



# 信息工程系

# 教

# 案

课程名称： \_\_\_\_\_ 工科数学 \_\_\_\_\_

教 师： \_\_\_\_\_ 陈旭东 \_\_\_\_\_

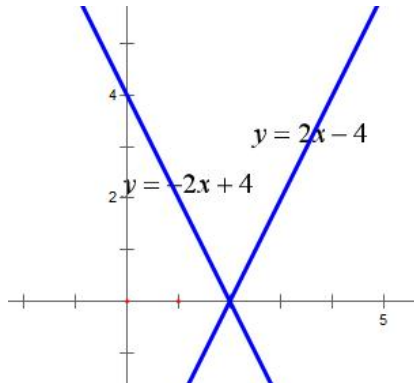
总 学 时： \_\_\_\_\_ 54 \_\_\_\_\_

理论学时： \_\_\_\_\_

实训学时： \_\_\_\_\_

上课班级： \_\_\_\_\_ 电子信息工程 251、订单班 251、自主 251 \_\_\_\_\_

授课学期： \_\_\_\_\_ 2025—2026 第 2 学期 \_\_\_\_\_

授课时间	第 1 周	课 次	第 1 次
章 节 名 称	<p style="text-align: center;">第一章、初等函数</p> <p style="text-align: center;">1.1、一次函数和反比例函数</p>		
授 课 方 式	理论课 ( <input checked="" type="checkbox"/> )、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	1
教 学 的 目 的 要 求	理解一次函数和反比例函数。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	画图。 反比例函数： $S=xy$ 不变。		
教学步骤及内容： <p style="text-align: center;">第一章、初等函数</p> <p style="text-align: center;">1.1、一次函数和反比例函数</p> <p>教学目的：理解一次函数和反比例函数。</p> <p>教学重点：画图。</p> <p>教学难点：反比例函数：<math>S=xy</math> 不变。</p> <p>1、<math>k&gt;0</math> 时 <math>y</math> 随着 <math>x</math> 的增加而增加，  <math>k&lt;0</math> 时 <math>y</math> 随着 <math>x</math> 的增加而减少。</p> <p>2、画 <math>y=2x-4</math> 和 <math>y=-2x+4</math> 的图像。</p> <p>3、<math>y=kx+b</math> 过点(1, 3)和(3, 7)，求该一次函数。</p> <p>解： <math>\begin{cases} 3=k+b \\ 7=3k+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow y=2x+1</math></p> <div style="text-align: right;">  </div>			

4、画图。

(1)、 $y=2x$

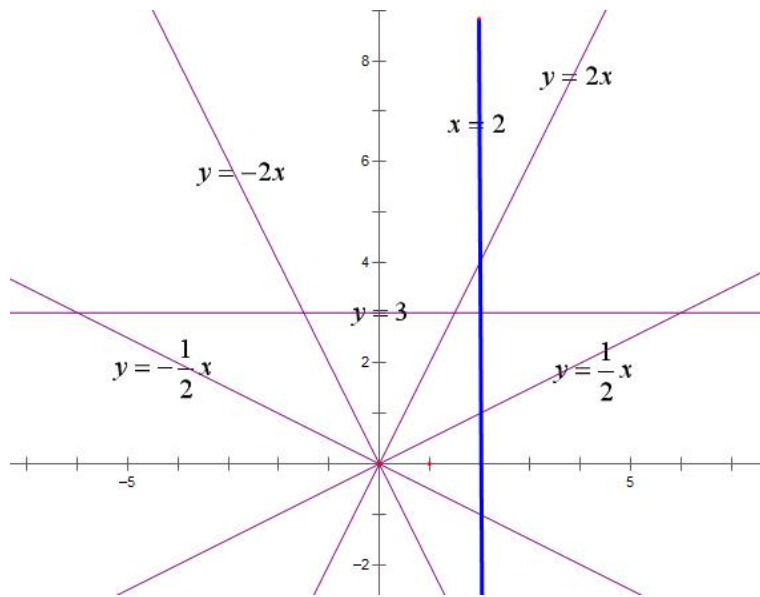
(2)、 $y=\frac{1}{2}x$

(3)、 $y=-2x$

(4)、 $y=-\frac{1}{2}x$

(5)、 $x=2$

(6)、 $y=3$

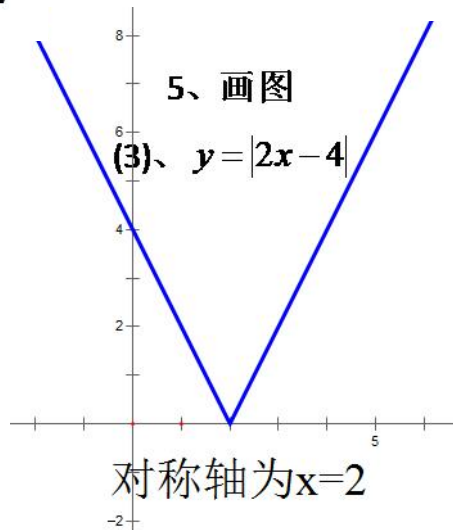
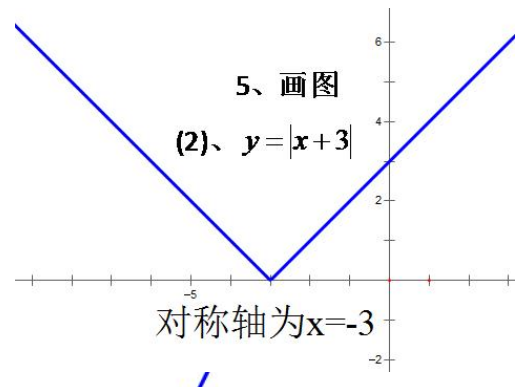
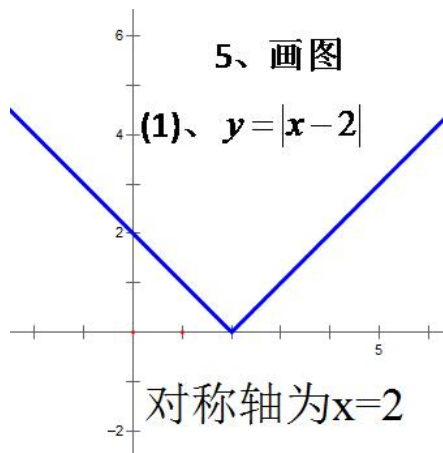


5、画图

(1)、 $y=|x-2|$

(2)、 $y=|x+3|$

(3)、 $y=|2x-4|$



## 二、反比例函数： $y = \frac{k}{x}$

1、 $k > 0$  时  $y$  随着  $x$  的增加而减少，

$k < 0$  时  $y$  随着  $x$  的增加而增加。

2、注意图像关于原点对称。

3、已知函数， $y = y_1 + y_2$ ，其中  $y_1$  与  $x$  成正比例， $y_2$  与  $x - 2$  成反比例，且当  $x = 1$  时， $y = -1$ ；当  $x = 3$  时， $y = 5$ ，求此函数的解析式。

解：  $y_1$  与  $x$  成正比例，设比例系数为  $k_1$ ，则有  $y_1 = k_1 x$ ； $y_2$  与  $x - 2$  成反比例，设比例系数为  $k_2$ ，则有  $y_2 = \frac{k_2}{x - 2}$ ，

故  $y = y_1 + y_2 = k_1 x + \frac{k_2}{x - 2}$ ，

当  $x = 1$  时， $y = -1$ ；当  $x = 3$  时， $y = 5$ ，则 
$$\begin{cases} -1 = k_1 \times 1 + \frac{k_2}{1 - 2} \\ 5 = k_1 \times 3 + \frac{k_2}{3 - 2} \end{cases}$$

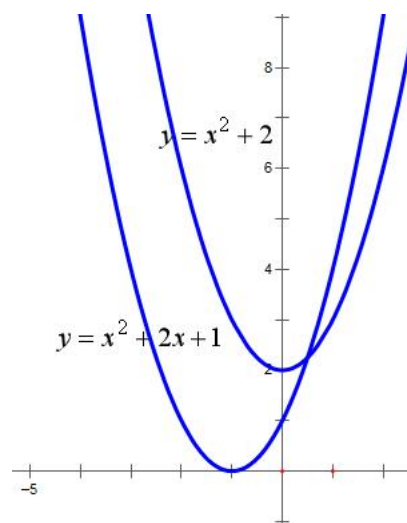
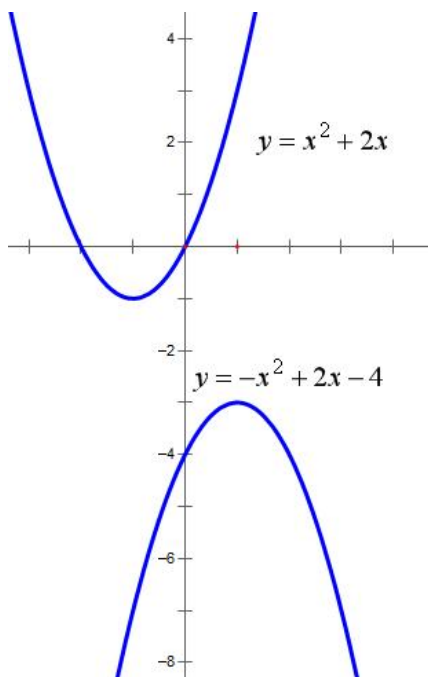
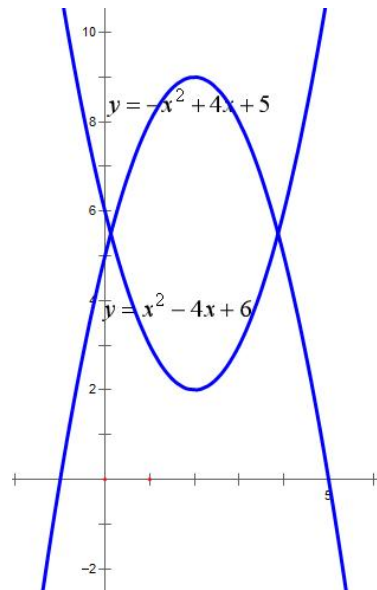
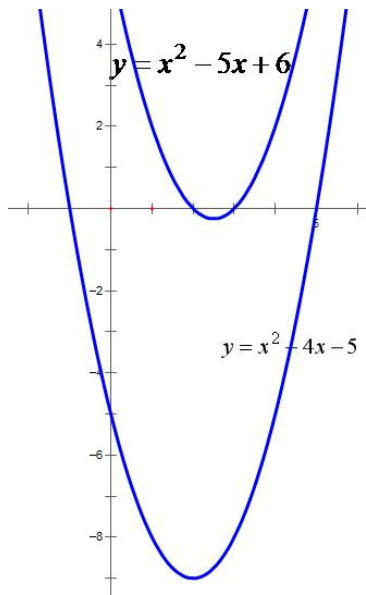
解得  $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}$ ，所以  $y = x + \frac{2}{x - 2}$ 。

复习思考题、作业题：  $y = kx + b$  过点(2, 4)和(3, 8)，求该一次函数。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 2 周	课 次	第 2 次
章 节 名 称	1.2、二次函数的基本性质		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	1
教 学 目 的 要 求	理解二次函数的概念。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：画图。 难点：求解二次不等式。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;"><b>1.2、二次函数的基本性质</b></p> <p style="text-align: center;">二次函数：<math>y=ax^2+bx+c, (a\neq 0)</math></p> <p>教学目的：理解二次函数的概念。</p> <p>教学重点：画图。</p> <p>教学难点：求解二次不等式。</p> <p>1、二次函数一定要讨论对称轴：<math>x=-\frac{b}{2a}</math>。</p> <p>2、跟 <math>x</math> 轴的交点就是方程 <math>ax^2+bx+c=0</math> 的解。</p> <p>3、韦达定理 <math>\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}</math></p> <p>4、画图，求出 <math>y</math> 的取值范围。</p> <p>(1)、<math>y=x^2-4x-5</math>                      (2)、<math>y=x^2-5x+6</math></p> <p>(3)、<math>y=x^2-4x+6</math>                      (4)、<math>y=-x^2+4x+5</math></p> <p>(5)、<math>y=-x^2+2x-4</math>                      (6)、<math>y=x^2+2x</math></p> <p>(7)、<math>y=x^2+2</math>                              (8)、<math>y=x^2+2x+1</math></p>			



