教　案

2025-2026 学年第一学期

课程名称　　应用数学基础

专业班级　　机器人 251（3+）

总学时数　　32　学时

任课教师　　黄潼

课程基本信息

<table>
<tr><td>课程名称</td><td colspan="6">应用数学基础</td></tr>
<tr><td>课程性质</td><td colspan="2">专业必修</td><td colspan="2">学分</td><td colspan="2">2.0</td></tr>
<tr><td>学 时</td><td colspan="6">总学时：32 学时，其中：课堂讲授 32 学时；课内实验/实训 0 学时。</td></tr>
<tr><td>开课部门</td><td colspan="2">机电工程系</td><td colspan="2">任课教师</td><td colspan="2">黄潼</td></tr>
<tr><td>授课
专业、班级</td><td colspan="2">工业机器人技术 251（3+）</td><td colspan="2">开课学期</td><td colspan="2">2025-2026 第一学期</td></tr>
<tr><td>成绩评定</td><td colspan="2">平时成绩占 40 %；期末成绩占 60 %</td><td colspan="2">考核方式</td><td colspan="2">考试</td></tr>
<tr><td rowspan="2">选用教材</td><td>书 名</td><td colspan="2">主 编</td><td colspan="2">出版社</td><td>出版日期</td></tr>
<tr><td>高等数学（理工科用） 第 3 版 上册</td><td colspan="2">方晓华</td><td colspan="2">机械工业出版社</td><td>2022.8</td></tr>
<tr><td>本课程在本专业人才培养方案中的地位和作用</td><td colspan="6">应用数学基础提供了许多学科的基础理论工具，如极限的运算、导数与微分和函数的极限与最值等。这些知识对于理解和解决实际问题至关重要。通过学习应用数学，学生能够培养出解决实际问题的能力。无论是工程设计中的优化问题，还是经济分析中的预测模型，都需要应用数学的知识来建立模型并求解。应用数学训练了学生的分析能力和建模能力，这对于科学研究和技术开发都非常重要。</td></tr>
<tr><td>本课程
教学目标</td><td colspan="6">通过学习，学生应掌握应用数学的基本概念、定理和公式能够理解并应用相关的数学理论。学生能够将数学知识应用于解决实际问题中，提高分析问题和解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td>素质（思政）内容与要求</td><td colspan="6">将思政元素融入《高等数学》课程，旨在培养学生的爱国情怀、科学精神、辩证思维以及社会责任感。
一、挖掘数学史中的思政元素
二、结合教学内容进行唯物辩证法教育
三、融入家国情怀和社会责任
四、培养数学思维和科学精神
五、结合实际应用进行思政教育
六、创新教学方法和手段</td></tr>
</table>

学生用主要参考资料	方晓华，高等数学（理工科用） 第 3 版 上册，机械工业出版社，2022.

第一章　函数、极限与连续（12 学时）

学习目标：

1、理解函数的概念，会求函数的定义域及建立简单的函数关系式；

2、了解函数的奇偶性，单调性，周期性和有界性；

3、理解复合函数的概念，掌握复合函数复合过程的分解。了解反函数的概念；

4、掌握基本初等函数的性质及图象；

5、理解极限的概念，会描述各种极限的状态；

6、熟练掌握极限的四则运算法则；

7、会用各种求极限的方法及两个重要极限求数列和函数的极限；

8、正确理解无穷小，无穷大及无穷小的阶的概念，会用等阶无穷小求极限；

9、理解函数在一点连续的概念；

10、了解间断点的概念并并会判断间断点的类型；

11、了解初等函数的连续性及在闭区间上连续函数的性质（最值定理和介值定理）。

1.1 函数

一、教学目标：

1、理解函数的概念，掌握函数定义域、值域的求解方法；

2、掌握函数的表示方法，会求解函数的奇偶性，周期性，单调性。

3、了解几种基本初等函数，掌握复合函数的概念，会判断函数是否为复合函数；

二、教学方法、手段：

讲授法，师生互动，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：强调函数关系中自变量与因变量的相互依赖，引导学生理解事物间普遍联系的哲学思想，培养系统思维和全局观念。

案例：通过经济模型中的供需函数，讨论市场平衡点的形成与调整，引导学生思考经济政策的制定应如何考虑各因素间的相互作用。

四、教学重点与难点：

重点：定义域的求解；函数的几种特性；复合函数的判断

难点：定义域的求解；奇偶性的判断；复合函数的判断

五、教学内容设计：

利用现实生活中的一个实例（匀速运动），引起学生的兴趣，进一步使学生想了解什么是函数，好奇心吸引学生们认真听课。顺利引出函数。

1、函数的定义（课件展示）

说明：函数是变量间的一种对应关系（单值对应），函数的表达式如下：

$$y = f(x), x \in D$$

(1)定义域：自变量的取值集合（D）。

(2)值域：函数值的集合，即 $y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$。

2、函数的二要素（板书）

构成函数的两个重要因素：定义域和对应法则。

如果两个函数定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数是相同的。**（熟记）**

注意：为了使定义域在数学上有意义，要求，

（1）分母不能为 0 。如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 时

（2）偶次根号下非负。如 $f(x)=\sqrt{x}$ 时

（3）对数的真数大于 0 。如 $f(x)=\ln^{x}$

（4）正切符号下的式子不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ 。

（5）余切符号下的式子不等于 $k\pi, k\in Z$ 。

（6）反正弦、反余弦符号下的式子绝对值小于等于 1。

例 1 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ 的定义域。

例 2 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^{2}}+\ln(x-2)$ 的定义域。

说明：根据学生们做题的情况，老师仔细深刻地讲解，加深学生对定义域求解的理解和掌握。

3、函数的表示方法

通过板书结合实例，简述函数的表示方法，并且给出函数让学生用不同的方法表示该函数，加强学生对函数的表示方法的理解。

4、分段函数

分段函数：对自变量的不同取值范围，函数用不同的表达式。

例如：符号函数、狄立克莱函数、取整函数等。

分段函数的定义域：不同自变量取值范围的并集。

注意：求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按照其对应的式子进行计算。

点评：通过例题的讲解，加深学生对于分段函数的认识

5、 函数常见的几种基本特性（课件展示，板书辅助）

函数常见的四种基本特性：奇偶性，周期性，单调性，有界性。

讲解思路：（1）给出奇偶函数的图形，对比性地进行讲解；

（2）通过例题讲解，示范最小正周期的求解方法

（3）给出一些函数，提问学生函数是否有界。

6. 基本初等函数（课件展示，板书辅助）

熟记：六种基本初等函数的定义域、值域、图像、性质。

板书：结合图形，讲解六种基本初等函数的定义域，值域及性质。

7. 复合函数（板书给出）

说 明：(1)并非任意几个函数都能构成复合函数。

如：$y=\ln u$，$u=-\ x_2$ 就不能构成复合函数。

(2)复合函数的定义域：各个复合体定义域的**交集**。

(3)复合函数的分解**从外到内**进行；复合时，则**直接代入**消去中间变量即可。

强调：在求两个函数的复合时，注意中间变量的取舍。

板书：给出例题，让学生们做练习，加深学生对复合函数的理解和掌握。

复合函数反映了事物联系的复杂性。

8. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的，并且能用一个数学式子表示的函数，叫做初等函数；否则，不是初等函数。

