

买东西讨价还价，要经过反复协商，才能达成双方都同意的钱数。这种协商钱数的过程，可以戏称为“商数”。谜底是商数。

6．你盼着我，我盼着你。（打一数学名词）

“你盼着我”，是你在等候我；“我盼着你”，是我在等候你。两人互相等候，可谓“相等”。谜底是相等。

7．成绩是多少？（打二数学名词）

学习成绩是用得分的数目计算的。问“多少”，可以换一个说法，改问“几何？”在中国古代数学书里，问一种物品有多少个，总是问“物有几何？”直到现在，有些地区的方言里，买东西问价钱，还是说“几何？”所以，问“成绩多少”，等于是问“分数，几何？”谜底是两个数学名词：分数、几何。

今天我们见到的谜语都与数学有关，被我们称为数学谜语，根据谜面和谜底的不同，数学谜语有不同的分类。同学们不妨一猜，可在紧张学习之余博得一乐，还可以提高学习数学的兴趣。请同学们在说谜底的时候，将你的猜谜思路和过程有条理地向大家展示。

一、以数学用语为谜底的谜语

1. 五角一趟　2. 两羊打架　3. 完全合算　4. 勤点钞票

5. 两边清点　6. 有情人终成眷属　7. 合法开支　8. 打得鸳鸯各一方

9. 垂钓　10. 马术　11. 启　12. 岁岁重阳今又重阳

13. 追本溯源　14. 对症下药　15. 多十分　16. 集体钓鱼

17. 协议离婚　18. 打成和局　19. 团体赛　20. 刮胡子

21. 摩拳擦掌　22. 谁押林冲去沧州（打两个数学用语）

二、以数字为谜面的谜语

23. 一（打一成语）　24. 十百千（打一成语）

25. 一二三四五六七九十（打一字）　26. 壹贰叁肆伍陆柒捌玖（打一古书名）

27. 三八二十四（打一体育用语）　28. 7×9（打一古军事书名，卷帘格）

三、以方程为谜面的谜语

29. x=只-吾（打一工业用语）　30. x=旭÷3（打一化学用语）

四、以数学家为谜底的谜语

31. 东坡游春　32. 回眸一笑百媚生

五、以数学科目为谜面的谜语

33. 解析几何（打一口头用语）

六、以运算符号为谜面的谜语

34. +-×（打一成语）

谜底：

1.一元二次（推算法） 2.对顶角 3.绝对值 4.常数（通假法） 5.分数 6.同心圆 7.有理数 8.公分母 9.等于（通假法） 10.乘法 11.内角（分解法） 12.循环节 13.求根 14.开方 15.余角（换算、通假） 16.公垂线 17.约分 18.平角 19.公共角 20.平角（词性通假） 21.等角 22.两个解、差（问答法。答曰：两个解差，分开即是） 23.大有人在 24.万无一失（别解为没有“一”和“万”） 25.口（谜面意为“只”少“八”） 26.《拾遗记》（意为忘记写“拾”） 27.女子双打（双打即两打，二十四） 28.三十六计（7×9计六十三，反序读之即得） 29.成品（八口减五口为三口，三口即成“品”字） 30.结晶（九日除以3得3日，结合为“晶”） 31.苏步青 32.杨乐 33.十八斤（谜面别解为把“析”分解开是多少？） 34.支离破碎（把支分解开即为“+、-、×”）

你能总结出猜数学谜语的基本方法吗？

9．巧解数谜

一、教学目标

通过判断推理，掌握数字谜的求解

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学过程

数字谜是一种有趣的数学问题.它的特点是给出运算式子，但式中某些数字是用字母或汉字来代表的，要求我们进行恰当的判断和推理，从而确定这些字母或汉字所代表的数字.这一讲我们主要研究加、减法的数字谜。

例 1 右面算式中每一个汉字代表一个数字，不同的汉字表示不同的数字.当它们各代表什么数字时算式成立？

$$\begin{array}{r} \text{好啊好} \\ +\ \text{真是好} \\ \hline \text{真是好啊} \end{array}$$

分析 由于是三位数加上三位数，其和为四位数，所以“真”=1.由于十位最多向百位进 1，因而百位上的“是”=0，“好”=8 或 9。

①若“好”=8，个位上因为 8+8＝16，所以“啊”=6，十位上，由于 6＋0＋1=7≠8，所以“好”≠8。

②若“好”=9，个位上因为 9＋9=18，所以“啊”=8，十位上，8＋0＋1=9，百位上，9＋1=10，因而问题得解。

解：
$$\begin{array}{r} 989 \\ +\ 109 \\ \hline 1098 \end{array}$$

真=1，是=0，好=9，啊=8

例 2 下面的字母各代表什么数字，算式才能成立？

$$\begin{array}{r} ABCD \\ +\ EBED \\ \hline EDCAD \end{array}$$

分析 由于四位数加上四位数其和为五位数，所以可确定和的首位数字 E＝1.又因为个位上 D＋D＝D，所以 D=0.此时算式为：

$$\begin{array}{r} ABC0 \\ +\ 1B10 \\ \hline 10CA0 \end{array}$$

下面分两种情况进行讨论：

①若百位没有向千位进位，则由千位可确定 A=9，由十位可确定 C=8，由百位可确定 B=4.因此得到问题的一个解：

$$\begin{array}{r} 9480 \\ +\ 1410 \\ \hline 10890 \end{array}$$

②若百位向千位进 1，则由千位可确定 A=8，由十位可确定 C＝7，百位上不论 B 为什么样的整数，B+B 和的个位都不可能为 7，因此此时不成立。

解：

$$\begin{array}{r} 9480 \\ +\ 1410 \\ \hline 10890 \end{array}$$

A=9，B=4，C=8，D=0，E=1.

例 3 在下面的减法算式中，每一个字母代表一个数字，不同的字母代表不同的数字，那么 D＋G=？

$$\begin{array}{r} ABCBD \\ -\ \ EFAG \\ \hline FFF \end{array}$$

分析 由于是五位数减去四位数，差为三位数，所以可确定 A=1，B=0，E=9.此时算式为：

$$\begin{array}{r} 10C0D \\ -\ 9F1G \\ \hline FFF \end{array}$$

分成两种情况进行讨论：

①若个位没有向十位借 1，则由十位可确定 F=9，但这与 E=9 矛盾。

②若个位向十位借 1，则由十位可确定 F=8，百位上可确定 C=7.这时只剩下 2、3、4、5、6 五个数字，由个位可确定出：

$\begin{cases} D=2 \\ G=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} D=3 \\ G=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} D=4 \\ G=6 \end{cases}$ 因此，问题得解，

解：因为

$$\begin{array}{r} 10702 \\ -\ \ 9814 \\ \hline 888 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10703 \\ -\ \ 9815 \\ \hline 888 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10704 \\ -\ \ 9816 \\ \hline 888 \end{array}$$

所以 D＋G=2＋4=6 或 D＋G=3＋5=8

或 D＋G=4＋6=10

例 4 右面的算式中不同的汉字表示不同的数字，相同的汉字表示相同的数字.如果巧+解+数+字+谜=30，那么“巧解数字谜”所代表的五位数是多少？

分析 观察算式的个位，由于谜+谜+谜+谜+谜和的个位还是“谜”，所以“谜”＝0 或 5。

$$
\begin{array}{r}
谜\\
字谜\\
数字谜\\
解数字谜\\
+巧解数字谜\\
\hline
巧解数字谜
\end{array}
$$

①若“谜”=0，则巧+解+数+字=30，因为 9+8＋7＋6=30，那么“巧”、“解”、“数”、“字”这四个汉字必是 9、8、7、6 这四个数字.而十位上，9＋9＋9＋9=36，36 的个位不为 9，8+8+8＋8=32，32 的个位不为 8，7＋7＋7＋7=28，28 的个位不为 7，6＋6＋6＋6+=24，24 的个位不为 6，因而得出“字”≠9、8、7、6，矛盾，因此“谜”≠0。

②若“谜”=5，则巧+解+数+字=25.观察这个算式的十位，由于字+字+字+字+2 和的个位还是“字”，所以“字”=6，则巧+解+数=19.再看算式的百位，由于数+数+数+2 和的个位还是“数”，因而“数”=4 或 9，若“数”=4，则“解”＝9.因而“巧”=19-4-9＝6，“赛”=5，与“谜”=5 重复，因此“数”≠4，所以“数”=9，则“巧”+“解”＝10.最后看算式的千位，由于“解”+ “解”+2 和的个位还是“解”，所以“解”＝8，则“巧”=2，因此“赛”＝1.问题得解。