### 5、解不等式

(1)、 $x^2 - 4x - 5 > 0$

(2)、 $x^2 - 5x + 6 < 0$

(3)、 $x^2 - 4x + 6 > 0$

(4)、 $x^2 - 4x + 6 < 0$

(5)、 $-x^2 + 4x + 5 > 0$

(6)、 $-x^2 + 4x + 5 < 0$

(7)、 $-x^2 + 2x - 4 > 0$

(8)、 $-x^2 + 2x - 4 < 0$

解：(1)、先解  $x^2-4x-5=0$  可得  $x_1=-1$  或  $x_2=5$ ，故  $x^2-4x-5>0$  的解为  $x>5$  或  $x<-1$ ；

(2)、先解  $x^2-5x+6=0$  可得  $x_1=2$  或  $x_2=3$ ，故  $x^2-5x+6<0$  的解为  $2<x<3$ ；

(3)、 $x^2-4x+6=0$  的判别式  $\Delta=16-24<0$ ，方程无解，开口向上，故任何  $x$  都使  $x^2-4x+6>0$ ，故解集为全体实数  $R$ ；

(4)、 $x^2-4x+6=0$  的判别式  $\Delta=16-24<0$ ，方程无解，开口向上，故任何  $x$  都使得  $x^2-4x+6>0$ ，没有  $x$  使得  $x^2-4x+6<0$ ，故解集为空集；

(5)、 $-x^2+4x+5>0 \Rightarrow x^2-4x-5<0$ ，

先解  $x^2-4x-5=0$  可得  $x_1=-1$  或  $x_2=5$ ，故  $x^2-4x-5<0$  的解为  $-1<x<5$ ；

(6)、 $-x^2+4x+5<0 \Rightarrow x^2-4x-5>0$ ，先解  $x^2-4x-5=0$  可得  $x_1=-1$  或  $x_2=5$ ，故  $x^2-4x-5>0$  的解为  $x>5$  或  $x<-1$ ；

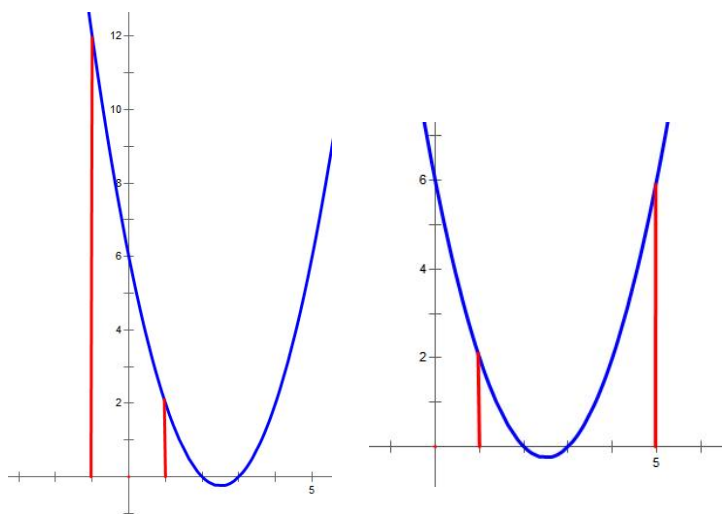
(7)、 $-x^2+2x-4>0 \Rightarrow x^2-2x+4<0$ ，判别式  $\Delta<0$ ，方程无解，开口向上，故任何  $x$  都使得  $x^2-2x+4>0$ ，没有  $x$  使得  $x^2-2x+4<0$ ，故解集为空集；

(8)、 $-x^2+2x-4<0 \Rightarrow x^2-2x+4>0$ ，判别式  $\Delta<0$ ，方程无解，开口向上，故任何  $x$  都使得  $x^2-2x+4>0$ ，故解集为全体实数  $R$ 。

6、求下列函数的  $y$  的取值范围

(1)、 $y=x^2-5x+6$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

(2)、 $y=x^2-5x+6$  ( $-1 \leq x \leq 3$ )

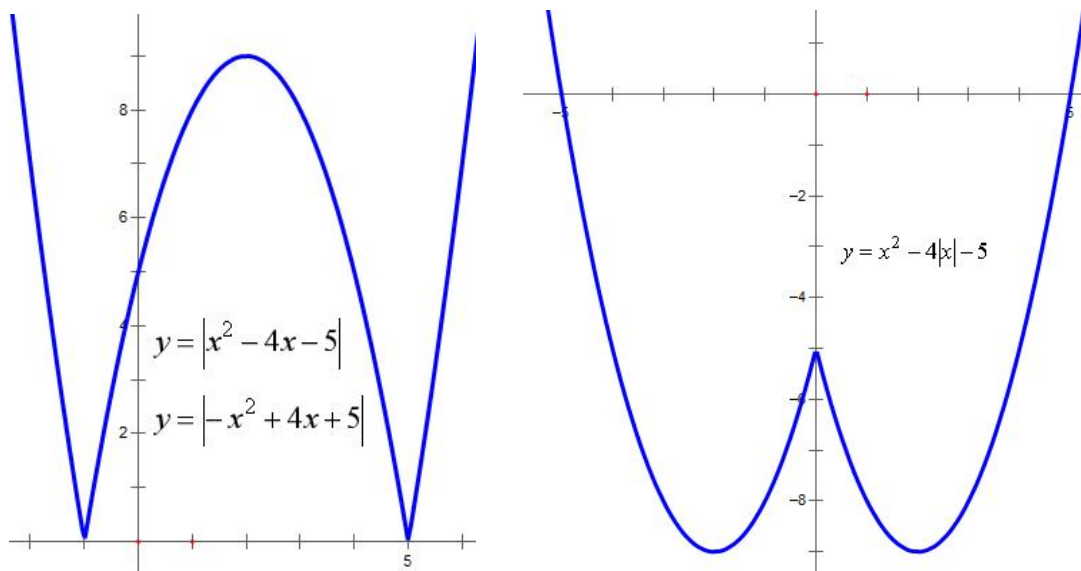


### 7、画图

(1)、 $y = |x^2 - 4x - 5|$

(2)、 $y = |-x^2 + 4x + 5|$

(3)、 $y = x^2 - 4|x| - 5$



8、求  $y = x^2 + 2ax + a^2 + 1$  在  $-1 \leq x \leq 1$  的最小值。

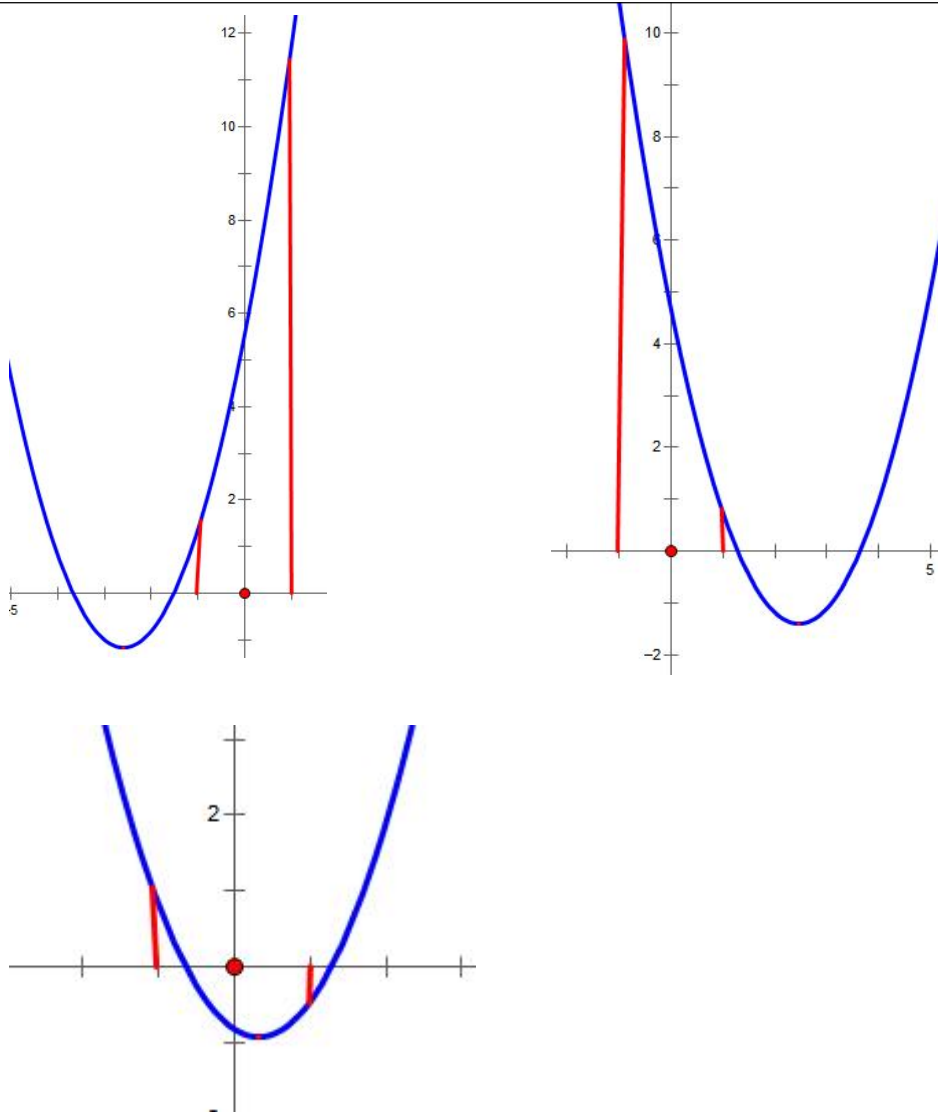
解：对称轴为  $x = -a$ ,

(1)、若  $-a \geq 1$  即  $a \leq -1$ , 则在  $x = 1$  取得最小值:  $1^2 + 2a \cdot 1 + a^2 + 1 = a^2 + 2a + 2$ ;

(2)、若  $-a \leq -1$  即  $a \geq 1$ , 则在  $x = -1$  处取得最小值:  $(-1)^2 + 2a(-1) + a^2 + 1 = a^2 - 2a + 2$ ;

(3)、若  $-1 < -a < 1$  即  $1 > a > -1$ , 则在  $x = -a$  处取得最小值:

$$(-a)^2 + 2a(-a) + a^2 + 1 = 1。$$



### 9、公式

(1)、 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 。

(2)、 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

(3)、 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 。

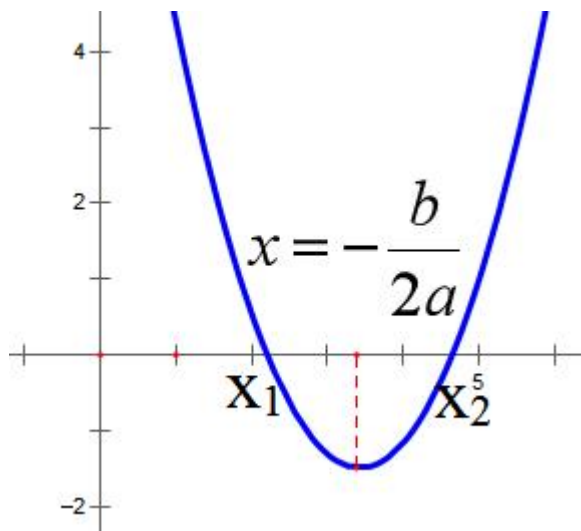
(4)、 $(a + \frac{1}{a})^2 - 2 = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ 。

(5)、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

10、二次函数:  $y=ax^2+bx+c$ , ( $a\neq 0$ )

图象是一条抛物线, 关于  $x=-\frac{b}{2a}$  对称, 顶点是  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 。

(怎么来的?)



