揭阳职业技术学院

机 电 工 程 系

《高等数学（下）》教案

(2025-2026 学年第 2 学期)

教师姓名： 王辉坚

所授专业： 宝玉石鉴定与加工（专本协同）

授课班级： 241 班

课程整体教学设计

一、课程的性质和任务

党的二十大为国家职业教育的发展指明了新的方向。坚持正确方向，用习近平新时代中国特色社会主义思想铸魂育人，是高职教育改革的根本指引。教育部领导曾指出：深入推进党的创新理论进教材，是构建中国特色高质量教材体系的重大原则，是教材工作必须完成好的重要政治任务。我们要全面贯彻落实党的二十大精神，把教材建设作为深化教育领域综合改革的重要环节，不断深化对做好这项工作的规律性认识和实践探索，确保党的二十大精神进教材落到实处、取得实效。而本课程所采用的教程是同济大学数学科学学院编写的《高等数学》，该教材与时俱进，符合时代要求。

高等数学是数学学科的一个重要分支，它提供了一种科学方法，帮学生更深入的探索数学知识，并以其独特的思维方式解决实际的数学问题。本课程的教学任务是使学生理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法，培养学生的数学素质，培养学生变量数学的观点和具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。更核心的是培养学生的独立思考精神，在实践中形成系统的数学思维，以及培养学生把概念转化为实际解决问题的能力和技术。

二、教学目标与要求

教学目标是传授数学知识，培养学生数学素养，使学生养成数学素质。高等数学在学校的位置要求它需要立足专业培养，传授必需的数学知识，掌握必要的数学技术，培养一定的数学能力，强化一定的数学素养。

三、教学方法与手段

因为课程的着重点应放在挖掘和展现数学知识中的数学思想方法及其数学应用价值上。所以对重要概念，要讲清背景和形成过程，以及所体现的数学思想方法意义和作用。对例题、习题分析要提示数学思维过程，分析难点、关键点，这样才能有效地解决问题。对主要方法，要讲清思维本质、应用原则和其它方法的联系，要强调方法的科学性和灵活性等。教学中要特别注意引导学生抓住对所学知识的阅读、理解、分析和总结环节，勤于动脑和动手，提高计算的难确性、推理的逻辑性和表达的严密性。

四、理论与实践课程内容与学时分配

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第　1，2　周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第 1，2,3,4 次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">§5.1　定积分概念与性质</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">1，知识目标：主要是复习上学期极限连续导数不定积分的定义和相关知识点。认识定积分的概念。
2，能力目标：承上启下，温旧知新。</td></tr>
</table>

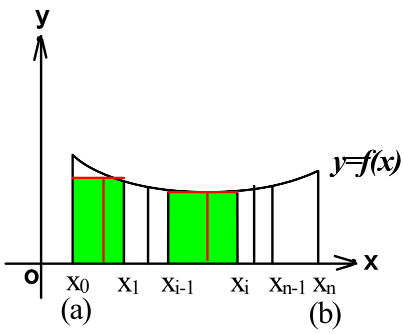
	3，素养目标：具备严谨的学习态度，不断学习的习惯。 4，课程思政：初步引导学生用数学思维形成正确的世界观和价值观。
教　学 方　法	讲授
教　学 重　点 难　点	重点：　定积分概念，掌握定积分的性质 难点：　定积分的性质

教学步骤及内容：

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间[a，b]上非负，由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 和 $y=0$ 围成的平面图形称为**曲边梯形**，（如图所示）其中曲线弧称为曲边.其面积求法如下：



(1) 分割：在区间[a，b]内插入任意 n-1 个分点：

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,

将区间[a，b]分成 n 个小区间（一般可以等分），记小区间[x_{i-1}, x_i]的长度为 Δx_i。

(2)近似代替：

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 在每个小区间[x_{i-1}, x_i]上任取一点 ξ_i，以[x_{i-1}, x_i]为底、$f(\xi_i)$为高的小矩形近似替代第 i 个小曲边梯形(i=1, 2, · · · , n)，则第 i 个小曲边梯形面积为 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$　　$i=1, 2, \cdots, n$

(3) 求和：把所有小矩形面积相加，得整个曲边梯形面积 A 的近似值，即：$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

(4) 取极限：

将区间[a，b]无限细分，即当 n→∞时，使 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$，求上述和式的极限就是曲边梯形的面积，即：$A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