解：
$$
\begin{array}{r}
5\\
65\\
965\\
8965\\
+18965\\
\hline
28965
\end{array}
$$

因此，“巧解数字谜”所代表的五位数为 28965。

例 5 英文“HALLEY”表示“哈雷”，“COMET”表示“彗星”，“EARTH”表示地球.在下面的算式中，每个字母均表示 0～9 中的某个数字，且相同的字母表示相同的数字，不同的字母表示不同的数字.这些字母各代表什么数字时，算式成立？

$$
\begin{array}{r}
HALLEY\\
-\quad COMET\\
\hline
EARTH
\end{array}
$$

分析 因为是一个六位数减去一个五位数，其差为五位数，所以可确定被减数的首位数字 H＝1.若个位没有向十位借 1，则十位上 E-E=0，有 T=0，那么个位上，Y-0＝1，得 Y＝1，与 H=1 矛盾，所以个位要向十位借 1，于是十位必向百位借 1，则十位上，10＋E-1-E＝9，则 T=9，因此，由个位可确定 Y＝0.此时算式为：

$$
\begin{array}{r}
1ALLE0\\
-\quad COME9\\
\hline
EAR91
\end{array}
$$

①若百位不向千位借位，则有 R＋M＋1=L，这时剩下数字 2、3、4、5、6、7、8，因为 2＋3＋1=6，所以 L 最小为 6。

若 L=6，则（R，M）=（2，3）（表示 R、M 为 2、3 这两个数字，其中 R 可能为 2，也可能为 3，M 也同样）.这时还剩下 4、5、7、8 这四个数字，由千位上有 O+A=6，而在 4、

5、7、8 这四个数字中，不论哪两个数字相加，和都不可能为 6，因此 L≠6.

若 L＝7，则 M＋R=6，于是（M，R）＝（2，4），还剩下 3、5、6、8 这四个数字.由千位上 O＋A=7，而在 3、5、6、8 这四个数字中，不论哪两个数字相加，和都不可能为 7，因此 L≠7。

若 L=8，则 M＋R＝7，（M，R）=（2，5）或（M，R）＝（3，4）。

若（M，R）=（2，5），则还剩下 3、4、6、7 这四个数字。

由千位可确定 O＋A=8，而在 3、4、6、7 这四个数字中，不论哪两个数字相加，和都不可能为 8，因此（M， R） ≠（2，5）。

若（M，R）＝（3，4），则还剩下 2、5、6、7 这四个数字。

由千位可确定 O＋A=8，而 2＋6=8，所以（O，A）＝（2，6），最后剩下 5 和 7.因为 5＋7＝12，所以可确定 A＝2，O=6，则（C，E）＝（5，7）.由于 C 与 E 可对换，M 与 R 可对换，所以得到问题的四个解：

解：

$$\begin{array}{r} 128850 \\ -\ 76359 \\ \hline 52491 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128850 \\ -\ 76459 \\ \hline 52391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128870 \\ -\ 56379 \\ \hline 72491 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128870 \\ -\ 56479 \\ \hline 72391 \end{array}$$

②若百位向千位借 1，则 M＋R＝L＋9.还剩下 2、3、4、5、6、7、8。

若 L＝2，则（M，R）＝（3， 8）或（M，R）=（4，7）或（M，R）＝（5，6）.由千位得 O+A＝11，则必有 C＋E=11，而万位上 C＋E＝9+A，由此可得 A=2，与 L＝2 矛盾.所以 L≠2。

若 L＝3，则 M＋R＝12，（M，R）=（4，8）或（M，R）＝（5，7）.由千位得 O＋A＝12，这时还剩下 2、6 这两个数字.由万位得 C+E=9＋A，即 2＋6=9＋A，A 无解.所以 L≠3。

若 L＝4，则 M＋R＝13，（M，R）＝（5，8）或（M，R）＝（6，7）.由千位得 O＋A=13，这时还剩下 2 和 3 这两个数字.由万位得 C+E＝A+9，即 2＋3＝A＋9，A 无解.所以 L≠4。

若 L=5，则 M＋R＝14，（M，R）=（6，8）.由千位得 O＋A＝14，而在剩下的 2、3、4、7 这四个数中，任意两个数字的和都不等于 14.所以 L≠5。

若 L=6，则 M＋R=15，（M， R）=（7，8）.由千位得 O＋A＝5，则（O，A）=（2，3）.这时还剩下 4 和 5 这两个数字，由万位得 C+E＝10+A，即 4＋5=10＋A，A 无解.所以 L≠6。

因为 M＋R 的和最大为 15，所以 L 最大取 6。

解：

$$\begin{array}{r} 128850 \\ -\ 76359 \\ \hline 52491 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128850 \\ -\ 76459 \\ \hline 52391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128870 \\ -\ 56379 \\ \hline 72491 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128870 \\ -\ 56479 \\ \hline 72391 \end{array}$$

共以上四个解。

通过以上几个例题我们不难看出，认真分析算式中隐含的数量关系，选择有特征的部分作为解题的突破口，作出局部的判断是解数字谜的关键.其次，在采用试验法的同时，

常借助估值的方法，对某些数位上的数字进行合理的估计，逐步排除一些不可能的取值，缩小所求数字的取值范围，这样可以加快解题的速度。

１０． 有趣的等式

一、教学目标

1.掌握添加运算符号编制等式的方法

2.体会一些等式带来的乐趣

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学重难点

添加运算符号编制等式

四、教学过程

【1百鸟图】

伦文叙是广东的一位状元，据说有人请他为珍藏的苏东坡真迹“百鸟归巢图”题诗。伦文叙不假思索，挥毫就写了一首：

天生一只又一只，

三四五六七八只。

凤凰何少鸟何多，

啄尽人间千万石。

诗的后一句，是讽刺人间圣贤何太少，贪官污吏何太多。画的标题中说是“百鸟图”；诗中却不见“百”字，似乎只管数鸟儿有多少只：一只，又一只，三、四、五、六、七、八只，数到八只就结束，开始发感想了。画中的鸟儿怎么会是百只呢？

简析：要揭开这个谜，可以把诗中关于鸟的只数写成一行，通过添加运算符号，使其等于100。

1　1　3　4　5　6　7　8　100

【2西游记里的倒数诗】

在中国古典神话小说《西游记》里，说到唐僧去西天取经师徒，在平顶山莲花洞消灭了金角大王和银角大王后，师徒们继续赶路，不觉天色已晚。 小说中写道：

十里长亭无客走，九重天上观星辰。

八河船只皆收港，七千州县尽关门。

六宫五府回官宰，四海三江罢钓纶。

两座楼头钟鼓响，一轮明月满乾坤。

诗中嵌进全部十个数字，而且从大往小，倒过来数，成为别具一格的“倒数诗”，增加了趣味。

现在做一个数学小游戏：用上面写出的十个数，

10987654321

不打乱顺序，添加适当的数学符号，组成十个算式，使计算结果分别等于10、9、8、7、6、5、4、3、2、1。

【3 一些有趣的等式】

一、数位比较多

12×231＝312×21　　14×462＝264×41　　18×891＝198×81

24×231＝132×42

二、两边的数字相同，组成的数不同

16×4＝1×64　　19×5＝1×95　　26×5＝2×65

49×8＝4×98　　1×664＝166×4　　2×665＝266×5

4×847＝484×7　　6×545＝654×5　　2×6665＝2666×5

4×3243＝4324×3　　8×6486＝8648×6　　11×10＝1×110

27×56＝2×756　　39×75＝3×975　　17×515＝1751×5

三、两边的数相同，运算不同

2×2＝2＋2　　1×2×3＝1＋2＋3　　4×2－1＝4＋2＋1

6×2－2＝6＋2＋2　　8×2－3＝8＋2＋3　　10×2－4＝10＋2＋4

8÷4＋1＝8－4－1　　16÷8＋3＝16－8－3　　20÷10＋4＝20－10－4

四、两个数的和与积是倒序数

9＋9＝18，9×9＝81　　24＋3＝27，24×3＝72

47＋2＝49，47×2＝94　　497＋2＝499，497×2＝994

五、两个数互为倒序数，它们的平方数也互为倒序数

$12^2=144$，$21^2=441$　　$13^2=169$，$31^2=961$

$102^2=10404$，$201^2=40401$　　$103^2=10609$，$301^2=90601$　　$112^2=12544$，$211^2=44521$