复习思考题、作业题: 解不等式:  $x^2-2x-8<0$ 。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 2-3 周	课 次	第 3-4 次
章 节 名 称	1.3、讨论二次函数		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	对二次函数分情况讨论。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：求解不等式。 难点：讨论对称轴的取值范围。		
<p>教学步骤及内容：</p> <h3 style="text-align: center;">1.3、讨论二次函数</h3> <p>1、不等式<math>(2+x)(1-x)&gt;0</math>的解为( )。</p> <p>A. <math>\{x x&lt;2 \text{ 或 } x&gt;1\}</math>                      B. <math>\{x x&lt;-1 \text{ 或 } x&gt;2\}</math>  C. <math>\{x -2&lt;x&lt;1\}</math>                              D. <math>\{x -1&lt;x&lt;2\}</math></p> <p>解：<math>(2+x)(1-x)&gt;0 \Rightarrow (x+2)(x-1)&lt;0</math>，故<math>-2&lt;x&lt;1</math>。</p> <p><math>ab=c \Rightarrow (-a)b=-c</math> 或 <math>a(-b)=-c</math>  <math>a+b=c \Rightarrow -a-b=-c</math></p> <p>2、不等式<math>\frac{x+1}{x-2} \leq 2</math>的解集为_____。</p> <p>解：<math>\frac{x+1}{x-2} \leq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2} \leq 0</math>  <math>\Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2} \leq 0 \Rightarrow (-x+5)(x-2) \leq 0</math>  <math>\Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (-x+5)(x-2) \leq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}</math>  <math>\Rightarrow \begin{cases} (x-5)(x-2) \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x &lt; 2 \text{ 或 } x \geq 5</math>。</p>			

$$\text{或解 } \frac{x+1}{x-2} \leq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -x+5 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -x+5 \leq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x < 2 \text{ 或 } x \geq 5.$$

3、已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax - b < 0$  的解集是  $\{x | -1 < x < 3\}$ ,

则  $a+b$  的值是( )。

- A. -5      B. -3      C. 5      D. 6

解：因为不等式  $x^2 - ax - b < 0$  的解集是  $\{x | -1 < x < 3\}$ ,

所以  $-1, 3$  是方程  $x^2 - ax - b = 0$  的两实数根,

$$\text{由根与系数的关系得, } \begin{cases} -1+3 = a \\ -1 \times 3 = -b \end{cases},$$

所以  $a=2, b=3$ , 则  $a+b=5$ , 故选 C。

或解：  $(x+1)(x-3) < 0$  的解集就是  $\{x | -1 < x < 3\}$ ,

即  $(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$  和  $x^2 - ax - b < 0$  同解,

比较系数可得  $a=2, b=3$ 。

4、不等式  $-x^2 + 5x - 6 > 0$  的解集是( )。

- A.  $\{x | -2 < x < 3\}$       B.  $\{x | -3 < x < 2\}$   
 C.  $\{x | 2 < x < 3\}$       D.  $\{x | -3 < x < -2\}$

解：  $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

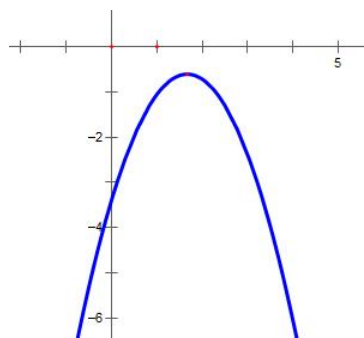
$\Rightarrow (x-2)(x-3) < 0 \Rightarrow 2 < x < 3$ 。

5、若不等式  $ax^2 + 2x - 3 < 0$  的解集为  $R$ ,

则实数  $a$  的取值范为( )。

- A.  $-\frac{1}{3} < a \leq 0$       B.  $a < -\frac{1}{3}$   
 C.  $a > -\frac{1}{3}$       D.  $a < -\frac{1}{3}$  或  $a = 0$

$$\text{解: } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4 + 12a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{1}{3}.$$



6、已知不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-2<0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围是。

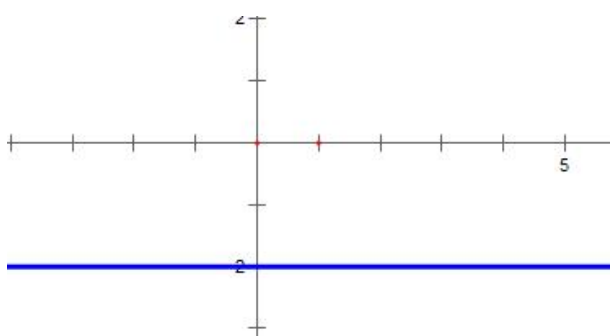
解：设 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x-2$ ，

①、当 $a=2$ 时， $y=-2<0$ ，符合题意；

②、当 $a\neq 2$ 时，只需 $\begin{cases} a-2 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ 4(a-2)^2+8(a-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ 4(a-2)+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a < 2 \\ a-2+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 2。$$

故 $0 < a \leq 2$ 。



7、若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$ ，求则不等式 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 的解集。

解： $(x+1)(x-2)<0$ 的解集就是 $\{x|-1<x<2\}$ ，

即 $(x+1)(x-2)<0 \Rightarrow x^2-x-2<0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

即 $-x^2+x+2>0$ 和 $ax^2+bx+c>0$ 同解，

比较系数可得 $a=-1$ ， $b=1$ ， $c=2$ ，

故 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 可化为 $x^2-3x<0$ ，解得 $0<x<3$ 。

8、解不等式： $m^2x^2+2mx-3<0$ 。

解：若 $m=0$ ， $-3<0$ 永远成立，故解为全体实数，

若 $m\neq 0$ ，先解 $(mx-1)(mx+3)=0$ 可得 $x_1=\frac{1}{m}$ ， $x_2=-\frac{3}{m}$

(1)、若 $m>0$ ，则 $\frac{1}{m}>-\frac{3}{m}$ ，故不等式的解为： $-\frac{3}{m}<x<\frac{1}{m}$ ；

(2)、若 $m<0$ ，则 $\frac{1}{m}<-\frac{3}{m}$ ，故不等式的解为： $\frac{1}{m}<x<-\frac{3}{m}$ 。

9、已知  $ax^2+bx+2>0$  的解为  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ ，则不等式  $2x^2+bx+a<0$  的解集为

—。

解：  $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})<0$  的解就是  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ ，

即  $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})<0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}<0 \Rightarrow -12x^2-2x+2>0$  和  $ax^2+bx+2>0$  同解，

比较系数可得  $a=-12$ ，  $b=-2$ ，

故  $2x^2+bx+a<0$  可化为  $2x^2-2x-12<0 \Rightarrow x^2-x-6<0 \Rightarrow (x+2)(x-3)<0 \Rightarrow -2<x<3$ 。

10、解关于  $x$  的不等式  $ax^2+2x+a>0$  ( $a \geq 0$ )。

解：(1)、若  $a=0$ ，  $2x>0 \Rightarrow x>0$ ，故解为全体正实数；

(2)、若  $a>0$ ，  $\Delta=4-4a^2$ ，

当  $\Delta<0$ ，即  $a>1$  时，  $x \in R$ ，

当  $\Delta=0$ ，即  $a=1$  时，  $x \neq -1$ ，

当  $\Delta>0$ ，即  $0<a<1$  时，方程  $ax^2+2x+a=0$  的两根为

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}, \text{ 且 } x_1 < x_2,$$

所以  $x < \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$  或  $x > \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ 。

11、解关于  $x$  的不等式  $ax^2+(1-2a)x-2>0$ 。

解：若  $a=0$ ，  $x-2>0 \Rightarrow x>2$ ，

若  $a \neq 0$ ，先解  $ax^2+(1-2a)x-2=0$  可得  $x_1=-\frac{1}{a}$ ，  $x_2=2$ ，

(1)、若  $a>0$ ，则  $-\frac{1}{a}<2$ ，故不等式的解为： $x>2$  或  $x<-\frac{1}{a}$ ；

(2)、若  $a<0$ ，先解  $-\frac{1}{a}>2 \Rightarrow -1<2a \Rightarrow -\frac{1}{2}<a$ ，故

①、若  $-\frac{1}{2}<a<0$ ，则解为  $-\frac{1}{2}>x>2$ ；

②、若  $-\frac{1}{2}=a$ ，则无解；

③、若  $a<-\frac{1}{2}$ ，则解  $2>x>-\frac{1}{a}$ 。

12、对  $x^2-5x+6$  和  $x^2+x-1$  因式分解。

解：  $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ；

$$x^2+x-1=\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)。$$

复习思考题、作业题：对  $x^2-5x-6$  和  $x^2+x-3$  因式分解。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 4 周	课 次	第 5 次
章 节 名 称	1.4、指数运算		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	1
教 学 目 的 要 求	掌握指数的运算。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：指数的提取。 难点：指数的乘方。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">1.4、指数运算</p> <p>教学目的：掌握指数的运算</p> <p>教学重点：指数的提取。</p> <p>教学难点：指数的乘方。</p> <p>指数的性质：若 <math>a、b、c</math> 都大于 0，则：</p> <p>①、<math>a^b a^c = a^{b+c}</math>                      ②、<math>\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}</math></p> <p>③、<math>(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b</math>              ④、<math>\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}</math></p> <p>⑤、<math>x^{-n} = \frac{1}{x^n}</math>                              ⑥、<math>x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}</math></p> <p>常用公式：</p> <p>1、<math>(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc</math></p> <p>2、<math>(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3</math>，              <math>(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3</math>。</p>			

$$3、 a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \quad a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)。$$

1、化简  $\sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt{(a-2b)^2}$  的结果是( )。

- A.  $3b-2a$       B.  $2a-3b$       C.  $b$  或  $2a-3b$       D.  $b$

$$\text{解: } \sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt{(a-2b)^2} = a-b + |a-2b|$$

若  $a \geq 2b$ , 则原式 =  $a-b+a-2b=2a-3b$ ,

若  $a < 2b$ , 则原式 =  $a-b-(a-2b)=b$ , 选 C。

2、式子  $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$  的化简结果为( )。

- A、1      B、10      C、100      D、 $\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})^2} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{6+2\sqrt{9-5}} = \sqrt{10}。 \end{aligned}$$

3、已知  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ , 则  $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = ( )$ 。

$$\text{解: } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow x + x^{-1} + 2 = 9 \Rightarrow x + x^{-1} = 7,$$

$$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2} = \pm \sqrt{x + x^{-1} - 2} = \pm \sqrt{5}。$$

(互为倒数一般要平方, 这样才能用到互为倒数)

复习思考题、作业题:

设  $a, b$  满足  $0 < a < b < 1$ , 则下列不等式中正确的是( )。

- A.  $a^a < a^b$       B.  $b^a < b^b$       C.  $a^a < b^a$       D.  $b^b < a^b$

$$\text{解: 令 } a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2},$$

对于 A,  $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} < (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{4})^1 < (\frac{1}{4})^2 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{16} \Rightarrow 4 > 16$ , 矛盾;

对于 B,  $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^1 < (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 2 > 4$ , 矛盾;

对于 C,  $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (\frac{1}{4})^1 < (\frac{1}{2})^1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow 4 > 2,$