2. 变速直线运动的路程

设物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是 t 的连续函数，求该物体所经过的路程。

（1）分割　在时间段 $[T_1,T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

把[T_1，T_2]分成 n 个小段[t_0, t_1], [t_1, t_2], · · ·, [t_{n-1}, t_n]。

（2）近似代替

在每个小时间段$[t_{i-1},t_i]$上任取一个时刻ξ_i，记$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，把物体在时间段$[t_{i-1},t_i]$上的变速直线运动可看作以$v(\xi_i)$为速度做匀速直线运动，则物体在$[t_{i-1},t_i]$内经过的路程为

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

（3）求和

这n个小时间段内物体经过路程相加，其和就是所求变速直线运动路程的近似值, 即

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i ;$$

（4）取极限　若将时间段无限细分，令$\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_n\}$，取极限

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

总结：“分割，近似求和，取极限”

二、定积分定义

抛开上述问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 就抽象出下述定积分的定义.

定义 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界, 在$[a,b]$中任意插入$n-1$个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间[x_0, x_1]，$[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$，各小段区间的长依次为$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i \in (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$, 作函数$f(\xi_i)$与小区间数$x_i$的乘积

$f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, ..., n)$, 并作和$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$，如果不对$[a,b]$怎样分法，也不论小区间[$x_{i-1}, x_i$]上点$\xi_i$如何取法。只要$\lambda \to 0$时，极限

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

都存在，则称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，极限值I称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分（简记积分）记作$\int_a^b f(x)dx$　　即

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，$[a,b]$ 叫做积分区间，a,b 分别称为积分下限、积分上限，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和。

注 1、　定积分只与被积函数，积分区间有关，而与积分变量无关。即：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

2、'$\varepsilon-\delta$'说法:$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$,使得无论区间$[a,b]$怎样分，区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\xi_i$如何取，只要$\lambda<\delta$时总有$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I|<\varepsilon$，则称数 I 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分。

3、根据定积分的定义, 曲边梯形的面积为 $A=\int_a^b f(x)dx$.

变速直线运动的路程为 $S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$.

4、如果函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分存在, 我们就说 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积.

函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足什么条件时, $f(x)$ 在$[a,b]$上可积呢?

定理 1　设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

定理 2　设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

定理 3　设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上单调, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

【例 1】 利用定积分定义计算$\int_0^1 x^2dx$

解　由于 $f(x)=x^2$ 在区间[0，1]连续，所以 $f(x)=x^2$ 在[0，1]可积，且$\int_0^1 x^2dx$ 与区间的分法和点ξ_i取法无关。为方便计算，把 区间[0，1]分为 n 等分，其分点为$\frac{i}{n}$（i=1，2，. . . , n），每个小区间的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots n)$，取$\xi_i=\frac{i}{n}$　$f(\xi_i)\Delta x_i=(\frac{i}{n})^2\frac{1}{n}$，作和式:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+n^2]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

当对区间[0，1]等分时，$\lambda\to 0$时，$n\to\infty$，由定积分的定义有

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

三、 定积分的几何意义和物理意义

1、定积分的几何意义

在区间$[a, b]$上，当 $f(x)\geq 0$ 时，积分$\int_a^b f(x)dx$在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积，即

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

当 $f(x)\leq 0$ 时，由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，它的面积

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx .$$

当 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时，函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方，而其它部分在 x 轴的下方. 如果我们对面积赋以正负号，在 x 轴上方的图形面积赋以正号，在 x 轴下方的图形面积赋以负号，则在一般情形下，定积分$\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义为：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

【例 2】 用定积分的几何意义求$\int_0^1 (1-x)dx$.

解：函数 $y=1-x$ 在区间$[0, 1]$上的定积分是以 $y=1-x$ 为曲边， 以区间$[0, 1]$为底的曲边梯形的面积. 因为以 $y=1-x$ 为曲边， 以区间$[0, 1]$为底的曲边梯形是一直角三角形，其底边长及高均为 1，所以

$$\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2} .$$

注：用定积分的几何意义说明$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

2、定积分的物理意义

如果被积函数 $f(x)$ **为物体**变速直线运动的速度时，$\int_a^b f(x)dx$ 表示该物体在时间段$[a,b]$内所经过的路程。

三、定积分的近似计算

从例 1 的计算过程中可以看到，对于任意确定的正整数 n，积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

都是定积分$\int_0^1 x^2 dx$ 的近似值。下面讨论一般情况：

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，定积分$\int_a^b f(x)dx$ 一定存在。把$[a,b]$等分，每个小区间的长度为

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，在小区间$[x_{i-1},x_i]$，取$\xi_i=x_{i-1}$，应有