$113^2=12769$，$311^2=96721$　　$122^2=14884$，$221^2=48841$

六、一个数等于它的数字和的乘方

$81=(8+1)^2$　　$512=(5+1+2)^3$　　$4913=(4+9+1+3)^3$

$2401=(2+4+0+1)^4$　　$234256=(2+3+4+2+5+6)^4$

$390625=(3+9+0+6+2+5)^4$　　$1579616=(1+6+7+9+6+1+6)^4$

七、把一个数拦腰截断，原数等于这两部分之和的平方

$81=(8+1)^2$　　$2025=(20+25)^2$　　$3025=(30+25)^2$

$9801=(98+01)^2$　　$494209=(494+209)^2$　　$60481729=(6048+1729)^2$

八、更为奇特的类型

$1233=12^2+33^2$　　$1371=1^2+37^2+1^2$　　$999371=999^2+37^2+1^2$

$89=8+9^2$　　$2045=20+45^2$　　$3055=30+55^2$

$9899=98+99^2$　　$88297=88+297^2$

$494703=494+703^2$　　$998999=998+999^2$

$43=4^2+3^3$　　$63=6^2+3^3$　　$135=1+3^2+5^3$

$175=1+7^2+5^3$　　$518=5+1^2+8^3$　　$598=5+9^2+8^3$

$37\times(3+7)=3^3+7^3$　　$48\times(4+8)=4^3+8^3$　　$111\times(11+1)=11^3+1^3$

$147\times(14+7)=14^3+7^3$　　$148\times(14+8)=14^3+8^3$　　$123\times6=1^2+2^3+3^6$

$2^5\times9^2=2592$　　$3^4\times425=34425$　　$31^2\times325=312325$

特别是最后三个等式，方指数竟然变成了积的数字，真叫人瞠目结舌匪夷所思。当你欣赏了这些有趣的等式之后，感觉如何，是不是对数学又有了一些新的认识？

１１．“鸡兔同笼”问题

一、教学目标

1.理解鸡兔同笼问题；

2.掌握用假设法求解两数和的鸡兔同笼问题

二、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

三、教学重难点

1.重点：鸡兔同笼问题

2.难点：鸡兔同笼问题中的减法

四、教学过程

鸡兔同笼是中国古代的数学名题之一。大约在 1500 年前，《孙子算经》中就记载了这个有趣的问题。书中是这样叙述的：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”这四句话的意思是：有若干只鸡兔同在一个笼子里，从上面数，有 35 个头,从下面数，有 94 只脚。问笼中各有几只鸡和兔？

（一）求解方法：

1 假设法

假设全是鸡：2×35=70（只）

鸡脚比总脚数少：94－70=24 （只）

兔：24÷(4-2)=12 （只）

鸡：35－12=23（只）

据《孙子算经》中记载，题目中给出雉兔共有 35 只，如果把兔子的两只前脚用绳子捆起来，看作是一只脚，两只后脚也用绳子捆起来，看作是一只脚，那么，兔子就成了 2 只脚，即把兔子都先当作两只脚的鸡。鸡兔总的脚数是 35×2=70（只），比题中所说的 94 只要少 94-70=24（只）。

现在，我们松开一只兔子脚上的绳子，总的脚数就会增加 2 只，即 70+2=72（只），再松开一只兔子脚上的绳子，总的脚数又增加 2，2，2，2……，一直继续下去，直至增加 24，因此兔子数：24÷2=12（只），从而鸡有 35-12=23（只）。

2 列表法

3 方程法

法一 一元一次方程

解：设兔有 x 只，则鸡有(35-x）只。

4x+2(35-x)=94

4x+70-2x=94

2x=94-70

2x=24

x=24÷2

x=12

35-12=23(只）

或 解：设鸡有 x 只，则兔有（35-x）只。

2x+4(35-x)=94

2x+140-4x=94

2x=46

x=23

35-23=12(只）
答：兔子有 12 只，鸡有 23 只。
注：通常设方程时，选择腿的只数多的动物，会在套用到其他类似鸡兔同笼的问题上，好算一些。
4 抬腿法（玻利维亚跳舞法）
法一
假如鸡与兔子都抬起两只脚，还剩下 94－35×2=24 只脚 ， 这时鸡是屁股坐在地上，地上只有兔子的脚，而且每只兔子有两只脚在地上，所以有 24÷2=12 只兔子，就有 35－12=23 只鸡
法二
金鸡独立，兔子双腿直立，还有 94÷ 2=47 只脚着地。头还是 35 个，这时，脚与头的总数之差 47-35=12，就是兔子的只数。
上面的解法也是《孙子算经》中记载的。做一次除法和一次减法，马上能求出兔子数，多简单！能够这样算，主要利用了兔和鸡的脚数分别是 4 和 2,4 又是 2 的 2 倍.可是，当其他问题转化成这类问题时，"脚数"就不一定是 4 和 2，上面的计算方法就行不通。因此，很有必要学会它的解法和思路.我们对这类问题给出一种一般解法.
（二）方法总结
1.算术法
我们来总结一下这道题的解题思路：如果先假设它们全是鸡，于是根据鸡兔的总数就可以算出在假设下共有几只脚，把这样得到的脚数与题中给出的脚数相比较，看看差多少，每差 2 只脚就说明有 1 只兔，将所差的脚数除以 2，就可以算出共有多少只兔。概括起来，解鸡兔同笼题的基本关系式是：
兔数=（总脚数-每只鸡脚数×总头数）÷（每只兔子脚数-每只鸡脚数）
或：
鸡数=(每只兔脚数×总头数-总脚数) ÷（每只兔子脚数-每只鸡脚数）
我们也可以采用列方程的办法：设兔子的数量为 x，鸡的数量为 y
那么：x+y=35 那么 4x+2y=94 这个算方程解出后得出：兔子有 12 只，鸡有 23 只。

（三）两数之和问题
例 1 有若干只鸡和兔子，它们共有 88 个头，244 只脚，鸡和兔各有多少只？
解：
如果设想 88 只都是兔子，那么就有 4×88 只脚，比 244 只脚多了
88×4-244=108（只）.
每只鸡比兔子少(4-2)只脚，所以共有鸡
(88×4-244)÷(4-2)= 54（只）.
说明我们设想的 88 只"兔子"中，有 54 只不是兔子。而是鸡.

例 2 红铅笔每支 0.19 元，蓝铅笔每支 0.11 元，两种铅笔共买了 16 支，花了 2.80 元。问红，蓝铅笔各买几支？
解：以"分"作为钱的单位.我们设想，一种"鸡"有 11 只脚，一种"兔子"有 19 只脚，它们共有 16 个头，280 只脚。
现在已经把买铅笔问题，转化成"鸡兔同笼"问题了.利用上面算兔数公式，就有
蓝笔数=(19×16-280)÷(19-11) =24÷8 =3（支）.
红笔数=16-3=13（支）.

答：买了 13 支红铅笔和 3 支蓝铅笔。

例 3 一份稿件，甲单独打字需 6 小时完成.乙单独打字需 10 小时完成，现在甲单独打若干小时后，因有事由乙接着打完，共用了 7 小时。甲打字用了多少小时？

解：我们把这份稿件平均分成 30 份(30 是 6 和 10 的最小公倍数)，甲每小时打 30÷6=5（份），乙每小时打 30÷10=3（份）.

现在把甲打字的时间看成"兔"头数，乙打字的时间看成"鸡"头数，总头数是 7."兔"的脚数是 5,"鸡"的脚数是 3，总脚数是 30，就把问题转化成"鸡兔同笼"问题了。

根据前面的公式

"兔"数=(30-3×7)÷(5-3) =4.5,

"鸡"数=7-4.5 =2.5,

也就是甲打字用了 4.5 小时，乙打字用了 2.5 小时。

答：甲打字用了 4 小时 30 分.

练习 1．龟鹤共有 100 个头，350 只脚.龟，鹤各多少只 ？

练习 2．学校有象棋，跳棋共 26 副，恰好可供 120 个学生同时进行活动。象棋 2 人下一副棋，跳棋 6 人下一副.象棋和跳棋各有几副？

练习 3．一件工程，甲单独做 12 天完成，乙单独做 18 天完成，现在甲做了若干天后，再由乙接着单独做完余下的部分，这样前后共用了 16 天.甲先做了多少天 ？

例 4 蜘蛛有 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿和 2 对翅膀，蝉有 6 条腿和 1 对翅膀。现在这三种小虫共 18 只，有 118 条腿和 20 对翅膀.每种小虫各几只？

解：因为蜻蜓和蝉都有 6 条腿，所以从腿的数目来考虑，可以把小虫分成"8 条腿"与"6 条腿"两种。利用公式就可以算出 8 条腿的

蜘蛛数=(118-6×18)÷(8-6)

=5（只）.