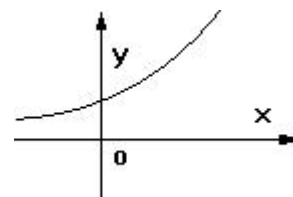
成立;

对于 D,  $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^1 < (\frac{1}{4})^1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 2 > 4,$  矛盾;

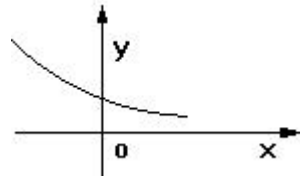
下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 4—5 周	课 次	第 6 次
章 节 名 称	1.5、指数函数		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握指数函数的性质		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：指数的单调性 难点：指数的定义域和值域		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">1.5、指数函数</p> <p>方法：一定要化同底 <math>4^x = (2^x)^2</math>，<math>9^x = (3^x)^2</math></p> <p>任何时候指数函数的底数不能为负，不是指指数的底数不能为负，例 <math>y = (-2)^x</math> 和 <math>y = (-2)^3</math>。</p> <p>一、指数函数的图象</p> <p>方法：y 永远大于 0，需要讨论的是 a 是否大于 1。</p> <p>1、<math>y = a^x</math> (<math>a &gt; 1</math>) 由图象可知：</p> <p>①、定义域是 <math>R</math></p> <p>②、值域是 <math>(0, +\infty)</math>。</p> <p>(当 <math>x \rightarrow -\infty</math> 时，图象无限接近于 x 轴，但永远不会相交。)</p> <p>③、过点 <math>(0, 1)</math>，在 <math>R</math> 上函数是递增。</p> <p>④、当 <math>x \in (-\infty, 0)</math> 时，<math>y \in (0, 1)</math>；当 <math>x \in [0, +\infty)</math> 时，<math>y \in [1, +\infty)</math>。</p>			



2、 $y = a^x$  ( $1 > a > 0$ ) 由图象可知：



①、定义域是  $R$

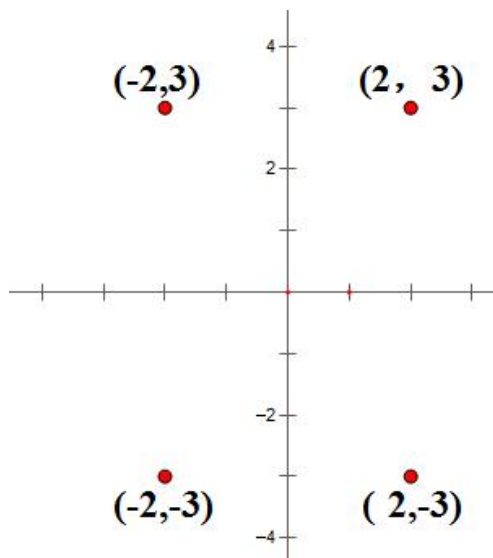
②、值域是  $(0, +\infty)$ 。

(当  $x \rightarrow +\infty$  时，图象无限接近  $x$  轴，但永远不会相交。)

③、过点  $(0, 1)$ ，在  $R$  上函数是递减的。

④、当  $x \in (-\infty, 0)$  时， $y \in (1, +\infty)$ ；当  $x \in [0, +\infty)$  时， $y \in (0, 1]$ 。

注意：会画  $y = 2^x$ 、 $y = 2^{-x}$ 、 $y = -2^x$ 、 $y = -2^{-x}$ 、 $y = 2^{|x|}$ 、 $y = |2^x|$  的图象。



二、会判断  $y = a^{f(x)}$  的单调区间。

(考试  $f(x)$  一般是二次函数)

方法：增增  $\Rightarrow$  增，减减  $\Rightarrow$  增，增减  $\Rightarrow$  减。

1、求  $y = 2^{x^2 - 4x + 7}$  的值域和单调性。

解：  $x^2 - 4x + 7 \geq 3 \Rightarrow 2^{x^2 - 4x + 7} \geq 2^3 = 8$ ，故值域为  $[8, +\infty)$ ，

$y = 2^t$  在  $R$  上单调递增，

$t = x^2 - 4x + 7$  在  $(-\infty, 2]$  单调递减，在  $[2, +\infty)$  单调递增，

故  $y = 2^{x^2 - 4x + 7}$  在  $(-\infty, 2]$  单调递减，在  $[2, +\infty)$  单调递增。

2、求  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+6}$  的值域和单调性。

$$\text{解: } x^2 - 4x + 6 \geq 2 \Rightarrow 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

故值域为  $(0, \frac{1}{4}]$ ,  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  在  $R$  上单调递减,

$t = x^2 - 4x + 6$  在  $(-\infty, 2]$  单调递减, 在  $[2, +\infty)$  单调递增,

故  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+6}$  在  $(-\infty, 2]$  单调递增, 在  $[2, +\infty)$  单调递减。

### 三、综合练习

1、 $f(x) = a^{x-2}$  恒过定点\_\_\_\_\_。

2、 $f(x) = 3a^{x-2} + 5$  恒过定点\_\_\_\_\_。

3、求方程  $4^x - 2^{x+2} - 5 = 0$  的解。

$$\text{解: } 4^x - 2^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x - 5,$$

令  $t = 2^x$ , 可得  $t^2 - 4t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$  或  $-1$  (舍去), 即  $2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5$ 。

4、求  $y = \frac{10^x - \frac{1}{10^x}}{10^x + \frac{1}{10^x}}$  的值域和单调性。

$$\text{解: } y = \frac{10^x - \frac{1}{10^x}}{10^x + \frac{1}{10^x}} = \frac{100^x - 1}{100^x + 1} = \frac{100^x + 1 - 2}{100^x + 1} = 1 - \frac{2}{100^x + 1},$$

$$100^x > 0 \Rightarrow 100^x + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{100^x + 1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{100^x + 1} < 2$$

$$\Rightarrow 0 > -\frac{2}{100^x + 1} > -2 \Rightarrow 1 > 1 - \frac{2}{100^x + 1} > -1, \text{ 故值域为 } (-1, 1),$$

$y = 100^x + 1$  单调递增, 故  $y = \frac{1}{100^x + 1}$  单调递减, 故  $y = \frac{2}{100^x + 1}$  单调递减,

故  $y = -\frac{2}{100^x + 1}$  单调递增, 故  $y = 1 - \frac{2}{100^x + 1}$  单调递增。

5、已知  $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$ 。

(1)、求奇偶性; (2)、求单调性; (3)、求解  $f(t^2 - 2t) + f(-t - 4) > 0$ 。

解: (1)、 $f(-x) = e^{-x} - \frac{1}{e^{-x}} = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$ , 奇。

(2)、 $y = e^x$  单调递增,  $y = e^{-x}$  单调递减, 故  $y = -e^{-x}$  单调递增,

故  $f(x) = e^x - e^{-x}$  单调递增。

(3)、 $f(t^2 - 2t) + f(-t - 4) > 0 \Rightarrow f(t^2 - 2t) > -f(-t - 4)$

$\Rightarrow f(t^2 - 2t) > f(t + 4)$ ,  $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$  单调递增,

故  $t^2 - 2t > t + 4 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 > 0$ , 故  $(t + 1)(t - 4) > 0$ , 故  $t > 4$  或  $t < -1$ 。

复习思考题、作业题:

1、 $f(x) = 2a^{x-3} + 6$  恒过定点 (3, 8)。

2、 $f(x) = 2\log_a(x - 2) + 6$  恒过定点 (3, 6)。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 6 周	课 次	第 7 次
章 节 名 称	1.6、对数运算		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握对数的运算		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：对数的运算规则 难点：对数和指数的转换		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">1.6、对数运算</p> <p>对数的性质：若 <math>a, b, c</math> 都大于 0，则：</p> <p>①、<math>\log_a bc = \log_a b + \log_a c</math>，<math>\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c</math>；</p> <p>②、<math>\log_a b^c = c \log_a b</math>，<math>\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b</math></p> <p>③、<math>a^{\log_a b} = b</math>；</p> <p>④、<math>\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}</math> (换底公式)；</p> <p>⑤、<math>\log_a b = \frac{1}{\log_b a}</math>；</p> <p>⑥、若 <math>a, b</math> 同时大于 1 或同时大于 0 小于 1，则 <math>\log_a b &gt; 0</math>。</p> <p>1、求值 <math>\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2</math>。</p> <p>解： <math>\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 + \lg 5 \times \lg 20 + \lg^2 2</math></p> <p><math>= 2 \lg 5 + 2 \lg 2 + \lg 5 (\lg 5 + 2 \lg 2) + \lg^2 2</math></p>			

$$\begin{aligned}
&= 2\lg 5 + 2\lg 2 + \lg 5(\lg 5 + 2\lg 2) + \lg^2 2 \\
&= 2 + \lg^2 5 + 2\lg 5\lg 2 + \lg^2 2 \\
&= 2 + (\lg 5 + \lg 2)^2 = 3.
\end{aligned}$$

2、求值  $2\log_{12} 2 + \log_{12} 3$ 。

解：  $2\log_{12} 2 + \log_{12} 3 = \log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} 12 = 1$ 。

3、求值  $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{8} \cdot \log_5 \frac{1}{9}$ 。

解：  $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{8} \cdot \log_5 \frac{1}{9} = -\log_2 25 \cdot \log_3 8 \cdot \log_5 9$

$$= -\log_2 25 \frac{\log_2 8 \log_2 9}{\log_2 3 \log_2 5} = -2\log_2 5 \frac{3}{\log_2 3} \frac{2\log_2 3}{\log_2 5}$$

$= -12$ 。

4、求值  $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$

解：  $\frac{\log_8 9}{\log_2 3} = \frac{\log_{2^3} 3^2}{\log_2 3} = \frac{\frac{2}{3}\log_2 3}{\log_2 3} = \frac{2}{3}$ 。

5、已知  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$ , 则  $\log_3 6 = ( \quad )$ 。

- A.  $\frac{a+b}{a}$     B.  $\frac{a+b}{b}$     C.  $\frac{a}{a+b}$     D.  $\frac{b}{a+b}$

解：  $\log_3 6 = \frac{\lg 6}{\lg 3} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3} = \frac{a+b}{b}$ 。

6、已知：  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 7 = b$ , 则  $\log_{42} 56 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：  $\log_2 3 = a \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$ ,  $\log_{42} 56 = \frac{\log_3 56}{\log_3 42} = \frac{\log_3 7 \times 8}{\log_3 7 \times 6}$

$$= \frac{\log_3 7 + \log_3 8}{\log_3 7 + \log_3 6} = \frac{b + \log_3 2^3}{b + \log_3 2 \times 3} = \frac{b + 3\log_3 2}{b + \log_3 2 + \log_3 3} = \frac{b + 3\frac{1}{a}}{b + \frac{1}{a} + 1}$$

$$= \frac{ab + 3}{ab + 1 + a}.$$

### 7、指数式与对数式互化

(1)、 $\log_2 8 = 3$ ;                      (2)、 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ ;

(3)、 $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ ;                      (4)、 $5^4 = 625$ ;

(5)、 $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ;                      (6)、 $(\frac{1}{4})^{-2} = 16$ .