说 明：（1）一般分段函数都不是初等函数，但$y=|x|$ 是初等函数；

（2）初等函数的一般形成方式：复合运算、四则运算

六、教学作业：

课本 P15 习题 1-1　1、5、7、8

1.2 极限

一、教学目标：

1、掌握数列的概念，会求解数列的极限以及判断数列极限的收敛性和发散性。

2、掌握函数极限的概念，运用函数极限的概念求函数的极限；

3、理解函数左右极限的的概念，会利用函数左右极限判断函数的极限是否存在。

4、掌握无穷小量与无穷大量的关系

二、教学方法、手段：

讲授法，师生互动，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：极限概念体现了“量变引起质变”的哲学原理，引导学生理解事物发展的渐进性和阶段性。

案例：结合人口增长模型，讨论资源有限性与人口无限增长之间的矛盾，引导学生思考可持续发展的重要性。

四、教学重点与难点：

重点：数列极限的求解、函数的极限及函数极限的求法；

无穷小量与无穷大量的概念及它们的关系；

难点：左极限与右极限。

无穷小量与无穷大量的关系。

五、教学内容设计：

1. **数列的概念 （课件展示）**

板书：举出例子，配合讲解数列的概念，引起学生对于数列的极限的意识。

2. **数列的极限（课件展示）**

根据下面的一个例子引出数列极限的概念。

半径 r 的圆内接正多边形面积 $S_n=f(n)$，n 为正多边形的边数，当 n 越来越大时，S_n 就越来越接近圆的面积，当 n 无限增大时，S_n 就无限接近圆的面积。这时，我们说 S_n 以圆的面积为极限。

通过对以下例子的讲解，使学生更进一步地理解数列极限的概念，并且会运用数列极限的概念去解题。

例如：当 $n\to\infty$ 时，$y_n=\frac{1}{2^n}$ 收敛于 0；

当 $n\to\infty$ 时，$y_n=1+\frac{1}{n}$ 收敛于 1；

当 $n\to\infty$ 时，$y_n=n$ 无极限，发散；

当 $n\to\infty$ 时，$y_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 时而取 0，时而取 1，震荡无极限，因而也是发散的。

注意：数列极限的收敛性。

3. **函数的极限（课件展示）**

引例：函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图形。

老师通过对引例的讲解，使学生们对函数的极限有一个初步的认识，最后给出极限的定义。

1、当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限（课件展示）

（1）函数 $f(x)$ 当 x 趋向于无穷（记为 $x\to\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A。$$（熟记）

（2）函数 $f(x)$ 当 x 趋向于正无穷（记为 $x\to+\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 当 } x\to+\infty \text{ 时，} f(x)\to A。$$（熟记）

（3）函数 $f(x)$ 当 x 趋向于负无穷（记为 $x\to-\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 当 } x\to-\infty \text{ 时，} f(x)\to A。$$（熟记）

$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$。（结论）

注：$x>0,x$ 无限增大时，函数值 $f(x)=\frac{1}{x}$ 无限接近于 0；

$x<0,x$ 无限减小时，函数值 $f(x)=\frac{1}{x}$ 无限接近于 0。

2、当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A\,(x \to x_0)$$ （熟记）

3、函数左右极限的概念

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$；

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$；

注：左右极限统称为函数 $f(x)$ 的单侧极限。

函数 $f(x)$ 的极限与左、右极限有以下关系：

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$。

注：我们主要利用此充要条件来验证某些函数主要是分段函数在分段点处的极限情况。

4、无穷小量

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ 为无穷小量；（**理解**）

例如：因为 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$，所以 x^2，$\sin x$ 均是当 $x \to 0$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2-1\right) = 0$, 所以 $x-1$, x^2-1 均为当 $x \to 1$ 时的无穷小。

因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$，$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$, 所以 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}$ 均为当 $x \to \infty$ 时的无穷小。

注意：（1）确定 $f(x)$ 是无穷小，需指出 x 的变化趋势；

（2）绝对值很小的常数，不是无穷小，因为这个常数的极限是常数本身并不是零。

（3）常数中只有零是无穷小，因为它的极限为零。

例如 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 是当 $x \to \infty$ 是的无穷小；而当 x 趋于常数时，不再是无穷小。

5、无穷小量的性质（理解）

（1）无穷小的可加性；

（2）无穷小的可积性；

（3）有界函数与无穷小的可积性；

（4）常数与无穷小的可积性。

老师利用板书通过例题以上面的性质一一进行讲解。

6、无穷大量（课件展示）

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$ 。（**无穷大量**）

例如， $\frac{1}{x}$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$；

$\frac{1}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$；

e^x 是当 $x\to +\infty$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x=+\infty$；

$\ln x$ 是当 $x\to 0^+$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$。

老师采用提问的方式对以上的例子进行了讲解，并得出以下注意项。

注意：（1）无穷大不是一个很大的数，它是一个绝对值无限增大的变量。

（2）确定函数 $f(x)$ 是无穷大，需指出自变量 x 的变化趋势，例如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷大；当 $x\to\infty$ 时，是无穷小。

（3）无穷大必为无界函数；反之无界函数不一定为无穷大。例如：当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x\sin x$ 是无界函数，但不是无穷大量。

（4）无穷大是极限不存在的一种情形，这里借用极限的符号，但并不表示极限存在。

三、课堂演练

例 1、分解下列复合函数；

（1）$y=\sqrt{x^2+1}$ （2）$y=e^{\sin x}$

例 2、求下列数列的极限并说明其收敛性；

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdots\cdots;$ $1,-1,\cdots\cdots,(-1)^{n-1},\cdots\cdots;$

$2,4,6,\cdots\cdots,2n,\cdots\cdots;$ $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots\cdots;$

其通项分别为 $\frac{1}{n},(-1)^{n-1},2n,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 。

例 1：求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^3-x+5}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to-2}(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8})$；

（3）$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$；

例 2：试求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,-\infty<x<0;\\ x^2,0\le x\le1;\\ 1,x>1。\end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限。

六、教学作业：

课本 P22 习题 1-2　1、5、6

1.3 极限运算

一、教学目标：

1、熟练掌握函数极限的运算法则，并且会用极限的运算法则求函数的极限。

2、正确理解函数的两个重要极限，并会用两个重要极限求函数的极限。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：强调严谨的逻辑推理和精确的计算能力，培养学生的科学精神和工匠精神。

案例：通过解析几何中的极限问题，如切线斜率的计算，引导学生体会数学在解决实际问题中的精确性和严谨性。

四、教学重点与难点：

重点：会利用函数极限的运算法则求函数的极限；

函数的两个重要极限；

无穷小量与无穷大量的比较方法

难点：函数的极限的运算法则；

运用函数的两个重要极限；

无穷小量与无穷大量的比较方法

五、教学内容设计：

1、极限的性质

在讲极限的性质之前，给出两个新的概念：邻域和去心邻域。（了解）

开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的邻域；

开区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域，其中 $\delta>0$。

极限的性质：（了解）

（1）惟一性；（2）有界性；

（3）局部保号性；局部保号性的推论；（4）夹逼准则。

根据函数的图形，一一讲解极限的性质，使学生们对函数的极限有更进一步的认识和理解。

2、极限的运算（熟记）

（1）极限的可加（减）性；

（2）极限的可乘性；

（3）极限的可除性。

老师根据例题对上面极限的运算一一进行了讲解，通过对极限运算法则的讲解给出如下折推论。

推论 1　常数可以提到极限号前，即 $\lim Cf(x) = C\lim f(x) = CA$。

推论 2　若 m 为正整数，则 $\lim[f(x)]^m = [\lim f(x)]^m = A^m$。

注意：在不能直接用极限的四则运算法则时，可先考虑　　将函数适当变形，再考虑能否用极限的四则运算法则。常用的变形方法有：通分，约去非零因子，用非零因子同乘或同除分子分母，分子或分母有理化。