因此就知道 6 条腿的小虫共

18-5=13（只）.

也就是蜻蜓和蝉共有 13 只，它们共有 20 对翅膀。再利用一次公式

蝉数=(13×2-20)÷(2-1)=6（只）.

因此蜻蜓数是 13-6=7（只）.

答：有 5 只蜘蛛，7 只蜻蜓，6 只蝉。

例 5 学校组织新年游艺晚会，用于奖品的铅笔，圆珠笔和钢笔共 232 支，共花了 300 元.其中铅笔数量是圆珠笔的 4 倍。已知铅笔每支 0.60 元，圆珠笔每支 2.7 元，钢笔每支 6.3 元。问三种笔各有多少支

解：从条件"铅笔数量是圆珠笔的 4 倍",这两种笔可并成一种笔，四支铅笔和一支圆珠笔成一组，这一组的笔，每支价格算作（0.60×4+2.7）÷5=1.02（元）.

现在转化成价格为 1.02 和 6.3 两种笔。用"鸡兔同笼"公式可算出，钢笔支数是

(300-1.02×232)÷(6.3-1.02)=12（支）.

铅笔和圆珠笔共 232-12=220（支）.

其中圆珠笔 220÷(4+1)=44（支）.

铅笔 220-44=176（支）.

答：其中钢笔 12 支，圆珠笔 44 支，铅笔 176 支。

练习 4．某人领得工资 240 元，有 2 元，5 元，10 元三种人民币，共 50 张，其中 2 元与 5 元的张数一样多。那么 2 元，5 元，10 元各有多少张？

（四）"两数之差"的问题

鸡兔同笼中的总头数是"两数之和",如果把条件换成"两数之差",又应该怎样去解呢

例 6 鸡与兔共 100 只，鸡的脚数比兔的脚数少 28.问鸡与兔各几只？

解：假如再补上 28 只鸡脚，也就是再有鸡 28÷2=14（只），鸡与兔脚数就相等，兔的脚是鸡的脚 4÷2=2（倍），于是鸡的只数是兔的只数的 2 倍。兔的只数是

(100+28÷2)÷(2+1)=38（只）.

鸡是 100-38=62（只）.

答：鸡 62 只，兔 38 只。

当然也可以去掉兔 28÷4=7（只）.兔的只数是

(100-28÷4)÷(2+1)+7=38（只）.

例 7 一项工程，如果全是晴天，15 天可以完成。倘若下雨，雨天比晴天多 3 天，工程要多少天才能完成

解：类似于例 3，我们设工程的全部工作量是 150 份，晴天每天完成 10 份，雨天每天完成 8 份.用上一例题解一的方法，晴天有

(150-8×3)÷(10+8)= 7（天）.

雨天是 7+3=10 天，总共

7+10=17（天）.

答：这项工程 17 天完成。

请注意，如果把"雨天比晴天多 3 天"去掉，而换成已知工程是 17 天完成，由此又回到上一节的问题.差是 3，与和是 17，知道其一，就能推算出另一个。

例 8 古诗中，五言绝句是四句诗，每句都是五个字；七言绝句是四句诗，每句都是七个字。有一诗选集，其中五言绝句比七言绝句多 13 首，总字数却反而少了 20 个字.问两种诗各多少首？

解：如果去掉 13 首五言绝句，两种诗首数就相等，此时字数相差

13×5×4+20=280（字）.

每首字数相差 7×4-5×4=8（字）.

因此，七言绝句有 280÷(28-20)=35（首）.

五言绝句有 35+13=48（首）.

答：五言绝句 48 首，七言绝句 35 首。

12.求数问题

一、教学目标

1.理解余数问题的求解

2.掌握逆推法求数问题

二、教学重难点

1．重点：利用倒推法求数

2．难点：利用余数的性质求数

三、教学方法

启发讲授式

四、教学过程

【1 一筐苹果】

入冬前，妈妈买了一筐苹果，清理时发现，2 个 2 个数余 1 个，3 个 3 个数余 2 个，4 个 4 个数余 3 个，5 个 5 个数余 4 个，6 个 6 个数余 5 个。你知道这筐苹果至少有多少个吗？

分析：P123

【2 爱因斯坦编的问题】

在你面前有一条长长的阶梯，如果每步跨 2 级，那么最后剩 1 级。如果每步跨 3 级，那么最后剩 2 级。如果每步跨 5 级，那么最后剩 4 级。如果每步跨 6 级，那么最后剩 5 级。只有每步跨 7 级时，最后才正好走完，一级也不剩。请算一算，这条阶梯有多少级？

分析：P123

【3 数不清的鸡蛋】

有一位朋友从菜市场买回一箱鸡蛋，回家后想数数共有几只，数了几遍，总是数不清，他是这样数的：

2 个 2 个拿剩 1 个，但忘记拿了几次；

3 个 3 个拿剩 1 个，又忘记拿了几次；

4 个 4 个拿剩 1 个，又忘记拿了几次；

6 个 6 个拿剩 1 个，又忘记拿了几次；

7 个 7 个拿，最后一个也不剩，但又忘记拿了几次，请大家算算，到底买了几只鸡蛋？

分析：P126

【4 红球与白球】

袋子里红球与白球的数量之比是19:13.放入若干只红球后，红球与白球数量之比为5:3；再放入若干只白球后，红球与白球数量之比为13:11.已知放入的红球比白球少80只，那么原先袋子里共有多少只球？

【5 猴子吃桃】

小猴吃桃子，吃掉的比剩下的多4个，小猴又吃掉了1个桃子，这时吃掉的是剩下的3倍，问猴子一共有多少个桃子？

【6 多少个桃子】

1只小猴子，从山上采来一堆桃子。第一天，它先吃去其中的一半，还有些嘴馋，又吃了1个；第二天，吃去剩余桃子的一半再加1个；第三天，又吃去剩余桃子的一半再加1个；第四天，又吃去剩余桃子的一半再加1个，刚好吃完。那么，它从山上共采来多少个桃子？

【7 袋中果冻】袋子中有若干个果冻，小明每次拿出其中的一半再放回一个，这样共操作了5次，袋中还有4个果冻，问袋中原先有多少个果冻？

１3．组合数问题

一、教学目标：

1.掌握组合问题中的抽屉原理

2.理解抽屉原理的应用

二、教学重难点

重点：抽屉原理

难点：抽屉原理中抽屉的构造

三、教学方法

启发讲授式，讲练结合法，计算机辅助

四、教学过程

1.抽屉原理

（1）故事引入

《晏子春秋》里有一个“二桃杀三士”的故事，大意是： 齐景公养着三名勇士，他们名叫田开疆、公孙接和古冶子。

这三名勇士都力大无比，武功超群，为齐景公立下过不少功劳。但他们也刚愎自用，目中无人，得罪了齐国的宰相晏婴。晏子便劝齐景公杀掉他们，并献上一计：以齐景公的名义赏赐三名勇士两个桃子，让他们自己评功，按功劳的大小吃桃。

三名勇士都认为自己的功劳很大，应该单独吃一个桃子。于是公孙接讲了自己的打虎功，拿了一只桃；田开疆讲了自己的杀敌功，拿起了另一桃。两人正准备要吃桃子 ——

古冶子说出了自己更大的功劳。公孙接、田开疆都觉得自己的功劳确实不如古冶子大，感到羞愧难当，赶忙让出桃子。并且觉得自己功劳不如人家，却抢着要吃桃子，实在丢人，是好汉就没有脸再活下去，于是都拔剑自刎了。古冶子见了，后悔不迭。仰天长叹道：如果放弃桃子而隐瞒功劳，则有失勇士尊严；为了维护自己而羞辱同伴，又有损哥们义气。如今两个伙伴都为此而死了，我独自活着，算什么勇士！说罢，也拔剑自杀了。

晏子采用借“桃”杀人的办法，不费吹灰之力，便达到了他预定的目的，可说是善于运用权谋。汉朝有人在一首诗中曾不无讽刺地写道：“……一朝被谗言，二桃杀三士。谁能为此谋，相国务晏子！”

在晏子的权谋之中，包含了一个重要的数学原理——抽屉原理。

（2）什么是抽屉原理

把 m 个东西任意分放进 n 个空抽屉里（m>n)，那么一定有一个抽屉中放进了至少 2 个东西。”举个最简单的例子，把 3 个苹果按任意的方式放入两个抽屉中，那么一定有一个抽屉里放有两个或两个以上的苹果。这是因为如果每一个抽屉里最多放有一个苹果，那么两个抽屉里最多只放有两个苹果。

再如，“任意 367 个人中，必有生日相同的人。”

“从数 1，2，…，10 中任取 6 个数，其中至少有 2 个数为奇偶性不同。”……

抽屉原理有时也被称为鸽巢原理，它是德国数学家狄利克雷 (Dirichlet ,Peter Gustav Lejeune,1805～ 1859) 首先明确的提出来并用以证明一些数论中的问题，因此，也称为狄利克雷原则。它是组合数学中一个重要的原理。把它推广到一般情形有以下几种表现形式。

形式一：　　设把 n＋1 个元素分为 n 个集合 A1，A2，…，An，用 a1，a2，…，an 表示这 n 个集合里相应的元素个数，证明至少存在某个 ai 大于或等于 2.