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$

从而对于任一确定的正整数n，有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$

记$f(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots n)$，上式可记作

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}) \qquad (1)$$

如果$\xi_i=x_i$，则可得近似公式：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \qquad (2)$$

以上求定积分近似值的方法称为矩形法，公式（1）、（2）称为矩形法公式。

梯形法与抛物线法见 P229。

四、定积分的性质

两点规定：(1) 当$a=b$时，$\int_a^a f(x)dx=0$。

(2) 当$a\neq b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

性质 1 函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差)， 即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

证明：$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

性质 2 被积函数的常数因子可以提到积分号外面， 即

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

这是因为$\int_a^b kf(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx$.

推论 1：$\int_a^b[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)]dx$

$$=c_1\int_a^b f_1(x)dx+c_2\int_a^b f_2(x)dx+\cdots+c_n\int_a^b f_n(x)dx$$

性质 3 如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和，即 $a<c<b$，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

证明：$\sum\limits_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum\limits_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$，

令 $\lambda\to 0$，上式两端的每个和式的极限均存在，且：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

即 $\int_a^b [f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

值得注意的是不论 a ,b ,c 的相对位置如何总有等式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

成立. 例如, 当 $a<b<c$ 时, 由于 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$，于是有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

性质 4 $\int_a^b kdx=k(b-a)$，k 为常数。特别地，当 $k=1$ 时，$\int_a^b dx=b-a$ 。

性质 5 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)\cdot g(x)$ 也在 $[a,b]$ 可积。

性质 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，如果 $m\le f(x)\le M$，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

证明 对于 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，由于 $\xi_i\in[a,b]$，所以 $m\le f(\xi_i)\le M$，则

$$\sum_{i=1}^n m\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n M\Delta x_i$$

令 $\lambda\to 0$，上述不等式取极限，有

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n m\Delta x_i\le\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n M\Delta x_i$ 即 $\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$，从而 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

推论 2 如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

推论 3 如果 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且在区间 $f(x)\le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

这是因为 $g(x)-f(x)\ge 0$，从而 $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx\ge 0$，

所以 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

推论 4 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$$

证明：因为 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$，由性质 6 有

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx \quad \text{即} \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx。$$

注：推论 4 的逆命题不成立。

性质 7 （定积分中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

这个公式叫做积分中值公式.

证明 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值 M 与最小值 m，由性质 6 有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$,

各项除以 $b-a$ 得 $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$,

再由连续函数的介值定理, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ， 使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

于是两端乘以 $b-a$ 得中值公式： $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

积分中值公式的几何解释:

应注意: 不论 $a<b$ 还是 $a>b$, 积分中值公式都成立.

【例 3】 估计定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$ 的值。（性质 6 可得 $0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\le\frac{\pi}{2}$）

【例 4】设函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，证明：在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$。

证明:（反证法）假设在 $[a,b]$ 上 $f(x)\ne 0$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)>0$，有 $f(x)$ 的连续性可知，存在一个以 ξ 为中心的邻域 $U_\delta(\xi)$，在该邻域内 $f(x)>0$，于是有 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f(x)dx>0$，与已知矛盾。

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 3 周	课 次	第 5,6 次	
章 节 名 称	**§5.2 微积分学基本定理**			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1，知识目标：掌握定积分的计算。 2，能力目标：承上启下，温旧知新。 3，素养目标：具备严谨的学习态度，认真专研的精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神。			
教 学 方 法	讲授			
教 学 重 点 难 点	重点：变上限积分及其导数，牛顿—莱布尼兹公式 难点： 牛顿—莱布尼兹公式			

教学步骤及内容：

利用定积分的定义计算定积分时，只能计算一些比较简单而且数量很少的一部分积分，如果被积函数比较复杂时，其计算难度便会大大增加，所以有必要寻找一种既有效又简便的计算方法。

一 引言

设物体作变速直线运动, 已知速度 $v=v(t)$ 是 t 的连续函数，求该物体在 $[T_1,T_2]$ 所经过的路程为 $\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$，另一方面这段路程又可以表示为 $s(T_2)-s(T_1)$，所以 $\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt=s(T_2)-s(T_1).$，其中 $s'(t)=v(t).$

上式表明, 速度函数 $v(t)$在区间$[T_1, T_2]$上的定积分等于 $v(t)$的原函数 $S(t)$在区间$[T_1, T_2]$上的增量.