3、两个重要极限（列表说明）　（熟记）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

4、无穷小量与无穷大量的关系（作图说明）

结论：在自变量的同一变化过程中（注意：在极限符号中省略了自变量的变化趋势），设 $f(x)\neq 0$，若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$，反之，若 $\lim f(x)=0$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$。

老师利用板书通过例题对上述结论做进一步的讲解，使学生对无穷小与无穷大的关系有进一步的理解。

5、无穷小量与无穷大量的比较

结论：（1）高阶无穷小；

（2）低阶无穷小；

（3）同阶无穷小；

通过给出的例题对无穷小与无穷大的比较仔细讲解，使学生正确理解并会利用。

定理：如果当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\overline{\beta}(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overline{\beta}(x)}{\overline{\alpha}(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overline{\beta}(x)}{\overline{\alpha}(x)}$。

说明：求两个无穷小之比时，分子、分母均可用等价无穷小替代。

注意：常见的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，有

$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$e^x - 1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$等。

强调：等价无穷小中的x，可用含有x的表达式代替。

三、课堂演练

例 1：求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$；（2）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-2}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3+3x^2-2}$；

例 2：求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+8x-7)$。

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$。

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$。

例 2 利用等价无穷小代换定理求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan 2x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x}$。

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$。

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$。

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{5x}\right)^x$。

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{(x+2)}$。

六、教学作业：

课本 P29 习题 1-3 1、4、5

1.4 函数的连续性

一、教学目标：

1、了解增量的概念，熟练掌握函数的连续性；

2、正确理解函数的左右连续性，会利用函数的左右连续性判断函数在某一点是否连续。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：连续性概念反映了事物发展的连续性和稳定性，引导学生理解稳定是发展的前提。

案例：结合生态环境中的物种数量变化，讨论生态平衡的重要性，引导学生思考人类活动对自然环境连续性的影响。

四、教学重点与难点：

重点：函数的连续性以及它的左右连续性；

难点：函数的连续性以及函数的左右连续性。

五、教学内容设计：

一、复习基础知识——无穷小与无穷大的关系及比较

1、无穷小与无穷大的关系；

2、无穷小量与无穷大量的比较；

3、两个重要极限。

二、导入新课

通过对给出的两个函数的图象（一个是间断的，一个是不间断的）进行的讲解，引出函数增量的概念，从而也引出了函数的连续性。

三、讲授新课

1、增量的概念（课件展示）

注意：增量 Δu 可正可负。当 $\Delta u>0$ 时，说明变量 u 从数值 u_1 变到数值 u_2 是增加的；当 $\Delta u<0$ 时，说明变量 u 从数值 u_1 变到数值 u_2 是减少的。称

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

为函数 $f(x)$ 的增量。

2、函数连续性的概念（课件展示，板书辅助）

定义 1：若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，并且称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的连续点。

定义 2：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

根据定义 2 的内容，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，需满足如下条件：**（重点且熟记）**

① $f(x)$ 在点 x_0 及附近有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；在

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

利用板书给出例题，老师通过例题讲解函数的连续性，使学生们正确掌握函数的连续性，并且会利用函数连续性的定义求解函数的连续性。

3、函数的左右连续性

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$），

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续（或右连续）。即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)。$$

说明：如果函数 $f(x)$ 在某一区间上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续，或者说 $f(x)$ 是该区间上的连续函数。

注：连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线。

关于函数的连续性有下面**三点结论：**

（1）基本初等函数在它们的定义区间内，都是连续的；

（2）连续函数的和、差、积、商（分母不能为 0）在它的定义区间内，是连续函数；

（3）由连续函数复合而成的函数，在它的定义区间内是连续函数。

三、课堂演练

例 1 讨论函数 $y = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 的连续性。

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)$；

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$；

例 4 求 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$。

六、教学作业：

课本 P33 习题 1-4 1、2

第二章　　导数与微分（4 学时）

学习目标：

1、理解导数的概念，了解导数的几何意义，会求曲线在给定点处的切线方程与法线方程，知道函数的可导与连续的关系。

2、掌握函数四则运算的求导法则，复合函数求导法则和基本初等函数的导数公式，并能熟练地求初等函数的导数。

3、理解高阶导数的定义及二阶导数的力学意义，并能熟练地求二阶导数。

4、会求隐函数的导数和使用对数求导法；会求由参数方程所确定的函数的导数。

5、理解微分的概念，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性。

6、会用微分进行近似计算。

2.1 导数的概念

一、教学目标：

1、正确理解导数、左右导数的概念；

2、掌握通过左右导数的方法求函数的导数。

3、掌握通过导数的几何意义求函数在某一点的切线法线方程；

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：导数作为变化率的数学表达，引导学生理解事物发展的速度和趋势，培养前瞻性思维。

案例：通过经济增长率的计算，引导学生分析经济增长的动力和潜力，思考如何促进经济高质量发展。

四、教学重点与难点：

重点：导数的概念；

难点：会利用左右导数求函数在某一点的导数。

五、教学内容设计：

1、引入新课

引入匀变速运动的例子（课件展示）。

提问：路程 s 和时间 t 之间的函数关系，在数学中该如何描述。

小结：实质上就是路程在某一时刻的变化率，即函数增量与自变增量比值的极限，这种特殊的极限就是函数的导数。

总结解决此例题的步骤如下：

（1）求增量：

（2）定比值：

（3）取极限：

强调：上述步骤是函数求导的基本方法，需要学生掌握。

二、讲授新课

1、导数的概念

通过以上对讲解，给出导数的概念。

注意：

（1）导数的常见形式还有：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}；$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}；\qquad \text{（h 即自变量的增量 } \Delta x\text{ ）}$$

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映的是曲线在 $[x_0,x]$ 上的平均变化率，而 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 是在点 x_0 的变化率，它反映了函数 $y=f(x)$ 随 $x\to x_0$ 而变化的快慢程度。

（3）这里 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 与 $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 中的 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{df}{dx}$ 是一个整体记号，而不能视为分子 dy 或 df 与分母 dx。

（4）若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，就称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不可导。特别地，

如果函数 $f(x)$ 在开区间 D 内的每一点 x 处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 D 内可导，其导数一般是 x 的函数，这个函数称为原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称导数，记为 y'、$f'(x)$、$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$。

如果将上面式子中的 x_0 换成 x，即得到导函数的定义式为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

说明：

（1）上式中，虽然 x 可以取开区间 D 内的任何数值，但在求极限的过程中，x 被当作常量，Δx 或 h 是变量。

（2）在没有特别说明的情况下，导数指的是导函数。如果给出了具体的点，导数指的是该点

的导数值。

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0} 。$$

以后，如果求函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，就用先求导函数 $f'(x)$ ，再将点 $x=x_0$ 代入 $f'(x)$ 。

2、左右导数的概念

从导数的定义中可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是一个极限。

提问：函数的连续有左连续和右连续，那么函数的导数的左导数和右导数吗？

结论：

把相应的左、右极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，记做 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$ ，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2\text{-}6)$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2\text{-}7)$$

说明：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等。

这里需要强调的是函数的左右导数是用来判断函数在某一点是否可导的。

3、导数的几何意义

引入实例，切线问题的求解，侧面讲解导数的几何意义。（课件展示）

由切线问题的讨论和导数的定义知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率。

过切点 $M_0(x_0,y_0)$ 且垂直于切线的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的法线。