形式二：　设把 n・m＋1 个元素分为 n 个集合 A1，A2，…，An，用 a1，a2，…，an 表示这 n 个集合里相应的元素个数，证明至少存在某个 ai 大于或等于 m＋1。

（3）趣题

【趣题 1 分饼干】

把 135 块饼干分给 16 个小朋友，如果每个小朋友至少要分到 1 块饼干，那么不管怎样分，一定会有 2 个小朋友得到的饼干数目相同。为什么？

【解答】要使 16 个小朋友个到的饼干数各不相同至少需要 1+2+3+…+15+16=136
这与只有 135 块饼干矛盾.所以一定有 2 个小朋友得到的饼干数目相同.

【趣题 2 借书】

某班共有学生 42 人，从学校图书室借来 212 本书，是否有人能至少借到 6 本或 6 本以上的图书？

【解答】假设无人借 6 本或 6 本以上的图书，则全班至多借书 5×42=210（本）.但全班共借来 212 本，所以要么至少有两人借 6 本，要么至少有 1 人借 7 本.

【趣题 3 植树】

某校派出学生 204 人上山植树 15301 株，其中最少一人植树 50 株，最多一人植树 100 株，则至少有 5 人植树的株数相同.

【分析】按植树的多少，从 50 到 100 株可以构造 51 个抽屉，则个问题就转化为至少有 5 人植树的株数在同一个抽屉里.

【解答】假设无 5 人或 5 人以上植树的株数在同一个抽屉里，那只有 5 人以下植树的株数在同一个抽屉里，而参加植树的人数为 204 人，所以，每个抽屉最多有 4 人，故植树的总株数最多有：4(50＋51＋…99＋100)=15300<15301,矛盾
所以，至少有 5 人植树的株数相同.

【趣题 4 取手套 1】

有 5 副手套混杂在一起，想闭着眼睛从中取出 1 副手套，问至少要取出多少只？

【解答】5+1=6 只

【趣题 5 取筷子】

有黑色、白色、黄色的筷子各 8 根，混杂在一起，黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子，问至少要取多少根才能保证达到要求？

【解答】最多取出 8 根只有一种颜色的筷子，再取任意 3 根即可保证达到要求。所以至少要取 11 根.

【趣题 6 取手套 2】

在 1 只箱子里面放着红、黑、白三种颜色的手套各 6 副，如想闭着眼睛从中取出两副颜色不同的手套，问至少要取出多少只才能达到要求？

【解答】12＋12＋1＝25 至少取出 15 只手套才能达到要求.

1 4。斐波那契数列

一、教学目标

1．掌握斐波那契数的特点

2．利用斐波那契数解题

3．了解斐波那契数的应用

二、教学重难点

利用斐波那契数解题

三、教学方法

启发讲授式

四、教学过程

1．魔术师的地毯

一日，魔术师拿着一块 8×8 米的正方形地毯到裁缝店，要求把它改成 13×5 米的长方形地毯。裁缝师心里暗笑，这家伙是不是连小学都没毕业，这么简单的数学题都不会,8×8=64，
而 13×5=65，面积相差 1 平方米，怎么可能改呢？

【解答】

我们在白纸上将正方形量好画出，剪成四块，重新安排后拼成长方形，除非图形做得很大并且作图和剪裁都十分精确，我们一般是不会发现拼接成的长方形在对角线附近发生了微小的重叠，正是沿对角线的微小重叠导致了一个单位面积的丢失。要证实这一点我们只要计算一下长方形对角线的斜率和正方形拼接各片相应边的斜率，比较一下就会清楚了。

问题中涉及到四个数据 3、5、8 和 13，有一定数学基础的同学会认出这是著名的斐波那契数列中的四项，斐波那契数列的特征是它的每一项都是前两项之和：1，1，2，3，5，8，13，21，34，……

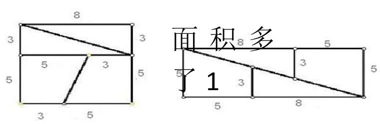
（2）斐波那契数列

早在 800 年前（1202 年），意大利数学家斐波那契在他的著作《算盘全书 》中，提出以下的一个问题：

假设一对刚出生的小兔一个月后就能长成大兔，再过一个月就能生下一对小兔，并且此后每个月都生一对小兔，一年内没有发生死亡，问：一对刚出生的兔子，一年内繁殖成多少对兔子?

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：
第一个月小兔子新出生，共一对;
第二个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对;
第三个月，生下一对小兔民数共有两对;
第四个月，老兔子又生下一对，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对; —————— 依次类推可以列出下表：

月数：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子对数：	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144



这个数列有关十分明显的特点，那是：前面相邻两项之和，构成了后一项。所以第十二月时总共有 144 对。

这个数列是意大利中世纪数学家斐波那契在＜算盘全书＞中提出的，因此称为斐波那契

数列。

这个数列的通项公式为：$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n + a_{n+1} = a_{n+2} (n \geq 1) \end{cases}$

（4）趣题

【趣题 1 树的成长】

下图是一个树形图的生长过程，依据图中所示的生长规律，第 16 行的实心圆点的个数是 144.（迎春杯赛题）

【趣题 2 爬楼梯 1】

一个楼梯共有 10 级台阶，规定每步可以迈一级台阶或二级台阶，从地面到最上面一级台阶，一共可以有多少种不同的走法？

【分析】1 级台阶，有 1 种； 2 级台阶，有 2 种；3 级台阶，有 3 种； 4 级台阶有 5 种

可以发现：$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

【解答】89

【趣题 3 爬楼梯 2】

一个楼梯共有 10 级台阶，规定每步可以迈一级台阶或二级台阶，最多可以迈三级台阶。从地面到最上面一级台阶，一共可以有多少种不同的走法？

【分析】 1 级台阶，有 1 种；2 级台阶，有 2 种 3 级台阶，有 4 种；4 级台阶，有 7 种；5 级台阶，有 13 种

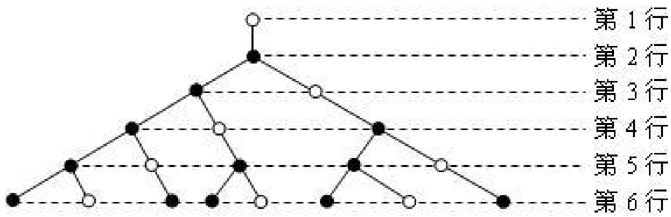
可以发现：$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

从而得出数列：1，2，4，7，13，24，44，81，149，274，504，927……

【解答】274

【趣题 4 青蛙过水田】

一只青蛙从宽 5 米的水田的一边要跳往另一边,它每次只能跳 0.5 米,或 1 米,这只青蛙跳过水田共有多少种不同的方法?



【解答】89

【趣题 5 取火柴】

有一堆火柴共 12 根，如果规定每次取 1～3 根，那么取完这堆火柴共有多少种不同取法？

【解答】927

【趣题 6 跳格子游戏】

如下图，小方和小张进行跳格子游戏，小方从 A 跳到 B，每次可跳 1 步或 2 步；小张从 C 跳到 D，每次可跳 1 步、2 步或 3 步。规定：谁跳到目标处的不同跳法最多，谁就获胜。

(1)问获胜方的跳法比另一方多___种。

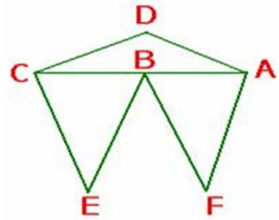
(2)若把 C 点向右移动一格,那又是谁的跳发多?