解: (1)、 $2^3 = 8$ ;                      (2)、 $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ ;

(3)、 $\sqrt{3}^3 = x$ ;                      (4)、 $\log_5 625 = 4$ ;

(5)、 $\log_3 \frac{1}{3} = -1$ ;                      (6)、 $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$ 。

### 8、求下列各式中 $x$ 的值:

(1)、 $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$                       (2)、 $\log_x 8 = 6$

(3)、 $\lg 100 = x$                       (4)、 $-\ln e^2 = x$

解: (1)、 $\log_{64} x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_{2^6} x = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \log_2 x = -4 \Rightarrow x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ ;

(2)、 $\log_x 8 = 6 \Rightarrow \log_x 2^3 = 6 \Rightarrow 3\log_x 2 = 6$

$\Rightarrow \log_x 2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ;

(3)、 $\lg 100 = x \Rightarrow 10^x = 100 \Rightarrow x = 2$ ;

(4)、由  $-\ln e^2 = x \Rightarrow x = -2\ln e = -2$ 。

9、求值： $\log_8 9 \times \log_{27} 32$ 。

解：原式  $= \log_{2^3} 3^2 \cdot \log_{3^3} 2^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$ 。

复习思考题、作业题：

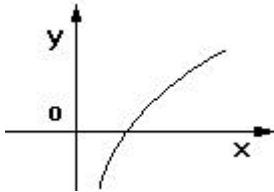
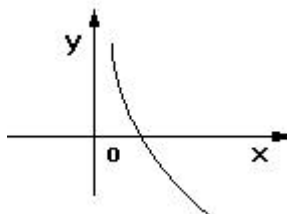
$$\log_2(\log_2 32 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} + \log_4 36)$$

解：原式  $= \log_2(5 - \log_2 \frac{3}{4} + \log_{2^2} 6^2)$

$$= \log_2(5 + \log_2 \frac{4}{3} + \frac{1}{2} 2 \log_2 6)$$
$$= \log_2(5 + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 6)$$
$$= \log_2(5 + \log_2 \frac{4}{3} \times 6) = \log_2(5 + \log_2 8)$$
$$= \log_2(5 + 3) = 3。$$

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 6—7 周	课 次	第 8 次
章 节 名 称	1.7、对数函数		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握对数函数的性质		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：指数的单调性 难点：对数函数的定义域和值域		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;"><b>1.7、对数函数</b></p> <p>一、对数函数的图象</p> <p>方法：<math>x</math> 永远大于 0，需要讨论 <math>x</math> 是否大于 1。</p> <p>1、<math>y = \log_a x \quad (a &gt; 1)</math></p>  <p>由图象可以知道：</p> <p>①、定义域是 <math>(0, +\infty)</math></p> <p>②、值域是 <math>R</math>。</p> <p>(当 <math>x \rightarrow 0</math> 时，图象无限接近于 <math>y</math> 轴，但永远不会相交。)</p> <p>③、过点 <math>(1, 0)</math>，在 <math>R</math> 上函数是递增的。</p> <p>④、当 <math>x \in (0, 1)</math> 时，<math>y \in (-\infty, 0)</math> 时；当 <math>x \in [1, +\infty)</math> 时，<math>y \in [0, +\infty)</math>。</p> <p>2、<math>y = \log_a x \quad (0 &lt; a &lt; 1)</math></p>  <p>由图象可以知道：</p> <p>①、定义域是 <math>(0, +\infty)</math></p> <p>②、值域是 <math>R</math>。</p> <p>(当 <math>x \rightarrow 0</math> 时，图象无限接近于 <math>y</math> 轴，但永远不会相交。)</p>			

③、过点(1, 0), 在  $R$  上函数是递减的。

④、当  $x \in (0, 1)$  时,  $y \in (0, +\infty)$ ; 当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $y \in (-\infty, 0]$

画图  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ,  $y = \log_2(-x)$ ,  $y = -\log_2 x$ ,

$y = -\log_2(-x)$ ,  $y = \log_2|x|$ ,  $y = |\log_2 x|$ ,  $y = |\log_2|x||$

二、会判断  $y = \log_a f(x)$  的单调区间和值域。

方法: 增增  $\Rightarrow$  增, 减减  $\Rightarrow$  增, 增减  $\Rightarrow$  减,

1、求  $y = \log_{0.2}(x^2 - 4x - 5)$  的单调区间。

解:  $y = \log_{0.2} t$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

而  $t = x^2 - 4x - 5$  在  $(-\infty, 2]$  单调递减, 在  $[2, +\infty)$  单调递增,

故  $y = \log_{0.2}(x^2 - 4x - 5)$  在  $(-\infty, 2]$  单调递增, 在  $[2, +\infty)$  单调递减。

解:  $y = \log_{0.2} t$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

而  $t = x^2 - 4x - 5$  在  $(-\infty, -1)$  单调递减, 在  $(5, +\infty)$  单调递增,

故  $y = \log_{0.2}(x^2 - 4x - 5)$  在  $(-\infty, -1)$  单调递增, 在  $(5, +\infty)$  单调递减。

2、求  $y = \log_{0.5}(x^2 - 4x + 8)$  的值域。

解:  $x^2 - 4x + 8 \geq 4$ , 故  $\log_{0.5}(x^2 - 4x + 8) \leq \log_{0.5} 4 = -2$ ,

故函数的值域为  $(-\infty, -2]$ 。

3、已知函数  $y = \log_2(2 - ax)$  在  $[0, 1]$  单调递减, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

解: 令  $y = \log_2 t$ ,  $t = 2 - ax$ , 由于母函数  $y = \log_2 t$  单调递增,

而原函数  $y = \log_2(2 - ax)$  在  $[0, 1]$  单调递减,

故  $t = 2 - ax$  在  $[0, 1]$  单调递减, 故  $a > 0$ ,

但还必须保证  $y = \log_2(2 - ax)$  在  $[0, 1]$  有意义:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq ax \leq a \Rightarrow 0 \geq -ax \geq -a \Rightarrow 2 \geq 2 - ax \geq 2 - a$$

故  $2 - a > 0 \Rightarrow a < 2$ 。

### 三、综合练习

1、判断函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  的奇偶性。

解:  $f(-x) = -f(x)$

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)^{-1}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2 = 1$$

$$1 = 1$$

成立, 故是奇函数。

2、设  $a, b, c$  为正数, 且  $3^a = 4^b = 6^c$ , 则有( )。

A.  $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

B.  $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

C.  $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$

D.  $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

解:  $3^a = 4^b = 6^c \Rightarrow \begin{cases} a = \log_3 k \\ b = \log_4 k \\ c = \log_6 k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \log_k 3 \\ \frac{1}{b} = \log_k 4 \\ \frac{1}{c} = \log_k 6 \end{cases}$

对于 A:  $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \log_k 6 = \log_k 3 + \log_k 4 \Rightarrow \log_k 6 = \log_k 12$ ,

对于 B:  $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow 2 \log_k 6 = 2 \log_k 3 + \log_k 4 \Rightarrow \log_k 36 = \log_k 36$ , 成立, 故选 B。

3、 $f(x) = \log_a(x-1)$  恒过定点\_\_\_\_\_。

4、不等式  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) > x^2 - x + \frac{1}{2}$  的解集为。

A.  $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

B.  $(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$

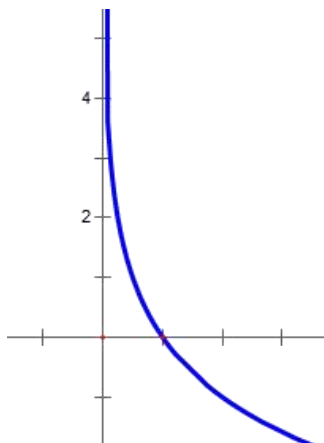
C.  $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$

D.  $(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

解：代  $x=1.1$  可得  $\log_{\frac{1}{2}}(1.21-1.1) > 1.21-1.1+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 0.11 > 0.61$  成立，故排除 B 和 C，

代  $x=-0.1$  可得  $\log_{\frac{1}{2}}(0.01+0.1) > 0.01+0.1+\frac{1}{2}$  成立，选 A。



5、已知  $a=0.3^3, b=3^{0.3}, c=\log_3 0.3, d=\log_{0.3} 3$ ，则  $a, b, c, d$  的大小关系是\_\_\_\_\_。

解：  $\log_3 \frac{3}{10} < \log_3 \frac{1}{3} = -1 = \log_{\frac{3}{10}} \frac{10}{3} < \log_{\frac{3}{10}} 3, 0.3^3 < 0.3^0 = 1 = 3^0 < 3^{0.3}$ 。

6、 $\log_a c, \log_b c$  是方程  $x^2 - 3x + 1 = 0$  的两根，求  $\log_{\frac{a}{b}} c$  的值。

$$\text{解：} \begin{cases} \log_a c + \log_b c = 3 \\ \log_a c \log_b c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 3 \\ \frac{1}{\log_c a} \frac{1}{\log_c b} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\log_c a + \log_c b}{\log_c a \log_c b} = 3 \\ \frac{1}{\log_c a \log_c b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a + \log_c b = 3, \\ \log_c a \log_c b = 1 \end{cases}$$

$$\log_{\frac{a}{b}} c = \frac{1}{\log_c \frac{a}{b}} = \frac{1}{\log_c a - \log_c b} = \pm \frac{1}{\sqrt{(\log_c a - \log_c b)^2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{(\log_c a + \log_c b)^2 - 4 \log_c a \log_c b}} = \pm \frac{1}{\sqrt{9-4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

7、已知  $f(x) = \log_a \frac{1-mx}{x-1}$  是奇函数。

(1)、求  $m$  的值；

(2)、判断  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  的单调性；

(3)、当  $a = \frac{1}{2}$  时，若对于任意  $x \in [3, 4]$ ,  $f(x) > (\frac{1}{2})^x + b$  恒成立，求  $b$  的取值范围。

解：(1)、是奇函数，故  $f(-x) = -f(x)$

$$\Rightarrow \log_a \frac{1+mx}{-x-1} = -\log_a \frac{1-mx}{x-1} \Rightarrow \log_a \frac{1+mx}{-x-1} = \log_a \frac{x-1}{1-mx}$$

$$\Rightarrow \frac{1+mx}{-x-1} = \frac{x-1}{1-mx} \Rightarrow 1-m^2x^2 = 1-x^2,$$

比较系数可知  $m=1$ (舍去)或  $m=-1$ 。

$$(2)、f(x) = \log_a \frac{x+1}{x-1} = \log_a \frac{x-1+2}{x-1} = \log_a \left(1 + \frac{2}{x-1}\right),$$

若  $a > 1$ ,  $y = x-1$  在  $(1, +\infty)$  单调递增，

$$y = \frac{2}{x-1} \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 递减, } y = 1 + \frac{2}{x-1} \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 递减,}$$

$$y = \log_a \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递减;}$$

若  $0 < a < 1$ ,  $y = x-1$  在  $(1, +\infty)$  递增，

$$y = \frac{2}{x-1} \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 递减, } y = 1 + \frac{2}{x-1} \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 递减,}$$

$y = \log_a(1 + \frac{2}{x-1})$  在  $(1, +\infty)$  单调递增;

解: (3)、 $f(x) > (\frac{1}{2})^x + b \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} - (\frac{1}{2})^x > b,$

即  $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} - (\frac{1}{2})^x$  的最小值  $> b,$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1}$  和  $y = -(\frac{1}{2})^x$  在  $(1, +\infty)$  都单调递增,

故  $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} - (\frac{1}{2})^x$  在  $(1, +\infty)$  单调递增,

故  $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} - (\frac{1}{2})^x$  的最小值为:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3+1}{3-1} - (\frac{1}{2})^3 = -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}, \text{ 故 } -\frac{9}{8} > b.$$

8、若  $0 < a < 1, b > 1, ab > 1,$  比较大小:  $\log_a \frac{1}{b}, \log_a b, \log_b \frac{1}{b}$

解: 令  $a = \frac{1}{2}, b = 4,$

$$\log_a \frac{1}{b}, \log_a b, \log_b \frac{1}{b}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{2}} 4, \log_4 \frac{1}{4}$$