如果 $f'(x_0)$ 存在，则曲线 $y=f(x)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)；$$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad ， \quad (f'(x_0)\neq 0) 。$$

注意：当 $f'(x_0)$ =0 时，切线方程为平行于 x 轴的直线 $y=f(x_0)$ ，法线方程为垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ ；当 $f'(x_0)=\infty$ 时，切线为垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ ，法线为平行于 x 轴的直线 $y=f(x_0)$ 。

4、按定义求导数

在上节课我们学习了导数的概念，那么谁知道按照定义怎样求函数的导数呀？

学生们相互讨论，老师启发学生们思考，最后给出正确的结论。

求 $y=f(x)$ 的导数 y' 的一般步骤如下：

（1）求增量： $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（2）算比值；

（3）取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

说明：按定义求导数是这节课的重点，需要学生们会运用“三步骤”。

六、教学作业：

课本 P43 习题 2-1　5、7、9、12

2.2 导数的运算

一、教学目标：

1、掌握导数的定义求导法则，熟练掌握导数的四则运算法则；

2、掌握利用复合函数的求导法则求函数的导数；

3、正确理解隐函数的定义，掌握隐函数的求导法则。

4、正确理解对数函数的求导法则，熟练掌握基本初等函数的导数公式；

5、掌握函数的二阶导数以及简单函数的 n 阶导数。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：强调规则意识和创新思维在解题中的应用，培养学生的规则意识和创新能力。

案例：通过复杂函数的导数求解，鼓励学生探索新的解题方法和技巧，培养创新思维。

四、教学重点与难点：

重点：导数的四则运算、复合函数的求导法则；
基本初等函数的导数公式；

难点：利用隐函数的求导法则求函数的导数
求函数的二阶以及二阶以上的导数。

五、教学内容设计：

1、导数的四则运算法则

（1）设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 处可导，则 $u\pm v$ 也在 x 处可导，且 $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 。

（2）设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 处可导，则 $u\cdot v$ 也在 x 处可导，且 $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ 。

推论：$(cu)'=cu'$（c 为常数）。

注意：以上两个法则可推广到有限个函数的情形。

（3）设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在点 x 处可导，$v(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{u}{v}$ 也在点 x 处可导，且 $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ 。

注：$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{(v)'}{v^2}$；$(uv)'\neq u'v'$，$\left(\dfrac{u}{v}\right)'\neq\dfrac{u'}{v'}$ 。

2、复合函数求导法则

复合函数的求导法则：设 $u=\varphi(x)$ 在 x 可导，函数 $y=f(u)$ 在相应的点 u 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处也可导，且 $\left(f\left[\varphi(x)\right]\right)'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$。

说明：应用复合函数求导时，首先要分析由哪些函数复合而成，如果所给函数能分解成比较简单的函数，而这些函数的导数易求，那么应用复合函数的求导法则就可以求出所给函数的导数。

注意：区别复合函数的求导与函数乘积的求导。

设计意图：通过讲练结合，让同学们有一个理解求导法则的过程。

3、隐函数的定义

课件展示：隐函数的定义。

板书：给出几个函数，让学生们判断哪些函数是显函数哪些是隐函数。

说明：

有些隐函数可以变换为显函数，例如 $2x+2y-5=0$，可化为 $y=-x+\frac{5}{2}$；但有些隐函数则很难化为显函数，如 $\sin(x+y)=e^{y}$。

说明：要想直接计算隐函数的导数，需要找出隐函数求导的方法。

下面就讲解隐患函数的求导法则。

4、隐函数的求导法则

通过以上学生们对显函数及隐函数定义的学习，对它们的形式已经基本上掌握了，但是要想计算隐函数的导数，还是需要找出隐函数的求导法则。如下：

求方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数的导数 y'，只要将方程中的 y 看作是 x 的函数，利用复合函数的求导法则，在方程两边同时对 x 求导，就可得到一个关于 y' 的方程，然后从中解出 y' 即可。

设计思路：讲解教材例题，加强同学们对隐函数求导法则的理解。

5、基本初等函数的导数公式

课件展示：基本初等函数的求导公式（熟记）。

说明：基本初等函数的求导公式是我们用来求函数导数的关键，因此，求导公式不但熟记，而且要求会运用它来求函数的导数。

思路：为同学们仔细分析每一个初等函数的导数公式，加强学生对求导公式的理解和运用。

6、高阶导数

提问：在前面我们所学的都是求函数的一阶导数，二阶导数怎么求呢？

设计思路：通过提问，引出高阶导数的概念，以此为源头逐步进行讲解，给出高阶导数的定义。

一般地，$y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y'=f'(x)$ 的导数称为 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y''=(y')' \text{ 或 } f''(x)=[f'(x)]' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)。$$

类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，…。一般地，$n-1$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ y^{(5)},\ldots,\ y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}。$$

二阶及二阶以上的导数，统称高阶导数。

说明：求高阶导数是一个逐次向上求导的过程，无须其它新方法，只用前面的求导方法就可以了。

六、教学作业：

课本 P52 习题 2-2　9、10、11、12、13

2.3 微分及其应用

一、教学目标：

1、正确理解微分的概念；

2、了解微分的几何意义，会运用基本初等函数的微分公式求函数的微分。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：微分作为局部变化的线性近似，引导学生理解“以小见大”的哲学思想，培养细致观察和深入分析的能力。

案例：通过物理学中的微小位移分析，引导学生理解微积分在自然科学中的广泛应用和重要性。

四、教学重点与难点：

重点：微分的概念及微分公式；

难点：利用基本初等函数的微分公式求函数的微分。

五、教学内容设计：

一、引入新课

给出一个实例“一块正方形均质金属薄片因为受热膨胀（课件展示），其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ ”通过图形，分析此问题。

正方形的面积 A 与边长 x 的函数关系为：$A=x^2$。据此，薄片面积的增加量可以看成当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 $A=x^2$ 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x^2{}_0=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\text{。}$$

ΔA 的几何意义很明显，ΔA 由两部分构成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性代数，是图 2-2 中画斜线的两个小长方形的面积之和；第二部分是 $(\Delta x)^2$，是图 2-2 中画交叉线的小正方形的面积。一般情况下，当 Δx 很小，$(\Delta x)^2$ 更小。当 $\Delta x\to 0$ 时，$(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$。所以，当 Δx 很小时，$2x_0\Delta x$ 是 ΔA 的很好的近似，即 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x$

设计意图：通过对此实例的讲解，引出微分的概念。

二、讲授新课

1、微分的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)\text{，}$$

其中，A 是与 Δx 无关的量，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$。

注 1：由微分的定义，我们可以把导数看成微分的商。例如求 $\sin x$ 对 $\sqrt{x}$ 的导数时就可以看成 $\sin x$ 微分与 $\sqrt{x}$ 微分的商，即

$$\frac{d\sin x}{d\sqrt{x}}=\frac{\cos x dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}=2\sqrt{x}\cos x\text{。}$$

注 2：函数在一点处的微分是函数增量的近似值，它与函数增量仅相差 Δx 的高阶无穷小。因此要会应用下面两个公式：

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x\text{，}$$

$$f'(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\text{。}$$

典型例题：

例题 1.（教材 36 页例 2.19）

讲解：略

点评：通过例题加深学生对于微分定义的理解，帮助学生更好的应用微分的定义。

2、基本初等函数的微分公式

强调：基本初等函数的微分公式需要学生们熟记，这是求函数微分的关键。

探索：给出一些函数，让学生利用微分公式求函数的微分。

设计思路：由基本初等函数的导数公式可以直接得到基本初等函数的微分公式，要求学生对比导数公式记忆。

3、**微分的运算法则**

说明：因为微分和导数是密切相关的，所以它们有相似的运算法则。

微分的运算法则（课件展示）。

设计思路：讲解例题，让学生们利用微分的运算法则求函数的微分。

4、**复合函数的微分法则**

复习复合函数的导数运算法则，根据复合函数的导数的运算法则，给出复合函数的运算法则，如下：

设函数 $y=f(u)$， $u=\varphi(x)$ 都可微，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx。$$