小方要跳 11 步、小张要跳 9 步。

A				C							B		D

小方有 144 种，小张有 149 种，所以小张获胜。

15。哥德堡七桥问题



一、教学目标

1.理解七桥问题

2.从几何图形欣赏中感受数学之美

二、教学重难点

重点：七桥问题

难点：利用一笔画解题

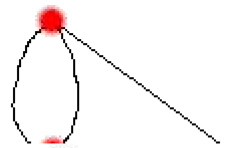
三、教学过程

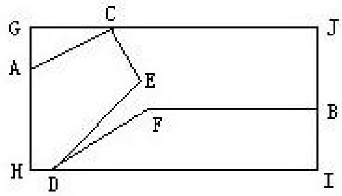
介绍哥尼斯堡七桥问题

历史上有名的七桥问题，是脍炙人口的应用数学去解决实际问题的典范，在欧洲的普鲁士哥尼斯堡镇上有一个小岛，普里格尔河蜿蜒其间，河岸与岛屿间有七座桥相连，在 18 世纪，有人提出：能否不重复地一次接连通过每座桥？这个生活中的问题，引起人们浓厚的兴趣，市民、学生，观光者，竞相"过桥"有人还画出地图，在图上游来走去，还出现了梦游七桥的故事，但问题一直未获解决，被世人谓之哥尼斯堡七桥问题，如图。

后来，问题传到了欧拉手中，欧拉当时才 28 岁，但已是远近闻名的瑞士数学家，他只用了几天思考，就找到了解答，办不到！

欧拉解决问题采用了"数学模型"法，欧拉认为，既然岛与陆地时靠桥来接连的，那么不妨把 4 片陆地缩小（抽象）成 4 个点，并把七座桥表示（抽象）成 7 条边，从而得到了七桥问题的模拟图，这样当然未改变问题的实质，于是人们试图一次无重复地走过 7 座桥的问题就等价于一笔画出模拟图型的问题，如图。





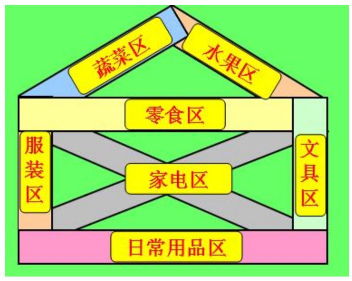
欧拉指出：这是办不到的，因为接连每点的线都是奇数条（这样的点，称为奇顶点）而每通过顶点一次，一入一出要用去 2 条线（因不许重复），只有在起点，有一次只出不入，或在终点，有一次只入不出，因此，要想一笔画出一个图，这个图的奇顶点就不能多于 2 个（没有或恰有 2 个奇顶点）而模拟图奇顶点个数为 4，故不能一笔画，欧拉还给出了一般结论：

①接连奇数座桥的陆地仅有一个或超过两个以上，不能实现一笔画。

②接连奇数座桥的陆地仅有两个时，则从两者任一陆地出发，可以实现一笔画而停在另一陆地。

③每个陆地都接连有偶数座桥时，可以从任一陆地出发都能实现一笔画，而回到出发地。

于是，欧拉经过三种抽象：具体事物抽象成几何对象，实际关系抽象成几何关系，问题的要求抽象成一笔画的条件，从而将实际问题转化成了数学问题。



【趣题 1 逛超市】

某超市的平面图如下，怎样走才能不重复不遗漏地逛完整个超市？

【解答】从日常用品区开始逛

【趣题 2 公园出入口】

下图是一个公园的平面图，能不能使游人走遍每一条路不重复？入口和出口又应设在哪儿？

【解答】出入口设在 A、B 点

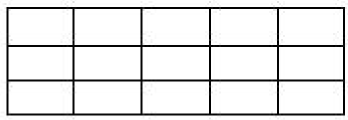
【趣题 3 邮递员送信 1】

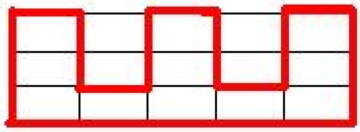
甲乙两个邮递员去送信，两人同时出发以同样的速度走遍所有的街道，甲从 A 点出发，乙从 B 点出发，最后都回到邮局(C 点)。如果要选择最短的线路，谁先回到邮局？

【解答】甲先回到邮局

【趣题 4 邮递员送信 2】

下图为邮递员负责的邮区街道图，图中左下角处横线与竖线的交叉点为邮局，其余交叉点为邮户，每个小长方形的长为 180 米，宽为 150 米，如果邮递员每分钟行 200 米，在每个邮户停留半分钟，那么他从邮局出发走遍所有邮户，再回到邮局，最少需要多少分钟？





【解答】从左下角出发，要回到原点，那么它向右走多少路，必须向左走多少路，向上走多少路，必须向下走多少路。因此为了到达最右边的邮户，走 5 个向右的 180 米再回走 5 个向左的 180 米是必不可少的。在这种情况下消灭奇点的任务就必须全部落到 150 米长的短线上，因此通过如下图粗线设计的方案可用最少的时间走遍所有的邮户，当然也可把图翻过来看，换种走法，答案是一样的。共走（180×10+150×14）÷200+0.5×23=31 分钟.

16. 牛吃草问题

一、教学目标

1．掌握牛吃草问题

2．理解牛吃草问题的改编

二、教学重难点

牛吃草问题

三、教学方法

启发讲授式

四、教学过程

牛顿问题，俗称“牛吃草问题”，牛每天吃草，草每天在不断均匀生长。解题环节主要有四步：

1、求出每天长草量；

2、求出牧场原有草量；

3、求出每天实际消耗原有草量(牛吃的草量-- 生长的草量= 消耗原有草量)；

4、最后求出可吃天数。

1、牧场上有一片青草，牛每天吃草，草每天以均匀的速度生长。这片青草供给 10 头牛可以吃 20 天，供给 15 头牛吃，可以吃 10 天。供给 25 头牛吃，可以吃多少天？

分析：

如果草的总量一定，那么，牛的头数与吃草的天数的积应该相等。现在够 10 头牛吃 20 天，够 15 头牛吃 10 天，10×20 和 15×10 两个积不相等，这是因为 10 头牛吃的时间长，长出的草多，所以，用这两个积的差，除以吃草的天数差，可求出每天的长草量。

①、求每天的长草量

(10×20－15×10)÷(20－10)＝ 5 (单位量)

说明牧场每天长出的草够 5 头牛吃一天的草量。

②、求牧场原有草量

因为牧场每天长出的草量够 5 头牛吃一天，那么，10 头牛去吃，每天只有 10－5＝5 (头)牛吃原有草量，20 天吃完，原有草量应是：(10－5)×20＝100 (单位量)

或：10 头牛吃 20 天，一共吃草量是 10×20＝200 (单位量)

一共吃的草量 － 20 天共生长的草量 ＝ 原有草量

200 － 100 ＝ 100(单位量)

③、求 25 头牛吃每天实际消耗原有草量

因为牧场每天长出的草量够 5 头牛吃一天，25 头牛去吃，(吃的－ 长的 ＝ 消耗原草量)

即：25 － 5＝ 20 (单位量)

④、25 头牛去吃，可吃天数

牧场原有草量 ÷ 25 头牛每天实际消耗原有草量 ＝ 可吃天数

100 ÷ 20 ＝5 (天)

解：（10×20－15×10）÷（20－10）

＝50÷10

＝5（单位量） ------- 每天长草量

（10－5）×20

＝5×20

＝100（ 单位量） ------- 原有草量

100÷ （25－5）

＝100÷20

＝5（天）

答：可供给 25 头牛吃 5 天。

2、牧场上有一片青草，草每天以均匀的速度生长，这些草供给 20 头牛吃，可以吃 20 天；供给 100 头羊吃，可以吃 12 天。如果每头牛每天的吃草量相当于 4 只羊一天的吃草量，那么 20 头牛，100 只羊同时吃这片草，可以吃几天？

分析：

1 头牛每天相当于 4 只羊一天的吃草量，那么 20 头牛就相当于 4×20＝80（ 只）羊吃草量。

每天长草量：

（80×20 －100×12）÷ （20－12）

＝400÷8

＝50（单位量）

原有草量：

（80－50）×20

＝30×20

＝600（单位量）

20 头牛和 100 只羊同时吃的天数：

600÷（80＋100－50）

＝600÷130

＝4（天）

答：20 头牛，100 只羊同时吃这片草，可以吃 4 天。

3、有三片牧场，牧场上的草长得一样密，一样快。它的面积分别是 3.3 公顷、2.8 公顷和 4 公顷。22 头牛 54 天能吃完第一片牧场原有的草和新长出的草；17 头牛 84 天能吃完第二片牧场原有的草和新长出的草。问，多少头牛经过 24 天能吃完第三片牧场原有的草和新长出的草？