2      -2      -1

复习思考题、作业题:  $f(x) = \log_a(x-1) + 6$  恒过定点\_\_\_\_\_。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 8 周	课 次	第 9 次
章 节 名 称	第二章 函数与极限 2.1、映射与函数		
授 课 方 式	理论课 ( <input checked="" type="checkbox"/> )、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 的 目 的 要 求	理解映射与函的概念。本章将通过把数学问题具体化(例如:国庆大阅兵,我们国家展示了强大的军事力量。我们作为中国人很骄傲。那么炮弹发射高度和发射时间我们用数学描述为什么函数?)通过类似于这样的问题,增强“四个自信”。进一步培养学生的爱国主义精神,树立远大的理想,为实现中国梦奋斗。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点:认识基本初等函数。 难点:理解邻域。		
教学步骤及内容:			
<p>第二章 函数与极限</p> <p>2.1、映射与函数</p>			
<p>教学目的:理解映射与函的概念。</p> <p>教学重点:认识基本初等函数。</p> <p>教学难点:理解邻域。</p>			
<p>一、集合</p> <p>1、集合:具有某种特定性质的事物的总体叫做集合。组成这个集合的事物称为该集合的元素.用 <math>A, B, C, D</math> 表示集合;用 <math>a, b, c, d</math> 表示集合中的元素,元素与集合的关系: <math>a \notin A</math>      <math>a \in A</math>。</p> <p>一个集合,若它只含有有限个元素,则称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集。</p>			

2、集合的特性：确定性、无序性、互异性，举例。

(1)、元素的确定性：

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{\text{全国大于 50 公斤的人}\}$$

$$A = \{\text{很帅的人}\}$$

(2)、元素的互异性：

$$A = \{3, 6, 8\}$$

$$A = \{1, 2, 1\}$$

(3)、元素的无序性： $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ 。

3、注意研究的对象：

$$\{x \mid y = \sqrt{x-2} + 3\} = \{\text{大于等于 2 的所有数}\}$$

$$\{y \mid y = \sqrt{x-2} + 3\} = \{\text{大于等于 3 的所有数}\}$$

4、几个常见的集合。

$$R = \{\text{所有实数}\}$$

$$Q = \{\text{所有有理数}\}$$

有理数：有限小数或无限循环小数，即  $\frac{q}{p}$ ， $q, p \in Z$ 。

无理数：无限不循环小数，例  $\pi$ ， $\sqrt{\quad}$

$$Z = \{\text{所有整数}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$N = \{\text{自然数}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$N^* = \{\text{正整数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

5、表示方法：

(1)、列举法：把集合的全体元素一一列举出来。

例如  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 。

(2)、描述法：例如  $M = \{x \mid x > 5\}$ 。

(3)、常见的数集： $N$ ， $Z$ ， $Q$ ， $R$ ， $N^+$ 。

(4)、集合与集合的关系： $A$ 、 $B$  是两个集合，如果集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素，则称  $A$  是  $B$  的子集，记作  $A \subset B$ 。如果集合  $A$  与集合  $B$  互为子集，则称  $A$  与  $B$  相等，记作  $A = B$ 。若作  $A \subset B$  且  $A \neq B$  则称  $A$  是  $B$  的真子集。空集  $\phi$ ： $\phi \subset A$ 。

## 6、集合的运算

并集  $A \cup B$  :  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

交集  $A \cap B$  :  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

差集  $A \setminus B$  :  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 。

## 二、区间与邻域

1、区间：开区间  $(a,b)$ ，闭区间  $[a,b]$ ，半开半闭区间  $(a,b]$ ， $[a,b)$ ，有限、无限区间。

2、邻域：以  $a$  为中心的  $\delta$  邻域：  $U(a,\delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$  (开区间)

去心邻域  $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 。

## 三、函数

1、函数的概念：设数集  $D \subset \mathbb{R}$ ，则称映射  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  为定义在  $D$  上的函数，通常简记为  $y=f(x)$ ， $x \in D$ ，其中  $x$  称为自变量， $y$  称为因变量， $D$  称为定义域。

2、函数的两个要素：定义域、对应法则。

3、常见的几种函数：常量函数：  $y=2$

绝对值函数：  $y=|x|$ ；

符号函数  $y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

取整函数  $y = [x]$  ；

分段函数  $y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & x > 1 \end{cases}$ 。

### 4、函数的几种特性

(1)、函数的有界性 (上界、下界；有界、无界) 有界的充要条件：既有上界又有下界。

(2)、函数的单调性 (单增、单减)。

(3)、函数的奇偶性(定义域对称、 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关系决定图形特点 (关于原点、 $y$ 轴对称)。

(4)、函数的周期性(定义域中成立：  $f(x+l) = f(x)$ )。

5、基本初等函数：

(1)、幂函数：  $y = x^a$  。

(2)、指数函数：  $y = a^x$  。

(3)、对数函数  $y = \log_a(x)$  。

(4)、三角函数：  $y = \sin(x), y = \cos(x), y = \tan(x)$  。

6、初等函数：

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可  
用一个式子表示的函数，称为初等函数， 例如：

$$y = \sqrt{1-x^2}, y = \sin^2 x, y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

等都是初等函数。

复习思考题、作业题：下列关系中，表示正确的是( )。

A、  $1 \in \{0,1\}$

B、  $1 \subseteq \{0,1\}$

C、  $1 \subseteq \{0,1\}$

D、  $\{1\} \in \{0,1\}$

解：1 是集合的元素，要用  $\in$ ，子集用  $\subseteq$ 。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 8 周	课 次	第 10 次
章 节 名 称	2.2、函数的极限		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	理解函数的极限的概念。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：用定义求证函数的极限。 难点：函数的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">2.2、函数的极限</p> <p>教学目的：理解函数的极限的概念。</p> <p>教学重点：用定义求证函数的极限。</p> <p>教学难点：函数的极限的 <math>\varepsilon-\delta</math> 定义。</p> <p>一、<math>x \rightarrow x_0</math> 时，函数 <math>f(x)</math> 的极限</p> <p>1、定义：<math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow</math></p> <p><math>\forall \varepsilon &gt; 0, \exists \delta &gt; 0, \forall x, \text{ 当 } 0 &lt;  x - x_0  &lt; \delta \text{ 时, 有 } \ f(x) - A\  &lt; \varepsilon。</math></p> <p>注：(1)、<math>x_0</math> 可在函数的定义域内，也可不在，不涉及 <math>f</math> 在 <math>x_0</math> 有没有定义，以及函数值 <math>f(x_0)</math> 的大小。只要满足：存在某个 <math>\rho &gt; 0</math> 使：</p> <p><math>(x_0 - \rho, x_0) \cup (x_0, x_0 + \rho) \subset D。</math></p> <p>(2)、如果自变量 <math>x</math> 趋于 <math>x_0</math> 时，相应的函数值 <math>f(x)</math> 有一个总趋势-----以某个实数 <math>A</math> 为极限，则记为：<math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A。</math></p>			

## 2、几何意义:

例 1. 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ 。

证明: 这里  $|f(x) - A| = |c - c| = 0$ ,

因为  $\forall \varepsilon > 0$ , 可任取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ 。

例 2、证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ 。

分析:  $|f(x) - A| = |x - x_0|$ , 因此  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 只要  $|x - x_0| < \varepsilon$ 。

证明: 因为  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ 。

例 3、证明  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$ 。

分析:  $|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 只要  $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

证明: 因为  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \varepsilon / 2$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$ 。

例 4. 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。

分析: 注意函数在  $x = 1$  是没有定义的, 但这与函数在该点是否有极限并无关系。

当  $x \neq 1$  时,  $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1|$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 只要  $|x - 1| < \varepsilon$ 。

证明: 因为  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。

## 3、单侧极限

若当  $x \rightarrow x_0^-$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的左极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$  或  $f(x_0^-) = A$ , 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: x_0 - \delta < x < x_0$ , 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

若当  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $f(x)$  无限接近于某常数  $A$ , 则常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的右极限,

记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  或  $f(x_0^+) = A$ , 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta$ , 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

4、定理:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$  且  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

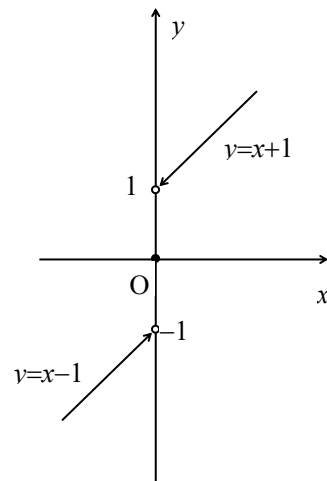
例 5、函数  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$  当  $x \rightarrow 0$  时的极限不存在。

这是因为,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)。$$

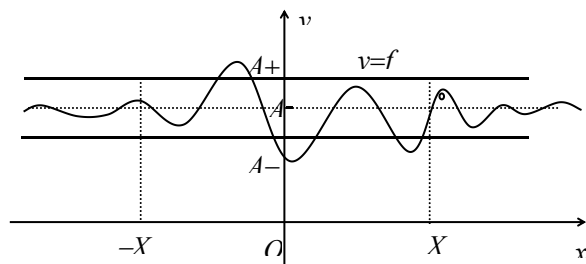


## 二、 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

1、定义:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 对于  $\forall x$ , 若  $|x| > X$ ,

则  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

2、几何意义:



其中, 直线  $y=c$  称为函数  $y=f(x)$  的图形的水平渐近线。

3、定理:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

例 6、证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

分析:  $|f(x) - A| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 只要  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ 。

证明: 因为  $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 有  $|f(x) - A| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

## 二、函数极限的性质

- 1、极限的唯一性
- 2、函数极限的局部有界性
- 3、函数极限的局部保号性

复习思考题、作业题：证明  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ 。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 9 周	课 次	第 11 次
章 节 名 称	2.3、无穷小与无穷大		
授 课 方 式	理论课 ( <input checked="" type="checkbox"/> )、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 的 目 的 要 求	理解无穷小与无穷大的概念。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：无穷小与无穷大的转换。 难点：无穷小和无穷大的关系。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;"><b>2.3、无穷小与无穷大</b></p> <p>教学目的：理解无穷小与无穷大的概念。</p> <p>教学重点：无穷小与无穷大的转换。</p> <p>教学难点：无穷小和无穷大的关系。</p> <p>一、无穷小定义</p> <p>1、定义：如果函数 <math>f(x)</math> 当 <math>x \rightarrow x_0</math> (或 <math>x \rightarrow \infty</math>) 时的极限为零，那么称函数 <math>f(x)</math> 为当 <math>x \rightarrow x_0</math> (或 <math>x \rightarrow \infty</math>) 时的无穷小，特别地，以零为极限的数列 <math>\{x_n\}</math> 称为 <math>n \rightarrow \infty</math> 时的无穷小。</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow t} f(x) = 0</math>，则称 <math>f(x)</math> 为 <math>x \rightarrow t</math> 时的无穷小。</p> <p>例：因为 <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0</math>，所以函数 <math>\frac{1}{x}</math> 为当 <math>x \rightarrow \infty</math> 时的无穷小。</p> <p>因为 <math>\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0</math>，故函数 <math>x-1</math> 为当 <math>x \rightarrow 1</math> 时的无穷小。</p> <p>因为 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0</math>，故数列 <math>\{\frac{1}{n+1}\}</math> 为当 <math>n \rightarrow \infty</math> 时的无穷小。</p> <p>2、很小很小的数只要它不是零，作为常数函数在自变量的任何变化过程中，其极限就是这个常数本身，不会为零，故不是无穷小；</p> <p>3、0 是无穷小，因为 <math>\lim_{x \rightarrow t} 0 = 0</math>。</p>			

## 二、无穷大定义

1、定义： 如果当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时， 对应的函数值的绝对值  $|f(x)|$  无限增大， 就称函数  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大， 记为：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

注： 当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷大的函数  $f(x)$ ， 按函数极限定义来说， 极限是不存在的， 但为了便于叙述函数的这一性态， 我们也说“函数的极限是无穷大”， 并记作：