由于 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，所以，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分也可以写成：

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u。$$

三、课堂演练

练习题：

1、求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处，当 $\Delta x=0.1$ 和 $\Delta x=0.01$ 时的增量和微分。

2、填下面的空。

（1）d（　）$=\cos 2xdx$；　　（2）d（　）$=3e^{2x}dx$。

点评：考察学生对于定义求导数的方法。

六、教学作业：

课本 P57 习题 2-3　1、4

第三章　导数的应用（4 学时）

学习目标：

1、了解拉格朗日中值定理及它的几何解释。

2、掌握函数单调性的判别法和函数极值的求法，会解简单关于函数最大值和最小值的应用问题。

3、掌握曲线凹凸性的判别法和拐点的求法。

4、掌握应用洛必达法则求极限的方法。

3.1 拉格朗日中值定理

一、教学目标：

1、理解拉格朗日中值定理；

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：拉格朗日中值定理不仅是数学上的一个重要定理，也体现了自然界中"中间状态"的普遍存在性，引导学生理解事物发展的连续性和过渡性。

案例：过物理学中的加速度与速度变化的关系，解释拉格朗日中值定理的实际应用，同时引导学生思考如何运用这一原理优化运动轨迹或提高机械效率。

四、教学重点与难点：

重点：拉格朗日中值定理

难点：拉格朗日中值定理。

五、教学内容设计：

（一）拉格朗日中值定理

定理 2.3 （拉格朗日中值定理）　若函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

（2）在开区间（a,b）上可导，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

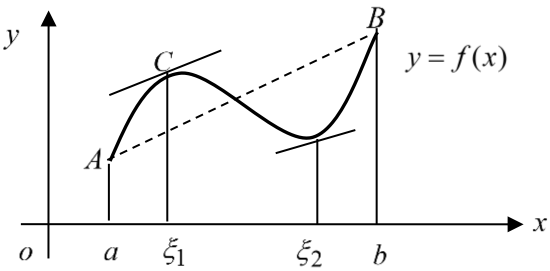


图 2-4

定理的几何意义：如果连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 AB 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那么，弧上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB。

说明：(1)此定理是微积分学的重要定理，它准确地表达了函数在一个闭区间上的平均变化率和函数在该区间内某点的导数间的关系，它是用函数的局部性来研究函数的整体性的重要工具。

(2)此定理是充分而不必要的。

通过例题加深同学们对于拉格朗日中值定理的理解，初步了解定义的运用。

由拉格朗日定理，可得如下两个推论：

推论 1　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是一个常数。

推论 2　如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点的导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都相等，则这两个函数在区间 (a,b) 内至多相差一个常数。

3.2 函数的单调性与极值

一、教学目标：

1、掌握函数单调性的判别法，会求函数的单调区间；

2、正确函数极值的概念，掌握函数极值的判定方法；

3、掌握函数最大值，最小值的的求解。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：函数的单调性反映了事物发展的方向性，而极性则揭示了事物发展的极限状态。引导学生理解事物发展的规律性和阶段性，培养辩证思维。

案例：结合经济学中的供需曲线，分析价格变动对市场需求和供给的影响，讨论如何通过政策调控实现经济平衡和稳定。

四、教学重点与难点：

重点：函数单调性的判别；函数极值的概念

难点：函数单调性的判别；极值、最值的求解

五、教学内容设计：

1、函数的单调性

定理 2.4 （判定法）设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加。

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

说明：判定法中的闭区间换成其他各种区间，包括无穷区间，结论也成立。

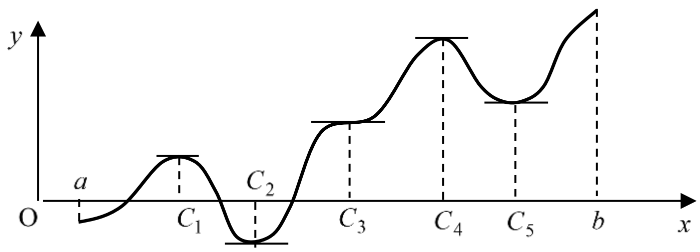
确定函数的单调性的一般步骤是：

（1）确定函数的定义域；

（2）求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，并以这些点为分界点把定义域分成若干个子区间；

（3）确定 $f'(x)$ 在各个子区间内的符号，从而判定出 $f(x)$ 的单调性。

2、函数极值的定义



提问：找出图中的最大值和最小值。 引出函数极值的概念。

课件展示：函数极值的定义。

注意：

（1）函数的极大值和极小值概念是局部的。

（2）函数的极大值未必比极小值大。如上图，$f(C_1)$ 就比 $f(C_5)$ 小。

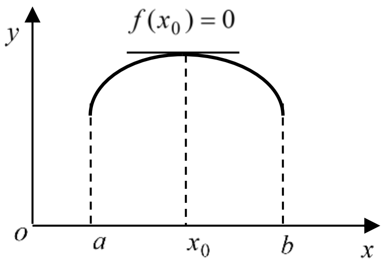
（3）函数的极值一定出现在区间内部，在区间端点处不能取得极值；而函数的最大值、最

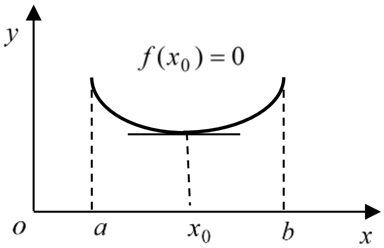
小值可能出现在区间内部，也可能在区间的端点处取得。

（4）从上图可看到，在函数取得极值点处，曲线上的切线是水平的；反之，曲线上有水平切线的地方函数不一定取得极值。

（5）极值点是函数增减或减增的分界点。

3、函数极值的判定和求法





观察以上图形，分析边讲解，当 x 渐增地经过 x_0 时，如果 $f'(x)$ 的符号由正变负，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；如果 $f'(x)$ 的符号由负变正，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

注意：如果当 x 渐增地经过 x_0 时，$f'(x)$ 的符号并未改变，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

课件展示：函数极值的判定和求法。

说明：使函数导数为 0 的点（即 $f'(x_0)$=0 的实根）叫函数 $f(x)$ 的驻点。可导函数的极值点必定是驻点。反过来，函数的驻点却不一定是极值点。

通过以上观察图形和分析图形，以及对函数极值的判定和求法的了解，得出可导函数求极值的步骤如下：（强调）

（1）求出函数的定义域；

（2）求出导数 $f'(x)$；

（3）求出 $f(x)$ 的全部驻点及导数不存在的点；

（4）求出各极值点的函数值，即得函数 $f(x)$ 的全部极值。

说明：熟练掌握函数极值的求解步骤。

典型例题：

例 1.（教材 47 页例 2.35）

讲解：略

点评：通过例题的讲解，辅助学生理解函数极值的求解步骤。

4、函数的最大值和最小值

课件展示：函数的最值，最大值及最小值的概念。

说明：由极值和最值的定义可知，极值是一个局部概念，而最值是一个整体概念。根据闭区间上连续函数一定存在最大值和最小值，由以上内容可知函数 $f(x)$ 最大值和最小值只可能在区间 $[a,b]$ 内的端点、或 (a,b) 内的极值点处取得，而只有驻点和不可导点有可能是极值点。