这个特殊问题中得出的关系是否具有普遍意义呢？

二、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，并且设 x 为$[a, b]$上的一点. 我们把函数 $f(x)$在部分区间$[a, x]$上的定积分 $\int_a^x f(x)dx$ 称**为积分上限的函数**. 它是区间$[a, b]$上的函数，记为$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$，或$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上可积，则积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a, b]$上连续；若 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$。

证明：首先证明 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。对 $\forall x\in[a,b]$ 及 $x_0+\Delta x\in[a,b]$，有

$$\Delta\Phi=\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

因为 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积，所以 $f(x)$ 在$[a, b]$有界，即 $\exists M>0$，对 $\forall t\in[a,b]$ 有 $|f(t)|\le M$，从而

$$|\Delta\Phi|=\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt\right|\le\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)|dt\le M|\Delta x|$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0$，即 $\Phi(x)$ 在 x_0 点连续，由 x_0 的任意性 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

下证定理的后半部分。由于 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续以及积分中值定理得，至少存在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间的一点 ξ，使得 $\Delta\Phi=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x$，于是 $\Phi'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x_0)$ （$\Delta x\to 0$时，$\xi\to x_0$）

由 x_0 的任意性可得，$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$。

注 1、 类似地，我们可以定义积分下限函数：

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)dt=-\int_b^x f(t)dt$$

且 $\Psi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt=\dfrac{d}{dx}[-\int_b^x f(t)dt]=-f(x)$

2、当上限是中间变量 $u=u(x)$ 时，有

$$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} f(t)dt=f[u(x)]u'(x) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=f[u(x)]u'(x)-f[v(x)]v'(x) \qquad (2)$$

例如：$(\int_a^x \sin t dt)'=\sin t$　　$(\int_a^{x^2}\sin t dt)'=2x\sin x^2$

定理 2 如果函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$

就是$f(x)$在$[a, b]$上的一个原函数.

定理的重要意义：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

注：在区间I上的任何连续函数$f(x)$都有原函数。

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分学基本定理）如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

此公式称为牛顿--莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式.

证明：由已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,而积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，则有$F'(x)=f(x)$，$\Phi'(x)=f(x)$，从而$[F(x)-\Phi(x)]'=0$，所以$F(x)-\Phi(x)=c$，即$\Phi(x)=F(x)-c$，令$x=a$得$\Phi(a)=F(a)-c$，而$\Phi(a)=0$，所以$c=F(a)$，即$\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)$

当$x=b$得 $\int_a^b f(t)dt=\Phi(b)=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$，即证。

注 1、为了方便起见，可把$F(b)-F(a)$记成$[F(x)]_a^b$,于是

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]|_a^b=F(b)-F(a)$$

2、微积分基本定理不仅反映了微积分学的几个主要概念之间的关系，而且把连续函数的定积分计算转化为原函数的计算。

3、被积函数在积分区间上“连续”这一条件必不可少，例如$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$

4、当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]|_a^b=F(b)-F(a)$也成立。

进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系.

例 1. 计算$\int_0^1 x^2dx$.

解：由于$\frac{1}{3}x^3$是x^2的一个原函数，所以

$$\int_0^1 x^2dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}.$$

例 2 计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

解　由于 arctan x 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{7}{12}\pi.$$

例 3．计算 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$．

解：$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$.

例 4．计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在$[0, \pi]$上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解：这图形是曲边梯形的一个特例．它的面积

$$A=\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2.$$

例 5．汽车以每小时 36km 速度行驶，到某处需要减速停车.设汽车以等加速度 $a=-5\text{m/s}^2$ 刹车．问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解　从开始刹车到停车所需的时间：当 $t=0$ 时，汽车速度

$$v_0=36\text{km}/h=\frac{36\times1000}{3600}\text{ m}/s=10\text{m/s}.$$

刹车后 t 时刻汽车的速度为　　$v(t)=v_0+at=10-5t$.

当汽车停止时，速度 $v(t)=0$，从　$v(t)=10-5t=0$　　得，$t=2(s)$.

于是从开始刹车到停车汽车所走过的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(10-5t)dt=[10t-5\cdot\frac{1}{2}t^2]_0^2=10\ (m),$$

即在刹车后，汽车需走过 10m 才能停住.

例 6．设 $f(x)$在$[0, +\infty)$内连续且 $f(x)>0$．证明函数 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$

在$(0, +\infty)$内为单调增加函数.