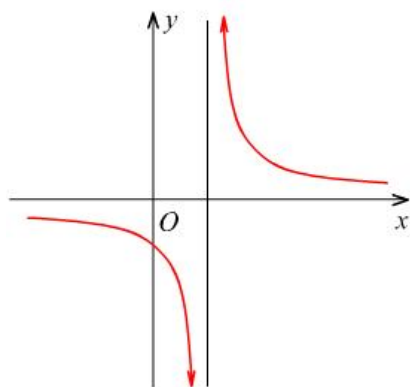
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

2、 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ 。

证： 因为  $\forall M > 0, \exists \delta = \frac{1}{M}$ ， 当  $0 < |x-1| < \delta$  时， 有  $|\frac{1}{x-1}| > M$ ，

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ 。

提示： 要使  $|\frac{1}{x-1}| = \frac{1}{|x-1|} > M$ ， 只要  $|x-1| < \frac{1}{M}$ 。



### 三、无穷小和无穷大的关系

定理：在自变量的同一变化过程中，如果  $f(x)$  为无穷大，则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小；反之，

如果  $f(x)$  为无穷小，且  $f(x) \neq 0$  则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大。

即：非零的无穷小量与无穷大量是倒数关系：

当  $x_n \neq 0$  时，有：
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

注意是在自变量的同一个变化过程中。

#### 4、求下列极限

(1)、
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$$

解：(1)、
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2。$$

(2)、
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}。$$

解：
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1+0 = 1。$$

复习思考题、作业题：求极限：
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6}{2x}。$$

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 10 周	课 次	第 12 次
章 节 名 称	2.4、极限运算法则		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	4
教 学 目 的 要 求	能够对极限进行四则运算。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：极限运算的性质。 难点：复合函数的极限运算法则。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;"><b>2.4、极限运算法则</b></p> <p>教学目的：能够对极限进行四则运算。</p> <p>教学重点：极限运算的性质。</p> <p>教学难点：复合函数的极限运算法则。</p> <p>一、无穷小的性质</p> <p>    设 <math>\{x_n\}</math> 和 <math>\{y_n\}</math> 是无穷小量于是：</p> <p>    1、两个无穷小量的和差也是无穷小量：</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = 0$ <p>    例： <math>\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x + x)</math></p> <p>    2、对于任意常数 C，数列 <math>\{c \cdot x_n\}</math> 也是无穷小量：</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = 0,$ <p>    例： <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0</math></p>			

3、 $\{x_n \cdot y_n\}$ 也是无穷小量，两个无穷小量的积是一个无穷小量。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0。$$

4、 $\{|x_n|\}$ 也是无穷小量：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |x_n| = 0。$$

5、无穷小与有界函数的积为无穷小。

例： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ 。

## 二、函数极限的四则运算

1、若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  有极限，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)。$$

2、函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有极限，则对任何常数  $a$  成立

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)。$$

3、若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  有极限，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)。$$

4、若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  有极限，并且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \neq 0, \quad \text{则} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}。$$

注意：(1)、极限的四则运算成立的条件是若函  $f(x)$  和  $g(x)$  在点  $x_0$  有极限。

(2)、有理函数的极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,

当  $Q(x_0) \neq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ ,

当  $Q(x_0) = 0$  且  $P(x_0) \neq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$ ,

当  $Q(x_0) = P(x_0) = 0$  时, 先将分子分母的公因式  $(x-x_0)$  约去。

例 1、求  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 。

例 2、求  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3-1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-5x+3)}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5 \cdot 2 + 3} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = -\frac{7}{3}。$$

例 3、求  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)} = \frac{1}{6}$ 。

例 4、求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4}$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{2x-3} = \frac{1^2-5 \cdot 1+4}{2 \cdot 1-3} = 0$ ,

根据无穷大与无穷小的关系得  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty$ 。

例 5、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$ 。

解: 先用  $x^3$  去除分子及分母, 然后取极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}.$$

例 6、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5}$ 。

解：先用  $x^3$  去除分子及分母，然后取极限：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0.$$

例 7、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1}$ 。

解：因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5} = 0$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1} = \infty$ 。

例 8、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ 。

解：当  $x \rightarrow \infty$  时，分子及分母的极限都不存在，故关于商的极限的运算法则不能应用。

因为  $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$ ，是无穷小与有界函数的乘积，

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ 。

### 三、复合函数的极限运算法则

定理：设函数  $y = f[g(x)]$  是由函数  $y = f(u)$  与  $u = g(x)$  复合而成， $f[g(x)]$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义，

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(u) = A$   $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ ，

$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ，且存在  $\delta_0 > 0$ ，当  $x \in U(x_0, \delta_0)$  时，有  $g(x) \in U(u_0, \delta_0)$ ，

例 1、求  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$ 。

解：  $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$  是由  $y = \sqrt{u}$  与  $u = \frac{x^2-9}{x-3}$  复合而成的，

因为  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}} = \lim_{u \rightarrow 6} \sqrt{u} = \sqrt{6}$ 。

或解：  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+3} = \sqrt{6}$ 。

## 习题

1、计算下列极限

(1)、  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x-3}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{2^2+5}{2-3} = -9$ 。

(2)、  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^2+1}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{3-3}{3+1} = 0$

(3)、  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$ 。

(4)、  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4x^2 - 2x + 1)}{x(3x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x + 2} = \frac{0 - 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(5)、\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}。$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x + 0 = 2x。 \end{aligned}$$

$$(6)、\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)。$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2 - 0 + 0 = 2。$$

$$(7)、\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}。$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2}。$$

$$(8)、\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}。$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4}}{1 - 3\frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0 + 0}{1 - 0 + 0} = 0。$$

$$(9)、\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}。$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}。$$

$$(10)、\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2})。$$

$$\text{解：}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2}) = (1+0)(2-0) = 2。$$

$$(11)、\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n})。$$

$$\text{解：}\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1[1-0]}{\frac{1}{2}} = 2。$$

$$(12)、\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}。$$

$$\begin{aligned} \text{解：}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

$$(13)、\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}。$$

$$\begin{aligned} \text{解：}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n})}{5} \\ &= \frac{(1+0)(1+0)(1+0)}{5} = \frac{1}{5}。 \end{aligned}$$

$$(14)、\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3})。$$

$$\begin{aligned} \text{解：}\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}) &= \lim_{x \rightarrow 1} [\frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{3}{1-x^3}] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = \frac{-(1+2)}{1+1+1^2} = -1。$$

3、计算下列极限

(1)、 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}。$

解： $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，而 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数，即 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ，故 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ 还是无穷小，

即 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0。$

复习思考题、作业题：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x - 1}{3x^2 + 6x + 8}。$

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 11 周	课 次	第 13 次
章 节 名 称	2.5 极限存在准则和两个重要极限		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 目 的 要 求	掌握两个重要极限。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：两个重要极限的变形求法。 难点：理解两边夹定理。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">2.5 极限存在准则和两个重要极限</p> <p>教学目的：掌握两个重要极限。</p> <p>教学重点：两个重要极限的变形求法。</p> <p>教学难点：理解两边夹定理。</p> <p style="text-align: center;">一、夹逼准则：三数列 <math>\{x_n\}</math>、<math>\{y_n\}</math> 和 <math>\{z_n\}</math>，如果从某项起：</p> <p>(1)、<math>y_n \leq x_n \leq z_n</math>；</p> <p>(2)、<math>\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a</math>，<math>\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a</math>，</p> <p>那么数列 <math>\{x_n\}</math> 的极限存在，且 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a</math>。</p> <p>用夹逼准则证明证明第一个重要极限：<math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1</math>。</p> <p>例 1、求 <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}</math>。</p> <p>解：<math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{1} = 3</math>。</p>			

例 2、求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}。$$

二、单调有界数列必有极限：单调增加有上界的数列一定收敛；单调减少有下界的数列一定收敛。

根据此定理，可以证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 。

例 3、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ 。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2。$$

例 4、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ 。

解：令  $t = -x$ ，则  $x \rightarrow \infty$  时， $t \rightarrow -\infty$ ，于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}。$$

$$\text{或解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x(-1)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1}。$$

例 5、求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x(-1)} 1 = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-1} = e^{-1}。$$

例 6、求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e。$

### 三、习题

1、计算下列的极限

(1)、  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \omega \frac{\sin \omega x}{\omega x} = \omega \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{\omega x} = \omega \times 1 = \omega。$

(2)、  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \frac{\sin 3x}{x}$   
 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \frac{1}{1} = 3。$

(3)、  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{5 \sin 5x} = \frac{2}{5} \times 1 \times 1 = \frac{2}{5}。$

(4)、  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ 。

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{x}{\sin x} = 1 \times 1 = 1。$

$$(5)、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}。$$

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 = 2。 \end{aligned}$$

$$(6)、\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}。$$

$$\text{解：} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x \times 1 = x。$$

2、计算下列的极限

$$(1)、\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}。$$

$$\text{解：} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} ([1+(-x)]^{-x})^{-1} = e^{-1}。$$

$$(2)、\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}。$$

$$\text{解：} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2。$$

$$(3)、\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}。$$

$$\text{解：} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2。$$

$$(4)、\lim_{x \rightarrow 0} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}。$$

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{1}{x})^{kx} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \frac{1}{-x})^{-x}]^{-k} = e^{-k}$ 。

复习思考题、作业题：求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 6x}$ 。

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 11 周	课 次	第 14 次
章 节 名 称	第三章、导数与微分 3.1、导数概念		
授 课 方 式	理论课 (√)、实践课 ( )、习题课 ( )、其它 ( )	教学时数	2
教 学 的 目 的 要 求	掌握导数的概念。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点: $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$ 。 难点: 理解自变量增量 $\Delta x$ 和因变量 $\Delta y$ 。		
<p>教学步骤及内容:</p> <p style="text-align: center;">第三章、导数与微分</p> <p style="text-align: center;">3.1、导数概念</p> <p>教学目的: 掌握导数的概念。</p> <p>教学重点: <math>f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A</math>。</p> <p>教学难点: 理解自变量增量 <math>\Delta x</math> 和因变量 <math>\Delta y</math>。</p> <p>一、导数概念</p> <p>1、定义:</p> $\left. \frac{df(x)}{dx} \right _{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}。$ <p><math>f(x)</math>在 <math>x_0</math> 的左导数: <math>f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}</math>;</p> <p><math>f(x)</math>在 <math>x_0</math> 的右导数: <math>f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}</math>;</p>			

$$2、 f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A。$$

注：如果极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$  不存在，就说函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处不可导。

3、导数的几何意义：函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  在几何上表示曲线  $y=f(x)$  在点  $M(x_0, f(x_0))$  处的切线的斜率，即  $f'(x_0)=\tan \alpha$ ，其中  $\alpha$  是切线的倾角。

$$4、 曲线  $y=f(x)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处的切线方程为： $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ 。$$

过切点  $M(x_0, y_0)$  且与切线垂直的直线叫做曲线  $y=f(x)$  在点  $M$  处的法线方程为：

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)。$$

例 1、求函数  $f(x)=C$  ( $C$  为常数) 的导数。

$$\text{解： } f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C-C}{h}=0，$$

即  $(C)'=0$ ，介绍书中的求导基本公式。

例 2、求函数  $f(x)=|x|$  在  $x=0$  处的导数。

$$\text{解： } f'_-(0)=\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h}=-1， \quad f'_+(0)=\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h}=1，$$

因为  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ，所以函数  $f(x)=|x|$  在  $x=0$  处不可导。

例 3、求等边双曲线  $y=\frac{1}{x}$  在点  $(\frac{1}{2}, 2)$  处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程。

$$\text{解： } y'=-\frac{1}{x^2}， \text{ 所求切线及法线的斜率分别为 } k_1=(-\frac{1}{x^2})|_{x=\frac{1}{2}}=-4， \quad k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4}，$$