分析：

①、第一片牧场 22 头牛 54 天吃完 3.3 公顷所有的草，那么，每公顷草量是(包括生长的)：

22×54÷3. 3＝ 360 (单位量)

②、第二片牧场：17 头牛 84 天吃完 2. 8 公顷所有的草，那么，每公顷草量是：

17×84÷2. 8＝ 510 (单位量)

③、每公顷每天的长草量是：

(510－360)÷(84－54)＝5 (单位量)

④、每公顷原有草量是：

360－5×54＝90 (单位量)

⑤、第三片 4 公顷 24 天共有草量是：

90×4＋5×24×4＝ 840 (单位量)

⑥、可供多少头牛吃 24 天：

840÷24＝35 (头)

解： (17×84÷2.8－22×54÷3.3)÷(84－54)

＝150÷30

＝5 (单位量) ------ 每公顷每天长草量

22×54÷3. 3－5×54

＝360－270

＝90 (单位量) -------- 每公顷原有草量

90×4＋5×4×24

＝360＋480

＝840 (单位量) -------4 公顷 24 天共有草量

840÷24＝35 (头)

答：35 头牛经过 24 天能吃完第三片牧场原有的草和新长出的草。

4、用 3 台同样的水泵抽干一个井里的泉水要 40 分钟；用 6 台这样的水泵抽干它只要 16 分钟。问，用 9 台这样的水泵，多少分钟可以抽干这井里的水？

分析：

用水泵抽井里的泉水，泉水总是按一定大小不断往上涌，这就跟牧场的草一样均匀地生长，因此，把它当作牛吃草问题同解。

每分钟泉水涌出量：

(3×40－6×16)÷(40－16)

＝2 4÷24

＝1 (单位量)

井里原有水量：

(3－1)×40

＝2×40

＝80 (单位量)

9 台几分钟可以抽干：

80÷(9－1)

＝80÷8

＝10 (分钟)

答：用 9 台这样的水泵，10 分钟可以抽干这井里的水。

5、火车站的售票窗口 8 点开始售票，但 8 点以前早就有人来排队，假如每分钟来排队的人一样多，开始售票后，如果开 3 个窗口售票，30 分钟后，不再有人排队；如果开 5 个窗口售票，15 分钟后，不再有人排队。求第一个来排队的人是几点钟到的？

分析：

到窗口排队售票的人，包括两部分，一部分是 8 点以前已等候的人(相似于牛吃草问题中的原有草量)，另一部分是开始售票时，逐步来的人(相似于每天长草量)，开售票窗口多少，相似于“吃草的牛”多少，售票时间相似于“牛吃草”天数。因此，按“牛吃草问题”来解答。

每分钟来排队的人：

(3×30－5×15)÷(30－15)

＝15÷15

＝1 (人)

售票前已到的人数：

3×30－1×30

＝90－30

＝60 (人)

售票前已到的人共用的时间：

60÷1＝60 (分钟)

60 分钟是 1 小时，即第一个来排队的人是售票前 1 小时到达的，8－1＝7

答：第一个来排队的人是 7 点钟到达的。

1 7. 智获取胜问题

一、教学目标：

1. 会结合概率进行简单的决策；

2. 了解生活中的决策问题

二、教学重难点

七环金链问题，过桥问题

三、教学方法

启发讲授式，讲练结合法，计算机辅助

四、教学过程

【1 金币与银币】

在古印度，一位王子向一位聪明的公主求婚。公主为了考研王子的智慧，就请人拿来两个盒子，其中一个装着 10 枚金币，另一个装着一样大小的 10 枚银币。公主请人把王子的眼睛蒙上，并且将两个盒子的位置调换，然后请王子在两个盒子中任意挑选一枚银币，如果是金币的话，公主就嫁给王子，如果是银币的话，王子就娶不到公主。

王子说：在蒙上眼睛前，能否调换盒子的银币组合？公主说：可以。

那么，为了更有把握拿到金币，王子应该如何调换盒子里的银币组合呢？

【解答】

王子将装有金币的盒子里留一枚金币，把另外 9 枚金币装进装有银币的盒子，这样，若他选中那个放一枚金币的盒子，则选中金币的概率是 100%，若选中 19 个钱币的盒子，则取得金币的概率是 9/19.所以，总的选出金币的概率是 1/2+1/2×9/19=14/19.远远大于调换之前的 1/2.

【2 智分银环链】

在古代，有一位老板雇了一位长工，到了年底，他不想给工钱，于是拿出一条环环相扣的七个银环链抵工钱，他告诉长工，你只准砸开其中的一个环，要保证第一天只拿 1 个，第二天只拿 2 个，第三天 3 个，……，第六天 6 个，第七天全部拿完。如果做不到，就别怪我不给你这条银链。你能帮他想个办法，拿到这条项链吗？

【分析】

核心是砸开中间一环后，剩余银环相连数量分别为 2,4.那么砸开第三（或第五）个环即可。

【3 沙漠探险】

有一个探险家，准备用六天时间横穿沙漠，如果一人只能搬运一人四天的粮食和水，那么这个探险家需要雇用多少个搬运工呢？

【4 过桥问题】

在漆黑的夜里，甲乙丙丁共四位旅行者来到了一座狭窄而且没有护栏的桥边。如果不借助手电筒的话，大家是无论如何也不敢过桥去的。不幸的是，四个人一共只带了一只手电筒，而桥窄得只够让两个人同时过。如果各自单独过桥的话，四人所需要的时间分别是 1、2、5、8 分钟；而如果两人同时过桥，所需要的时间就是走得比较慢的那个人单独行动时所需的时间。问题是，如何设计一个方案，让这四人尽快过桥。

【解答】

两人过桥后，需要把手电筒送来，因此最容易想到的是让那个最快的人担任来回送电筒的人。因此，这第一种办法是：先让甲乙过去（2 分钟），甲回来（1 分钟），甲丙过去（5 分钟），甲回来（1 分钟），甲丁再过去（8 分钟），总共需要 17 分钟就可以让四个人都过去。而正确答案是第二种方法：先让甲乙过去（2 分钟），甲回来（1 分钟），丙丁过去（8 分钟），乙回来（2 分钟），甲乙再过去（2 分钟），总共需要 15 分钟就可以让四个人都过去。

这里的一个关键点，是让两个最慢的人同时过桥。

【简单扩展 】

如果把四人所需要的时间，改变一下分别，是 1、4、5、8 分钟。

第一种方法：先甲乙过去（4 分钟），甲回来（1 分钟），甲丙过去（5 分钟），甲回来（1 分钟），甲丁再过去（8 分钟），总共需要 19 分钟就可以让四个人都过去。

第二种方法：先让甲乙过去（4 分钟），甲回来（1 分钟），丙丁过去（8 分钟），乙回来（4 分钟），甲乙再过去（4 分钟），总共需要 21 分钟就可以让四个人都过去。

这一次，两个最慢的人一起过去反而更慢了。

我们比较这两次方案的差异：次快的人要不要也传递一次手电筒。

假定四个人过河时间是 T1,T2,T3,T4 且 T1＜T2＜T3＜T4，如何选择过桥方案。

第一种过河方法的总时间为：T2＋T1＋T3＋T1＋T4

第二种过河方法的总时间为：T2＋T1＋T4＋T2＋T2

二者之差为：（T1＋T3）-2T2。

结论是：如果（T1＋T3）大于 2T2，第二种方法优；如果（T1＋T3）小于 2T2，第一种方法优；如果（T1＋T3）等于 2T2，两种方法无差异。

【5 玛丽莲问题】

有三扇门，其中一扇门的后面是一辆汽车，另两扇门的后面则各有一只羊，你可以猜一次，猜中羊可以牵走羊，猜中汽车则开走汽车。当然大家都希望能开走汽车。现在假如你猜了某扇门的后面是车（例如 1 号门），然后主持人把无车的一扇门（例如 3 号门）打开。

此时，请问：你是否要换 2 号门？假若你有幸参加一个电视台主办的有奖竞猜节目，台上有三扇门，在其中一扇门后停着一两豪华轿车，另外两扇门后面个站着一只羊。主持人先让你选中一扇门，选好后告诉他是哪一扇（便于说明，把三扇门分别编号为 1，2，3，假设你选中的是 1 号门）。这时主持人再给你一次机会，他从剩余的两扇门中打开一扇，比如第 2 号门（或 3 号门），里面是一只羊，这时主持人问你，是否愿意改变注意，换选第 3 号门（或 2 号门）。“换”还是“不换”，