证明：$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt=xf(x)$，$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$．故

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}=\frac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}.$$

按假设，当 $0<t<x$ 时 $f(t)>0$, $(x-t)f(t)>0$，所以

$$\int_0^x f(t)dt>0,\quad \int_0^x(x-t)f(t)dt>0,$$

从而 $F'(x)>0\ (x>0)$，这就证明了 $F(x)$ 在$(0, +\infty)$内为单调增加函数.

例 7．求 $\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$.

解：这是一个零比零型未定式，由罗必达法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{-\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}.$$

提示：设 $\Phi(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，则 $\Phi(\cos x)=\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt$．

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt=\frac{d}{dx}\Phi(\cos x)=\frac{d}{du}\Phi(u)\cdot\frac{du}{dx}=e^{-u^2}\cdot(-\sin x)=-\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}.$$

例 8 求 $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2}\sin tdt$

解法 1：$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2}\sin tdt=\frac{d}{dx}[\int_{x^3}^{0}\sin tdt+\int_0^{x^2}\sin tdt]$

$$=\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{0}\sin tdt+\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin tdt]=-3x^2\sin x^3+2x\sin x^2$$

解法 2：由公式（2）可得:原式$=2x\sin x^2-3x^2\sin x^3$。

例 9　已知 $f(x)$ 是连续函数，设 $F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$，求 $\frac{dF(x)}{dx}$。

解：由 $F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$，所以

$$\frac{dF(x)}{dx}=(x\int_a^x f(t)dt)'-(\int_a^x tf(t)dt)'=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$$

例 10　计算定积分 $\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx$

解：由于 $\left|\cos x\right|=\begin{cases}\cos x & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ -\cos x & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$　所以

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=[\sin x]|_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

例 11　求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$。

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

例 12　求由曲线 $y=x^2+1$，直线 $x=1,x=3$ 及 x 轴所围成图形的面积。

解：$A=\int_1^3(x^2+1)dx=[\frac{1}{3}x^3+x]|_1^3=10\frac{2}{3}$

四、小结

1、积分上限函数：$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2、积分上限函数的导数：$\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

3、微积分基本公式：$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

五、思考题

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)dt$ 与 $\int_x^b f(u)du$ 是 x 的函数还是 t 与 u 的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

练习：

1、$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$ =_______ .

2、$\int_a^x (\dfrac{d}{dx}f(x))dx=$_________ .

3、$\dfrac{d}{dx}\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt=$_______ .

4、$\int_0^2 f(x)dx=$____，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\le x\le 1\\ 2-x,1<x<2\end{cases}$.

答案：1、0；　2、$f(x)-f(a)$；　3、$-\sqrt[3]{x}\ln(x^2+1)$　；　4、$\dfrac{5}{6}$

5、设 $f(x)$在$[0,+\infty)$内连续且 $f(x)>0$. 证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

证明: $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt=xf(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$. 故

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}.$$

按假设, 当 $0<t<x$ 时 $f(t)>0$, $(x-t)f(t)>0$, 所以

$$\int_0^x f(t)dt>0,\ \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$$

从而 $F'(x)>0$ $(x>0)$, 这就证明了 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

6、 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$.

解: 这是一个零比零型未定式, 由罗必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{-\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}.$$

提示：设 $\Phi(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，则 $\Phi(\cos x)=\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt$． $\frac{d}{dx}\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt=\frac{d}{dx}\Phi(\cos x)=\frac{d}{du}\Phi(u)\cdot\frac{du}{dx}=e^{-u^2}\cdot(-\sin x)=-\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}$．	
复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第　4 周	课　次	第 7,8 次	
章　节 名　称	**§5.3　定积分的积分法**			
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）		教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：使学生熟练掌握定积分换元积分法与分部积分法。 2，能力目标：掌握定积分的计算方法。 3，素养目标：具备科学的学习态度。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神			
教　学 方　法	讲授			
教　学 重　点 难　点	重点：　定积分换元积分法 难点：　定积分换元积分法			

教学步骤及内容：

一、换元积分法

定理　假设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，函数 $x=\varphi(t)$满足条件：

(1)$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$在$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上具有连续导数，且其值域不越出$[a, b]$，

则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

证明　由假设知, $f(x)$在区间$[a, b]$上是连续, 因而是可积的; $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在区间$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上也是连续的, 因而是可积的.

假设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

另一方面, 因为$\{F[\varphi(t)]\}'=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, 所以$F[\varphi(t)]$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数, 从而

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

因此 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

注 1、 公式（1）叫做定积分的换元公式.

2、 积分上下限的变化。

例 1 计算$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$.　　$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$

解 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos tdt$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt\quad=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

提示: $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$, $dx=a\cos t$. 当$x=0$时$t=0$, 当$x=a$时$t=\frac{\pi}{2}$.