小结：求函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上最大值和最小值的步骤可归纳为：

在闭区间上

（1）求出函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的所有驻点及不可导点；

（2）求出各驻点不可导点及区间端点处的函数值；

（3）比较这些函数值的大小，其中最大者即为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的最大值；最小者即为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的最小值。

六、教学作业：

课本 P68 习题 3-2　2、3

3.4 洛必达法则

一、教学目标：

1 理解洛必达法则；掌握洛必达法则的运用条件；

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：洛必达法则作为求解极限的一种有效工具，体现了数学方法的灵活性和创新性。引导学生认识到在面对复杂问题时，需要灵活运用所学知识，勇于创新。

案例：通过生物学中种群增长模型的分析，讨论在资源有限条件下种群数量的变化趋势，引导学生思考如何通过数学模型预测和调控种群数量，实现生态平衡。

四、教学重点与难点：

重点：函数单调性的判别

难点：函数单调性的判别

五、教学内容设计：

洛必达法则

1. $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 2.5　设（1）当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 都趋于零；

（2）在点 x_0 的某邻域内（点 x_0 本身可以除外），$f'(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 都存在且 $\varphi'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在（或为无穷大），那么，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}。$$

说明:（1）如果 $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$，当 $x \to x_0$ 时仍属 $\frac{0}{0}$ 型时，且这时 $f'(x)$、$\varphi'(x)$ 能满足定理中 $f(x)$、$\varphi(x)$ 所要满足的条件，那么可继续再用罗必塔法则。

（2）定理中的 $x \to x_0$ 换为 $x \to \infty$（或其他趋势）时，结论也成立。

如果连续曲线 $y = f(x)$ 的弧 AB 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那么，弧上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB。

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.6 设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$；

（2） $f(x)$、$\varphi(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}。$$

把定理 2.6 中的 $x\to x_0$ 换为 $x\to\infty$（或其它情形）时，结论也成立。

3．其它类型的未定式

说明：其他一些 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0 型的未定式，我们也可通过适当变形化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则。

六、教学作业：

课本 P71 习题 3-3 1

第四章 不定积分（8 学时）

学习目标：

1、理解原函数与不定积分概念,知道不定积分与导数（微分）之间的关系;

2、知道不定积分的几何意义；

3、熟练掌握积分的基本公式、直接积分法、第一换元积分法（凑微分法）；

4、掌握第二换元积分法和分部积分法 。

4.1 不定积分的概念

一、教学目标：

1、正确理解原函数，不定积分的概念；

2、熟悉基本积分公式。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：不定积分作为求解累积量的逆过程，引导学生理解“积少成多”的道理，培养

耐心和毅力。

案例：通过物理学中的位移、速度和加速度的关系，解释不定积分在求解运动轨迹中的应用，引导学生体会数学在解决实际问题中的重要作用。

四、教学重点与难点：

重点：原函数，不定积分的概念；

难点：利用积分公式求函数的积分。

五、教学内容设计：

一、引入新课

通过实例（变速直线运动（课件展示））的分析和讲解，知其速度是路程函数 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数，即速度 $v(t)=s'(t)$。反过来，如果已知变速直线运动物体的速度函数 $v=v(t)$，如何求出物体的路程函数 $s=s(t)$，使得它的导数 $s'(t)$ 等于已知的速度函数 $v(t)$。这是我们这节课所要讲解的重点。

说明：从数学的观点来看，它的实质是：已知函数 $v=v(t)$，求一个函数 $s=s(t)$，使得 $s'(t)=v(t)$。这就是与求导数相反的问题。

通过对此例题的讲解，引出此节课要讲的不定积分的概念。

二、讲授新课

1、原函数的概念

定义 3.1 设函数 $y=f(x)$ 在某区间上有定义，若存在函数 $F(x)$，使得在该区间任一点处，均有

$$[F(x)]'=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数。

设计思路：通过几个例子加以说明，加强学生对于原函数概念的理解，为不定积分概念的学习做铺垫。

2、不定积分的概念

不定积分的概念（课件展示），强调不定积分的重要性。

说明：根据不定积分的定义可知，求函数 $f(x)$ 的不定积分，只需求出 $f(x)$ 的一个原函数再加上一个常数 C 即可。

值得注意的是，一个函数的不定积分既不是一个数，也不是一个函数，而是一个函数族。例如：$\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=at$，有 $\int at dt=\frac{1}{2}at^2+C$；$(\sin x)'=\cos x$，有 $\int\cos xdx=\sin x+C$；$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，有 $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$。

注意：求不定积分时，不要忘记在一个原函数后面再加任意常数 C，否则求的只是一个原函数，不是所有的原函数，即不定积分。通常把求不定积分的方法称为积分法。

提问：积分运算与微分运算有什么样的关系？

小结：

① $[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$或$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$，此式表明，先求积分再求导数（或求微分），两种运算的作用相互抵消。

② $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$或$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$，此式表明，先求导数（或求微分）再求积分两种

运算的作用相互抵消后还留有积分常数C。对这两个式子，要熟练运用。

2、基本积分公式

课件展示：基本积分公式。

说明：求不定积分就是求导数的逆运算。

结合例题加以分析讲解基本的积分公式，加深学生对于积分公式的记忆，常用的积分公式着重讲解。

强调：以上 13 个公式是积分法的基础，必须熟记，不仅要记住等式右端的结果，还要熟悉左端被积函数的形式。

三、课堂演练

练习题：

1、求下列各式的不定积分。

（1）$\int x^2dx$；（2）$\int \sin xdx$；（3）$\int e^x dx$；（4）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

2、已知曲线上任意一点切线的斜率为$2x$，且该曲线过$(1,5)$点，求曲线方程。

六、教学作业：

（1）课本 P52 习题 4-1　1

（2）背诵默写基本函数积分表

4.2 不定积分的性质

一、教学目标：

1、正确理解不定积分的性质，掌握性质求简单函数的不定积分。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：强调数学规律的普遍性和适用性，引导学生认识到数学知识的广泛应用价值。

案例：通过不同领域（如经济学、工程学）中不定积分的应用案例，展示数学在解决实际问题中的多样性和灵活性。

四、教学重点与难点：

重点：不定积分的性质；
难点：会利用性质求函数的不定积分。

五、教学内容设计：

1、不定积分的性质

1. 积分对于函数的可加性，即

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx,$$

可推广到有限个函数代数和的情况，即

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x。$$

设计思路：给出几个例题，让学生们练习不积分的可加性，加强学生对性质的理解。

2. 积分对于函数的齐次性，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x \qquad (k\neq 0)。$$

说明：利用不定积分的基本积分公式和性质，就可以求一些简单函数的不定积分。

2、典型例题

例 1 求下列各式的不定积分：

（1）$\int\sqrt[3]{x}dx$； （2）$\int 2^x dx$； （3）$\int 3^x e^x dx$。

讲解：略

例 2 求 $\int(3\cos x+\frac{1}{x}-2\sqrt{x})dx$。

讲解：略

例 3 求 $\int\frac{(2x-1)^2}{x}dx$。

讲解：略

例 4 求 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$。

例 5 求 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$。

例 6 求 $\int\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$。

例 7 求 $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$。

说明：不定积分性质运用，理解比较困难，这种加强例、习题的讲解和练习，帮助学生掌握不定积分的性质。

教学作业：

课本 P86 习题 4-2 1、2

4.3 换元积分法

一、教学目标：

1、熟练掌握第一、第二换元积分法；

2、会利用第一、第二换元积分法求简单函数的不定积分。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：换元积分法体现了数学中的转化思想，引导学生学会将复杂问题转化为简单问题来解决。