你怎么抉择？

【解答】应该换

事实上，换不换取决于：主持人是随机选的呢？还是故意打开有羊的门呢？

（3）如果主持人是随机选的，那么他和你的地位是等同的（都是随机选，先选后选 无所谓），你们两个选到车的概率都是 1/3，另一扇门后有车的概率也是 1/3，所以换不换无所谓。

（4）如果主持人是故意打开有羊的门，那么他选到车的概率当然是 0，而你选到车的概率还是 1/3，这样另一扇门后有车的概率就是 2/3，所以应该换。

１8. 去伪存真问题

一、教学目标

1）学会简单的逻辑推理

2）了解几个悖论

二、教学重难点

3.重点：逻辑推理

4.难点：逻辑推理

三、教学方法

启发讲授式，计算机辅助

四、教学过程

【1.苹果在哪里】

三个箱子分别涂有红、黄、蓝三色。一个苹果放入其中之一，且：三个箱子上分别写着：

红箱：苹果在这只箱子里

黄箱：苹果不在这只箱子里

蓝箱：苹果不在红箱里

已知三句话中只有一句是真的，问苹果在哪只箱子里？

【2.三位老师】

有张、王、李3位老师，不知道各教什么课程，只知道，3人中，一位教语文，一位教数学，一位教外语。另外还知道，张老师讲课只说中国话，外语老师是一位同学的叔叔，李老师是女的，她不教数学课。他们3人究竟教什么课呢？

【3.谁得优秀】

六年级同学毕业前，凡报考重点中学的同学，都要参加体育加试，加试后，甲乙丙丁4名同学谈论他们的成绩。

甲说：如果我得优，那么乙也得优。

乙说：如果我得优，那么丙也得优。

丙说：如果我得优，那么丁也得优。

以上三人说的都是真话，但4人中只有2人得优。问：谁得优？

【4.谁打破玻璃】

A、B、C、D四个孩子在院子里踢足球，把一户人家的玻璃打碎了，可是当房主人问他们是谁踢的球把玻璃打碎的。

A说 “是C打的。”

C说 “A说的不是事实。”

B说 “不是我打的。”

D说 “是A打的。”

已知他们中有一个人很老实，不会说假话，其余三个人说的是假话。 你能否分析一下：说真话的是谁？玻璃又是谁打破的吗？

【5.红白帽子】

有三顶红帽子和两顶白帽子，将其中的三顶分别给面向前面排成1列的A、B、c三人戴上.每人只能看到自己前面的人带的是什么颜色的帽子，自己以及自己后面的人带的是什么颜色的帽子是看不到的.问：“你知道自己带的是什么颜色的帽子吗？”

最后的一位C回答“不知道”.然后中间的B考虑一会儿后回答“我也不知道”，A听了两个人的回答说：“哈……我知道了，颜色是……”那么A戴的是什么颜色的帽子呢？

【解答】：是红的.

A是这样考虑的.

C的回答“不知道是因为自己（A）和（B）两人戴的都不是白色的（即不是下表①的情况）.此时B也说“我不知道”，一定是因为自己（A）戴的帽子是红的.为什么呢？如果自己（A）戴的是白色的（①，②，③的情况下），从C的回答来看，B应该知道自己的帽子是红的（因为不是①，按照②或③，B是红的）.可是因为那个聪明的B也说了“我不知道”，那么自己（A）不是白的，因此，自己（A）应该是红的.

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
A	白	白	白	红	红	红	红
B	白	红	红	白	白	红	红
C	红	白	红	白	红	白	红
	×	×	×				

这个游戏也可以扩展到红帽子n顶以上，白帽子n－1顶，人数n个人的情况.假定从最后的人依次向前每人都回答“我不知道”，最前面的人便会知道自己戴的是“红的”.

【6问路问题】

有这样一个故事：在太平洋中有AB两个相邻的小岛。A岛居民都是诚实的人，B岛的居民都是骗子。当你问一个问题时，A岛的居民会告诉你正确的答案，而B岛的居民给你的答案都是错误的。一天，一个旅游者独自登上了两岛中的某个岛。他分辨不清这个岛是A岛还是B岛，只知道这个岛上的人既有本岛的居民又有另一岛的来客。他想问岛上的人“这是A岛还是B岛？”却又无法判断被问者的答案是否正确。旅游者动脑筋想了会一儿，终于想出一个办法，他只需要问他所遇到的任意一人一句话，就能从对方的回答中准确无误地断定这里是哪个岛。你能猜出旅游者所问的问题吗？

如果旅游者直接问“这是A岛还是B岛？”那么当被问者是A岛人时，他会得到正确的回答；当被问者是B岛人时，他会得到错误的回答。两种回答截然相反，而旅游者又无法知道他得到的答案对不对，因此这样问话达不到问路的目的。聪明的旅游者的问话是，“你是这个岛的居民吗？”如果对方回答“是”，那么这个岛一定是A岛；如果对方回答“不是”，那么这个岛一定是B岛。你能说出这是为什么吗？

【分析】下面我们就对上面的问题进行分析：我们知道，旅游者提出问题时并不知道提问地是何岛，也不知道被问者是何岛居民。他要从所听到的第一句回答来判断问话地是何岛。因此，所提问题的答案必须是因提问地而异，而不由被问者是A岛居民或是B岛居民发生变化。

根据上述特点，我们设法找到这样的问题：

1、使得在A岛提问时，被问者（不论是何岛居民）都回答同样的一种答案；

2、在B岛提问时，被问者都回答另一种答案。

于是，我们就可以根据任一人的回答来判断提问地为何岛了。显然，这样的问题必须与提问地相关，并且还要与被问者有关，如果在A岛提出这样的问题时，A岛居民应作肯定回答（B岛居民也会作肯定回答，但这种回答与客观实际相反），那么在B岛提出同一问题时，A岛居民应作否定回答（B岛居民也会做否定回答，但回答与实际情况相反）。

“你是这个岛的居民吗？”这一问题就是一个满足以上要求的问题，我们通过下表表示在不同的提问地的不同的被问者对问题的相应回答。

问题：你是这个岛的居民吗？		
问话地	被问者	
	A岛居民	B岛居民
A岛	回答	

	是	是
B岛	不是	不是

由上表可以一目了然地发现：在A岛提问时，回答总为“是”；在B岛提问时，回答总为“不是”。这就为旅游者判断提问地是哪个岛提供了依据，于是“问路问题”得以解决。

请想一想，如果旅游者的问题为“你是相邻的另一岛上的居民吗？”，那么能根据任一人的回答来判断提问地是何岛吗？为什么？试通过列表的方式说明理由。

数学中有个分支叫做数理逻辑，它通过数学方法来研究逻辑规律。在数理逻辑中，列表法是一种基本的研究方法，只是其中表的形式与本文中的表有许多不同，使用了一些有关命题、真值的抽象符号，但其基本思想与我们用表讨论问题的思想是大体一致的，都是通过列表来分析和说明问题。

数学是以逻辑推理为重要研究方法的学科。所谓逻辑推理，就是合乎事理的、有根有据的推导判断。上面的两个问题正是运用到逻辑推理的问题，同学们应在数学学习中注意提高自己的逻辑推理能力，使自己勤于思考并且善于思考，成为聪明人。

（二）悖论

悖论：从“正确”的前提出发，经过“正确”的逻辑推理，得出荒谬的结论。

【悖论一】理发师悖论

一天，萨维尔村理发师挂出了一块招牌：村里所有不是自己理发的男人都由我给他们理发。

于是有人问他：

“您的头发谁给理呢？”

理发师顿时哑口无言。

如果给自己刮脸，就与“不给自己刮脸的人刮脸”矛盾；如果不给自己刮脸，又与“给所有自己不刮脸的人刮脸”矛盾。

【悖论二】全能的上帝

有个虔诚的教徒，他在演说中口口声声说上帝是无所不能的，什么事都做得到。一位过路人问了一句话：

“上帝能创造一块他自己也举不起来的石头吗？”

教徒哑口无言

如果能，则说明上帝并非全能；如果不能，则说明上帝并非全能。

【悖论三】聪明的追求者

男：我说一句话，如果这句话是真的，那么你就给我你的相片，可以吗？

女： 可以

请问男说了一句什么话使得这个女生只能将玉照送他？

男：你不会给我你的相片