例 2 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$.

解 令$t=\cos x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x$$

$$\overset{令\cos x=t}{=\!=\!=}-\int_1^0 t^5dt=\int_0^1 t^5dt=[\frac{1}{6}t^6]_0^1=\frac{1}{6}.$$

提示: 当$x=0$时$t=1$, 当$x=\frac{\pi}{2}$时$t=0$.

或 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xd\cos x$$

$$=-[\frac{1}{6}\cos^6 x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{6}\cos^6\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\cos^6 0=\frac{1}{6}.$$

例 3 计算$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

解: $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}\overset{\sqrt[3]{x}=t}{=}\int_0^1\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int_0^1(t-1+\frac{1}{1+t})dt$

$$=3[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|]|_0^1=3\ln 2-\frac{3}{2}$$

例 4 计算$\int_0^\pi\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.

解 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x$

$=[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}-(-\frac{2}{5})=\frac{4}{5}$.

提示: $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|$.

在$[0,\frac{\pi}{2}]$上$|\cos x|=\cos x$, 在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上$|\cos x|=-\cos x$.

例 5 计算$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$.

解 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx \xlongequal{令\sqrt{2x+1}=t} \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot tdt=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)dt$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3+3t]_1^3=\frac{1}{2}[(\frac{27}{3}+9)-(\frac{1}{3}+3)]=\frac{22}{3}$.

提示: $x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=tdt$; 当 $x=0$ 时 $t=1$, 当 $x=4$ 时 $t=3$.

例 6 证明:

注 2 若$f(x)$在$[-a, a]$上连续且为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

注 3 若$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数, 则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

证明 因为$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$,

而 $\int_{-a}^0 f(x)dx \xlongequal{令x=-t} -\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx$,

所以 $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx$

（1）若$f(x)$为偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，故

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a [f(-x)+f(x)]dx=\int_{-a}^a 2f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

（2）若$f(x)$为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，故

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a [-f(x)+f(x)]dx=0.$$

例 7 若$f(x)$在$[0,\pi]$上连续, 证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证明 (1)令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx .$$

(2)令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx ,$$

所以 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

例如：$\int_0^{\pi} x(\sin x - \sin^3 x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(\sin x - \sin^3 x)dx$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x(1-\sin^2 x)dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 x d\cos x = \frac{\pi}{3}$$

例 8 设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x} & -1<x<0 \end{cases}$，计算 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

解 设 $x-2=t$, 则

$$\int_1^4 f(x-2)dx = \int_{-1}^{2} f(t)dt = \int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\cos t}dt + \int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^{0} - [\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^2 = \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2} .$$

提示: 设 $x-2=t$, 则 $dx=dt$; 当 $x=1$ 时 $t=-1$, 当 $x=4$ 时 $t=2$.

练习：设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 1+x^2 & x<0 \end{cases}$，计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

解 设 $x-1=t$, 则 $dx=dt$; 当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $t=-\frac{1}{2}$；当 $x=2$ 时 $t=1$，于是

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt = \frac{37}{24} - \frac{1}{e}$$

二、分部积分法

定理 2 设 $u=u(x), v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad (2)$$

这就是定积分的分部积分公式.

证明：因为 $(uv)' = u'v + uv'$ $\quad \therefore \int_a^b (u'v + uv')dx = \left[uv\right]_a^b$

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = \left[uv\right]_a^b \quad \Rightarrow \int_a^b udv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b vdu$$

例 9 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$。

解：$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

$$= -x\ln x|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\frac{1}{x}dx + x\ln x|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2(1 - \frac{1}{e})$$

例 10 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

解 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xd\arcsin x$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例 11 求 $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$ 。

解：有积分上限函数的性质，有 $\quad f'(x) = e^{-(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{e^{-x}}{2(\sqrt{x})}$

又 $f(1) = 0$，令 $u = 2\sqrt{x}$， $du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$，故

$$I = \int_0^1 f(x)d(2\sqrt{x}) = [2\sqrt{x}f(x)]|_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x}f'(x)dx$$

$$= -2\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{e^{-x}}{2(\sqrt{x})}dx = -\int_0^1 e^{-x}dx = e^{-1} - 1$$

例 12 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$，证明

(1)当 n 为正偶数时，$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$；

(2)当 n 为大于 1 的正奇数时，$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$.