所求切线方程为  $y-2=-4(x-\frac{1}{2})$ ，即  $4x+y-4=0$ ，

所求法线方程为  $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$ ，即  $2x-8y+15=0$ 。

$$\text{例 4、 设 } f(x)=\begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ ax+b & x > 0 \end{cases}， \text{ } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导，求 } a、b。$$

$$\text{解： } (e^x)'=e^x， (ax+b)'=a， \text{ 故 } e^0=a \Rightarrow a=1，$$

可导肯定连续，故  $e^0=a \cdot 0+b \Rightarrow b=1$ 。

## 二、函数的可导性与连续性的关系

设函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 即  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$  存在, 则

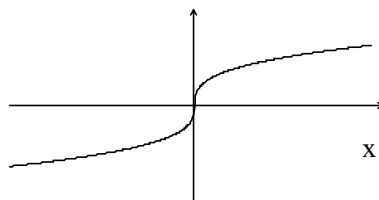
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

这就是说, 函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处是连续的, 所以, 如果函数  $y=f(x)$  在点  $x$  处可导, 则函数在该点必连续。

另一方面, 一个函数在某点连续却不一定在该点处可导。

例 5、函数  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 但在点  $x=0$  处不可导, 这是因为函数在点  $x=0$  处导数为无穷大

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = +\infty。$$



### 三、导数的计算

1、导数的定义:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。

2、设函数  $f(x)$  可导, 则  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{3\Delta x}$  等于( )。

A、 $f'(1)$     B、 $3f'(1)$     C、 $\frac{1}{3}f'(1)$     D、 $f'(3)$

解:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} = \frac{1}{3} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(1)$ 。

3、函数  $f'(1)=2$ , 求  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 。

解:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{-\Delta x} = -f'(1) = -2$ 。

4、函数  $f'(1)=2$ ，求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$ 。

解：
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$= 2f'(1) = 4$ 。

5、函数  $f'(1)=2$ ，求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$ 。

解：
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)+f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$

$= 2f'(1) = 4$

解：
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{\Delta x}$

$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[(1-\Delta x)+2\Delta x]-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}$

$= 2f'(1)$

6、已知  $f'(1)=2$ ，则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$  等于\_\_\_\_\_。

解：  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x)-f(1-3\Delta x)}{4\Delta x}$   
 $= \frac{5}{4} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[(1-3\Delta x)+5\Delta x]-f(1-3\Delta x)}{5\Delta x} = \frac{5}{4} f'(1) = \frac{5}{2}。$

复习思考题、作业题：设函数  $f(x)$  可导，则  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$  等于( )。

A、 $f'(1)$     B、 $2f'(1)$     C、 $\frac{1}{2}f'(1)$     D、 $f'(3)$

下次课预习要点

教 学  
后 记

授课时间	第 12 周	课 次	第 15 次
章 节 名 称	3.2、函数的求导法则		
授 课 方 式	理论课 ( <input checked="" type="checkbox"/> )、实践课 ( )、习题题 ( )、其它 ( )	教学时数	4
教 学 目 的 要 求	掌握函数导数的计算。		
教 学 方 法	讲解法、讨论法		
教 学 重 点 难 点	重点：求导法则。 难点：复合函数的求导。		
<p>教学步骤及内容：</p> <p style="text-align: center;">3.2、函数的求导法则</p> <p>教学目的：掌握函数导数的计算。</p> <p>教学重点：求导法则。</p> <p>教学难点：复合函数的求导。</p> <p>一、导数四则运算法则</p> <p>    设 <math>u=u(x)</math>, <math>v=v(x)</math> 都可导，则</p> <p>    (1)、<math>(u \pm v)' = u' \pm v'</math>,</p> <p>    (2)、<math>(C u)' = C u'</math>,</p> <p>    (3)、<math>(u v)' = u' \cdot v + u \cdot v'</math>,</p> <p>    (4)、<math>(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}</math>.</p>			

## 二、复合函数的求导法则

如果  $u=g(x)$  在点  $x$  可导, 函数  $y=f(u)$  在点  $u=g(x)$  可导, 则复合函数  $y=f[g(x)]$  在点  $x$  可导, 且其导数为:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\phi'(x)$ 。

## 三、基本初等函数的倒数

$$(1)、(c)' = 0$$

$$(2)、(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(3)、(e^x)' = e^x$$

$$(4)、(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(5)、(\sin x)' = \cos x$$

$$(6)、(\cos x)' = -\sin x$$

例 1、 $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2}$ , 求  $f'(x)$  及  $f'(\frac{\pi}{2})$ 。

解:  $f'(x) = 3x^2 - 4\sin x$ , 故  $f'(\frac{\pi}{2}) = 3(\frac{\pi}{2}) - 4\sin \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{4} - 4$ 。

例 2、 $y=e^x \sin x$ , 求  $y'$ 。

解:  $f'(x) = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$ 。

例 3、 $y=\tan x$ , 求  $y'$ 。

解:  $y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ 。

例 4、求的  $f(x) = \sin x \cos x$  导数。

解:  $f'(x) = \sin' x \cos x + \sin x \cos' x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ 。

例 5、求的  $f(x) = \frac{\ln x}{\cos x}$  导数。

解:  $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cos x - (\cos x)' \ln x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{x} \cos x + \sin x \ln x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \sin x \ln x}{x \cos^2 x}$ 。

例 6、 $y = \frac{1}{\cos x}$ ，求  $y'$ 。

$$\text{解： } y' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = (\cos^{-1} x)' = -1 \cos^{-2} x (\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}。$$

例 7、 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ ，求  $y'$ 。

$$\text{解： } y' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' = 2e^x \cos x。$$

例 8、求导  $f(x) = (x^2 + 2x)e^x + \cos x$ 。

$$\begin{aligned} \text{解： } f(x) &= (x^2 + 2x)'e^x + (x^2 + 2x)(e^x)' + (\cos x)' \\ &= (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x - \sin x = (x^2 + 4x + 2)e^x - \sin x。 \end{aligned}$$

例 9、求导  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \sin x$ 。

$$\begin{aligned} \text{解： } f'(x) &= \frac{(\ln x)'x^2 - (x^2)'\ln x}{x^4} + (\sin x)' \\ &= \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} + \cos x = \frac{1}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3} + \cos x。 \end{aligned}$$

例 10、求  $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + x^{25} + 3$  的导数。

$$\text{解： } f'(x) = \frac{(\ln x)'\sin x - (\sin x)'\ln x}{\sin^2 x} + 25x^{24} = \frac{\sin x - x \cos x \ln x}{x \sin^2 x} + 25x^{24}。$$

例 11、求  $f(x) = e^x \ln x + \tan x$  的导数。

$$\text{解： } f'(x) = (e^x)'\ln x + e^x(\ln x)' + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

例 12、求下列函数的导数：

(1)、 $y = x \cdot \tan x$  ;            (2)、 $y = \frac{x+1}{x-1}$

解：(1)、 $y' = x' \frac{\sin x}{\cos x} + x \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \tan x + x \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)'$   
 $= \tan x + x \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \tan x + x \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$  ;

(2)、 $y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$

或  $y = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2(x-1)^{-1}$  ,

$y' = 1' - 2(x-1)^{-2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$  。

例 13、设  $f(x) = xe^x$  的导函数为  $f'(x)$ ，则  $f'(1)$  的值为( )。

- A. e            B. e+1            C. 2e            D. e+2

解：  $f(x) = xe^x$  的导函数为  $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$  ,

所以  $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$ ，故选 C。

例 14、求下列函数的导数：

(1)、 $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$  ;            (2)、 $y = (x+1)(x+2)(x+3)$ 。

解：(1)、 $y' = 4x^3 - 6x - 5$  ;

(2)、 $y' = (x+1)'(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)'(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3)'$   
 $= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2)$   
 $= x^2 + 5x + 6 + x^2 + 4x + 3 + x^2 + 3x + 2$   
 $= 3x^2 + 12x + 11$  。

例 15、 $y = e^{2x}$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t = 2x$ ，则  $y' = (e^{2x})' = e^t t' = e^{2x} (2x)' = 2e^{2x}$  。

例 16、 $y=e^{x^2}$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t=x^2$ ，则  $y'=(e^{x^2})'=e^t t'=e^{x^2}(x^2)'=2xe^{x^2}$ 。

例 17、 $y=\ln 2x$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t=2x$ ，则  $y'=(\ln 2x)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{1}{x}$ 。

或解： $y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$ ，故  $y'=(\ln 2)'+(\ln x)'=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ 。

例 18、 $y=\ln x^2$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t=x^2$ ，则  $y'=(\ln x^2)'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{x^2}(x^2)'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$ 。

或解： $y=\ln x^2=2\ln x$ ，故  $y'=2\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$ 。

例 19、 $y=\sin 2x$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t=2x$ ，则  $y'=(\sin 2x)'=t'\cos t=(2x)'\cos 2x=2\cos 2x$ 。

例 20、 $y=\cos x^2$ ，求  $y'$ 。

解：令  $t=x^2$ ，则  $y'=(\cos x^2)'=t'(-\sin t)=-x^2'\sin x^2=-2x\sin x^2$ 。

例 21、 $y=(x^3+2x^2+3x+6)^6$ ，求  $y'$ 。

解： $y'=6t^5t'=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(x^3+2x^2+3x+6)'$   
 $=6(x^3+2x^2+3x+6)^5(3x^2+4x+3)$ 。

例 22、 $y=\ln \sin x$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。

解：令  $t=\sin x$ ，则  $y'=\frac{1}{t}t'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}$ 。

例 23、 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ，求  $y'$ 。

解： $y'=[(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$   
 $=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(1+[(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}]')=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1}(x+\sqrt{x})']$

$$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right) \right].$$

例 24、 $y = e^{x^3}$ ，求  $y'$ 。

解：  $y' = (e^{x^3})' = (e^t)'t = e^{x^3} (x^3)' = 3x^2 e^{x^3}$ 。

例 25、 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$ ，求  $y'$ 。

解：  $y' = (\sin t)'(t)' = \cos \frac{2x}{1+x^2} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)'$

$$= \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \cos \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} \cos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} \cos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \cos \frac{2x}{1+x^2}.$$

例 26、 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ ，求  $y'$ 。

解：  $y' = [(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1} (1-2x^2)' = \frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}} (-4x) = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$ 。

例 27、 $y = \ln \cos(e^x)$ ，求  $y'$ 。

解：  $y' = \frac{1}{\cos e^x} (\cos e^x)' = -\frac{1}{\cos e^x} \sin e^x (e^x)' = -\frac{e^x \sin e^x}{\cos e^x}$ 。

例 28、 $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$ ，求  $y'$ 。

解：  $y' = e^{\sin \frac{1}{x}} \left( \sin \frac{1}{x} \right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x}$ 。

例 29、  $f(x) = x^2 e^x + \frac{\ln x}{x} + \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} + 8$ ，求  $f'(1)$ 。

解：  $f'(x) = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' + \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} - \sin x + (x^{-\frac{1}{2}})'$   
 $= 2xe^x + x^2e^x + \frac{1 - \ln x}{x^2} - \sin x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$   
故  $f'(1) = 2e + e + 1 - \sin 1 - \frac{1}{2} = 3e + \frac{1}{2} - \sin 1$ 。

例 30、  $f(x) = x^{-3.8}e^{x-2} + \frac{2\ln x}{x^3} + \cos x \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + 8$ ，求  $(f(1))'$ 。

解：  $(f(1))' = 0$ 。

复习思考题、作业题：已知  $y = \cos x \sin x$ ，求  $y'$ 。

下次课预习要点

教 学  
后 记