案例：通过求解复杂函数的不定积分，展示换元法的应用过程，引导学生体会转化思想在解题中的重要作用。

四、教学重点与难点：

重点：第一、第二换元积分法；

难点：会用第一】第二换元积分法求函数的不定积分。

五、教学内容设计：

1、第一换元法的概念

给出不定积分 $\int\cos 2xdx$，计算了它的原函数，

注意：$\cos 2x$ 为复合函数。

分析此不定积分：

通过观察在积分表中没有此公式，只有 $\int\cos xdx=\sin x+C$，若将公式改写为员 $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)$。令 $u=2x$，

则上式变为

$$\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\int\cos udu=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C\text{。}$$

这种先凑微分形式，再作代换的积分方法，叫做**第一换元积分法**。

说明：第一换元积分法，又称凑微分法。

设计思路：讲练结合，给出例题，让学生们利用第一换元积分法求函数的不定积分，加强对上方法的理解和运用。

2、利用第一换元法求函数不定积分的步骤。

提问：通过以上对第一换元法例题的讲解，同学们总结一下第一换元法求函数的不定积分的步骤是什么？

小结：

（1）先凑微分，即$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \underline{\underline{\text{凑微分}}} \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]$；

（2）变量代换后积分，令$u=\varphi(x)$，$\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$，

$$\underline{\underline{\text{令}\,u=\varphi(x)}} \int f(u)du = F(u)+C;$$

（3）最后回代，$\int f(u)du = F(u)+C \underline{\underline{\text{回代}}} F[\varphi(x)]+C$。

其中，第一步凑微分是关键，因而第一换元法又常称为凑微分法。

设计思路：给出例题，根据所讲的求积分的步骤，求函数的不定积分，加强对此步骤的应用。

3、第二换元法的概念

从以上例题的解法，可以看出，这种先换元，再积分，称为第二换元积分法。

4、第二换元积分法的步骤

第二换元积分法的步骤如下：

（1）先换元，令$x=\varphi(t)$，即

$$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\varphi(t)\text{换元}}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

（2）再积分，即$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \underline{\underline{\text{积分}}} F(t)+C$；

（3）最后回代，$t=\varphi^{-1}(x)$，即

$$F(t)+C \underline{\underline{t=\varphi^{-1}(x)}} \text{回代}\ F[\varphi^{-1}(x)]+C。$$

强调：运用第二换元积分法的关键是选择合适的变换函数$x=\varphi(t)$。对于$x=\varphi(t)$，要求单调可微，且$\varphi'(t)\neq 0$，其中$t=\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数。

说明：（1）第一换元法先凑微分再换元；第二换元法是先换元再积分。

（2）第二换元法常用的代换有幂代换和三角代换，当被积函数含有$\sqrt[n]{ax+b}$时，可作幂代换令$t=\sqrt[n]{ax+b}$；当被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$等表达式时，可作三角代换，分别令$x=a\sin t$，$x=a\tan t$，$x=a\sec t$。

三、课堂练习

例 1 求下列函数的不定积分。

（1）$\int \frac{1}{3x+1}dx$；（2）$\int e^{2x-1}dx$；（3）$\int 2xe^{x^2}dx$；

（4）$\int x\sqrt{1-x^2}dx$；（5）$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$；（6）$\int \frac{dx}{x\ln x}$；（7）$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$；

（8）$\int \tan x dx$；（9）$\int \cos^2 x dx$；（10）$\int \sin^3 x dx$。

例 2 求下列函数的不定积分。

（1）$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$；（2）$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$；（3）$\int \sqrt{a^2-x^2} dx (a>0)$。

4.4 分部积分法

一、教学目标：

1、熟练掌握分部积分法；

2、会利用分部积分法求函数的不定积分。**教学方法、手段：**

二、教学方法：讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：分部积分法作为另一种求解不定积分的方法，体现了数学中的分解与整合思想，引导学生学会从整体和局部两个角度分析问题。

案例：通过求解乘积函数的不定积分，展示分部积分法的应用过程，引导学生理解分解与整合在解题中的意义和价值。

四、教学重点与难点：

重点：分部积分法；

难点：会用分部积分法求函数的不定积分。

五、教学内容设计：

通过对第一换元积分法和第二换元积分法的理解，这节课学习一种新的积分方法。

1、分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都是连续可微函数，根据乘积微分公式，得 $d(uv)=udv+vdu$，移项得 $udv=d(uv)-vdu$，两边积分得

$$\int udv = uv - \int vdu$$

上式，称为分部积分公式。

说明：（1）分部积分法是与乘积微分法则相对应的，也是一种基本积分法；

（2）如果计算 $\int udv$ 比较困难，而 $\int vdu$ 容易计算时，可利用分部积分公式，把求 $\int udv$ 的问题转化为求 $\int vdu$。

（3）利用分部积分法求不定积分，有时需要多次使用分部积分公式才能得出结果。

典型例题：

求 $\int x^2 e^x dx$，$\int e^x \sin x dx$？

讲解：略

说明：分部积分的方法是不定积分常用的方法，通过例题讲解加深学生对于分部积分方法的

理解，要求学生熟练运用分部积分方法。

2、利用分部积分公式，u 和 dv 选取的规律

强调：利用分部积分法求不定积分时，有时多次使用分部积分公式，所求积分再次出现，于是得到一个关于所求不定积分的方程，解此方程便可得所求不定积分。

在使用分部积分公式时，u 和 dv 的选取具有一定的规律性。

现归纳如下：

（1）$\int x^n e^x dx$，$\int x^n \sin\beta x dx$，$\int x^n \cos\beta x dx$，可设 $u = x^n$；

（2）$\int x^n \arcsin x dx$，$\int x^n \arctan x dx$，$\int x^n \ln x dx$，可设 $u = \arcsin x$，$\arctan x$，$\ln x$；

（3）$\int e^{\alpha x} \sin\beta x dx$，$\int e^{\alpha x} \cos\beta x dx$，设哪个函数为 u 都可以。

注意：此积分方法需要学生人熟练掌握，这是求不定积分的一种重要的方法。

三、典型例题

例 1 求下列函数的不定积分。

（1）$\int x\cos x dx$；（2）$\int x^2 e^x dx$；（3）$\int x^3 \ln x dx$；

（4）$\int e^x \sin x dx$；（5）$\int \ln x dx$。

六、教学作业：

课本 P89 复习题 4　一、二、三、四

第五章　定积分及其应用（2 学时）

学习目标：

1、了解定积分的定义，定积分的几何意义以及定积分的性质 ；

2、熟练掌握与应用微积分的基本公式 ；

3、熟练掌握定积分的换元积分法和分部积分法 ；

4、知道变上限积分函数的概念，会计算变上限积分函数的导数，知道广义积分的收敛与发散 ；

5、理解微元法的解题思路，并能应用此法来计算数学上的及物理上的计算

5.1 定积分的概念及性质

一、教学目标：

1、正确理解定积分的概念；

2、会利用积分的概念求函数的定积分。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：定积分作为求解累积量的精确方法，引导学生理解“量变到质变”的过程，培养全局观念和长远眼光。