证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x$

$$=-[\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\sin^{n-1}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}xdx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

由此得 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

而 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$，

因此

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　5 周	课　次	第 9,10 次

章　节 名　称	第六章　定积分的应用		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：使学生熟练掌握计算平面图形的面积、平面曲线的弧长。 2，能力目标：掌握计算的技巧。 3，素养目标：具备科学的学习态度。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：计算平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积。 难点：　截面面积为已知的立体体积；引力。		

教学步骤及内容：

定积分是求某种总量的数学模型，它在几何学、物理学等方面有着十分广泛的应用，正是如此，积分学才不断发展和完善。

第一节　定积分的元素法

回忆曲边梯形的面积: 设 $y=f(x)\geq 0$ ($x\in[a, b]$). 如果说积分 $A=\int_a^b f(x)dx$ 是以$[a, b]$为底的曲边梯形的面积, 则积分上限函数 $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是以$[a, x]$为底的曲边梯形的面积. 而微分 $dA(x)=f(x)dx$ 表示点 x 处以 dx 为宽的小曲边梯形面积的近似值$\Delta A\approx f(x)dx$, $f(x)dx$ 称为曲边梯形的面积元素.

以$[a, b]$为底的曲边梯形的面积 A 就是以面积元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，以$[a, b]$为积分区间的定积分: $A=\int_a^b f(x)dx$.

一般情况下, 为求某一量 U, 先将此量分布在某一区间$[a, b]$上, 分布在$[a, x]$上的量用函数 $U(x)$表示, 再求这一量的元素 $dU(x)$, 设 $dU(x)=u(x)dx$, 然后以 $u(x)dx$ 为被积表达式, 以$[a, b]$为积分区间求定积分即得

$$U=\int_a^b f(x)dx.$$

用这一方法求一量的值的方法称为微元法(或元素法).

第二节　定积分在几何上的应用

一、平面图形的面积

1、直角坐标情形

由定积分的几何意义：$A=\int_a^b f(x)dx$；

若平面图形由曲线 $y=f(x)$)与 $y=g(x)$，且 $f(x)>g(x)$，直线 $x=a$ 与 $x=b$ $(a<b)$ 所围成, 则面积微元为 $dA=[f(x)-g(x)]dx$，于是平面图形的面积为 $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$；

若平面图形由曲线 $x=\varphi(y), x=\psi(y), (\varphi(y)>\psi(y))$，直线 $y=c$ 与 $y=d$ $(c<d)$ 所围成，则其面积微元 $dA=[\varphi(y)-\psi(y)]dy$，平面图形的面积为

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy$$

例 1 计算抛物线 $y=x^2, y=x$ 所围成的图形的面积.

解 (1)画图. $A=\int_0^1(x-x^2)dx=[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{6}$.

例 2 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解 (1)画图.

(2)确定在 y 轴上的投影区间: $[-2, 4]$.

(3)确定左右曲线: $\varphi_{左}(y)=\frac{1}{2}y^2$, $\varphi_{右}(y)=y+4$.

(4)计算积分

$$S=\int_{-2}^4(y+4-\frac{1}{2}y^2)dy=[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3]_{-2}^4=18.$$

当曲边梯形的曲边由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 给出，其中 $x=\varphi(t)$ 满足 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$ 上又连续的导数，$y=\psi(t)$ 连续，则根据曲边梯形的面积公式和定积分的换元法知，由 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积为

$$A=\int_a^b y(x)dx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt$$

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.

解 设整个椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍, 即 $A=4A_1$，椭圆的参数方程为:$x=a\cos t$, $y=b\sin t$,于是

$$S=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t)$$

$$=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2 tdt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=ab\pi.$$

（2）极坐标系下平面图形的面积

曲边扇形及曲边扇形的面积元素:

由曲线 $r=r(\theta)$及射线$\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 围成的图形称为曲边扇形,如何求此扇形的面积呢？

采用微元法,取极角θ为积分变量，其积分区间为$[\alpha,\beta]$，任取$[\alpha,\beta]$内小区间$[\theta,\theta+d\theta]$，其相应的小区边扇形的面积用半径为$r(\theta)$，中心角为$d\theta$的小圆扇形来近似代替，得面积元素为：$dA=\frac{1}{2}[r(\theta)]^2d\theta$.

所以，所求曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta dA=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[r(\theta)]^2d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

例 4. 计算阿基米德螺线 $r=a\theta$ $(a>0)$上相应于θ从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解: $S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2[\frac{1}{3}\theta^3]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3$.

例 5. 计算心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围成的图形的面积.