案例：通过物理学中的功、能等概念的解释，展示定积分在求解物理量中的应用，引导学生体会数学与物理的紧密联系。

四、教学重点与难点：

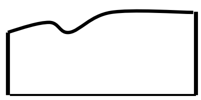
重点：定积分；

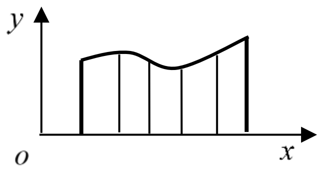
难点：会用定积分的概念求函数的定积分。

五、教学内容设计：

一、引入新课

给出一个实例曲边梯形的图形，求曲边梯形的面积。





上述问题的讲解和分析，求曲边梯形面积，

总结：可按以下四个步骤进行：

（1）分割：。

（2）取近似：

（3）求和：

（4）取极限：

由此可见，求曲边梯形的面积可以归结为求和式的极限。

设计思路：通过例题的分析和讲解，吸引学生们的学习兴趣，引出定积分的概念。

二、讲授新课

1、定积分的概念

课件展示：定积分的概念。

注意：

（1）所谓和式极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，是指其极限值与 $[a,b]$ 的分割和点 ξ_i 的取法均无关。

（2）定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du\ 。$$

（3）和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和。

（4）如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在，就说 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积。

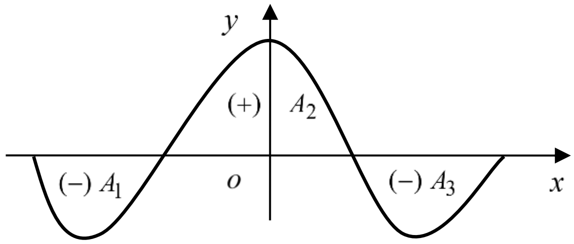
（5）闭区间上的连续函数或只有有限个第一类间断点的函数是可积的。

（6）定积分定义中要求积分限 $a<b$，为此，补充如下规定：

①当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

②当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

2、定积分的几何意义



从以上所讲的概念和上面的图形中，可知：在区间$[a,b]$上，当 $f(x)\ge 0$ 时，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积，即

$$\int_a^b f(x)dx=A,$$

在区间$[a,b]$上，若 $f(x)<0$ 时，则 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形（在 x 轴下方）面积的相反数，即

$$\int_a^b f(x)dx=-A。$$

在区间$[a,b]$上，若 $f(x)$ 有正有负，则 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方部分和 x 轴的下方部分"带号面积"（规定：位于 x 轴下方的图形的带号面积为负，其绝对值等于该图形的面积；位于 x 轴上方的图形的带号面积为正，其数值等于该图形的面积）的代数和。如上图，有

$$\int_a^b f(x)dx=A_2-A_1-A_3。$$

3、定积分的性质

根据以上对定积分概念及定积分几何意义的讲解，总结得出定积分的如下性质。

课件展示：定积分的性质。

注意：不论 $a<b$，还是 $a>b$，积分中值公式都成立。

设计思路：讲练结合，通过例题的讲解，习题的练习，让学生们利用定积分的性质求函数的定积分，加强学生们对定积分及定积分的性质的理解。

三、课堂练习

练习题：

1、　用定积分的定义计算 $\int_0^1 x^2dx$。

2、　估计定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4 dx$ 的值。

六、教学作业：

课本 P97 习题 5-1　2

5.2 定积分的基本公式（牛顿-莱布尼兹公式）

一、教学目标：

1、会求变上限积分的导数；

2、正确理解牛顿—莱布尼兹公式。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：强调数学公式的准确性和简洁性，引导学生认识到数学语言的精确性和美感。

案例：通过几何图形的面积、体积等计算，展示定积分基本公式的应用，引导学生理解数学公式背后的几何意义和物理意义。

四、教学重点与难点：

重点：牛顿莱布尼兹公式；

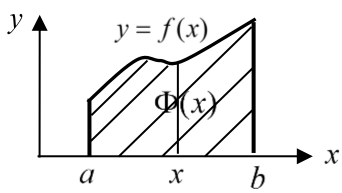
难点：会求变上限积分的导数。

五、教学内容设计：

1、变上下限的定积分

课件展示：变上下限的定积分的概念。

给出一个曲边梯形的图形，分析该图形，通过对图形的进一步讲解，加深学生们对变上下限的定积分概念的理解和运用。



说明：在几何上，当 $f(x) \geq 0$ 时，变上限的定积分 $\Phi(x)$ 表示右侧邻边可以变化的曲边梯形的面积，这时 $\Phi(x)$ 又称为面积函数。

2、微积分基本公式

课件展示：牛顿-莱布尼兹公式。

板书；给出例题，让学生们利用牛顿-莱布尼兹公式求函数的定积分。

根据学生们做题的情况，总结出以下注意事项。

注意：（1）当被积函数含有绝对值或分段函数时，应利用定积分的可加性分别计算各小区间上的定积分。

（2）在利用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分时，一定要满足公式所要求的条件，否则就会出现错误的结果。例如：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$，产生错误的原因在于$\frac{1}{x^2}$在$[-1,1]$上是无界的，即不满足公式的条件，故不能使用牛顿-莱布尼兹公式。

点评：牛顿-莱布尼兹公式是计算定积分常用的方法之一，需要学生熟练掌握，通过例题的讲解，加强学生对于公式的运用。

三、课堂演练

练习题：

例 1　已知$F(x)=\int_a^x \sin t dt$，求$F'(x)$。

例 2　已知$\Phi(x)=\int_0^x \cos t^2 dt$，求$\Phi(x)$在$x=1$处的导数。

例 3　已知$\Phi(x)=\int_a^{x^2} e^{-t^2} dt$，求$\Phi(x)$的导数。

六、教学作业：

课本 P99　习题 5-2　3

5. 3 定积分的换元积分法和分部积分法

一、教学目标：

1、了解定积分的换元积分法和分部积分法；

2、掌握换元积分法和分部积分法求函数的定积分。

二、教学方法、手段：

讲授法，板书，课件展示

三、素质（思政）内容与要求：

思政融入点：这两种方法的应用进一步体现了数学中的转化思想和分解与整合思想，引导学生学会灵活运用数学方法解决实际问题。

案例：通过求解复杂函数的定积分，展示换元积分法和分部积分法的应用过程，引导学生体会数学方法的灵活性和多样性。

四、教学重点与难点：

重点：定积分的换元积分法和分部积分法；

难点：会运用换元积分法和分部积分法求函数的定积分。

五、教学内容设计：

1、定积分的换元法

课件展示：定积分的换元法。

注意：在使用定积分换元公式时，用 $x=\varphi(t)$ 进行代换的同时，积分上下限应同时换成新变量 t 的积分上下限。

设计思路：通过例题的讲解，让学生们练习，加强理解求定积分的换元法。

2、定积分的分部积分法

老师带领学生们复习前面所学习的不定积分的分部积分法，通过以前所学习的不定积分的分部积分法，推导出定积分的分部积分法。

课件展示：定积分的分部积分法。

设计思路：给出例题，学生们相互讨论，并回答老师的提问，以便能熟练掌握定积分的分部积分法。

三、例题

例 1 利用换元法求下列函数的定积分。

（1）$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$；（2）$\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$；

（3）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx$；（4）$\int_{1}^{4}\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$。

例 2 利用分部积分法下列函数的定积分。

（1）$\int_{0}^{1}xe^{x}dx$；（2）$\int_{0}^{\sqrt{3}}\arctan x dx$；（3）$\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$。

六、教学作业：

课本 P102 习题 5-3　1、2