解: $S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta]^2d\theta=a^2\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)d\theta$

$=a^2[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta]_0^{\pi}=\frac{3}{2}a^2\pi$.

练习：求由圆$r=2\cos\theta, r=1$所围成的图形的面积（如图 4.18）.

解: 由对称性知，所求阴影部分面积为ox轴上方阴影部分面积的 2 倍。

面积元素为 $dA_1=\frac{1}{2}[(2\cos\theta)^2-1^2]d\theta$，所以所求的面积为

$$A=2A_1=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}dA_1=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}[(2\cos\theta)^2-1^2]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2\theta-1)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

二、体 积

1、 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.

常见的旋转体: 圆柱、圆锥、圆台、球体.

旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$ 、$a=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

设过区间$[a, b]$内点 x 且垂直于 x 轴的平面左侧的旋转体的体积为 $V(x)$, 当平面左右平移 dx 后, 体积的增量近似为$\Delta V=\pi[f(x)]^2dx$， 于是体积元素为

$dV=\pi[f(x)]^2dx$,

旋转体的体积为

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx\,.$$

例 6　连接坐标原点 O 及点 $P(h, r)$的直线、直线 $x=h$ 及 x 轴围成一个直角三角形. 将它绕 x 轴旋转构成一个底半径为 r、高为 h 的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解: 直角三角形斜边的直线方程为 $y=\frac{r}{h}x$.

所求圆锥体的体积为

$$V=\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}[\frac{1}{3}x^3]_0^h=\frac{1}{3}\pi h r^2\,.$$

例 7. 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体(旋转椭球体)的体积.

解: 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体. 体积元素为

$dV=\pi y^2 dx$,

于是所求旋转椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^a \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}[a^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-a}^a=\frac{4}{3}\pi ab^2\,.$$

例 8 计算由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱, 直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　所给图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2 dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$=5\pi^2 a^3.$$

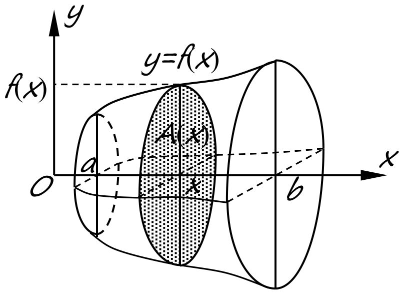
所给图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是两个旋转体体积的差. 设曲线左半边为 $x=x_1(y)$、右半边为 $x=x_2(y)$. 则

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)dy-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)dy$$

$$=\pi\int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt-\pi\int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t dt$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t dt=6\pi^3 a^3\,.$$

2、平行截面面积为已知的立体的体积



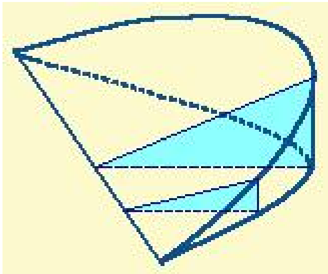
设立体在 x 轴的投影区间为$[a, b]$, 过点 x 且垂直于 x 轴的平面与立体相截, 截面面积为 $A(x)$, 则体积元素为 $A(x)dx$, 立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx\,.$$

例 9 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面

交成角α. 计算这平面截圆柱所得立体的体积.

解: 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴, 底面上过圆中心、且垂直于 x 轴的直线为 y 轴. 那么底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形. 两个直角边分别为 $\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$. 因而截面积为 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$. 于是所求的立体体积为



$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{1}{2}\tan\alpha[R^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

例 10. 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解: 取底圆所在的平面为 xOy 平面, 圆心为原点, 并使 x 轴与正劈锥的顶平行. 底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 过 x 轴上的点 x $(-R<x<R)$作垂直于 x 轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

$$A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2}.$$

于是所求正劈锥体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}h\sqrt{R^2-x^2}dx=2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\pi R^2h.$$

3、平面曲线的弧长

设 A, B 是曲线弧上的两个端点. 在弧 AB 上任取分点 $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$, 并依次连接相邻的分点得一内接折线. 当分点的数目无限增加且每个小段 $M_{i-1}M_i$ 都缩向一点时, 如果此折线的长 $\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$ 的极限存在, 则称此极限为曲线弧 AB 的弧长, 并称此曲线弧 AB 是可求长的.

定理 光滑曲线弧是可求长的.

(1). 直角坐标情形

设曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x)\quad (a\le x\le b)$$

给出, 其中 $f(x)$在区间$[a, b]$上具有一阶连续导数. 现在来计算这曲线弧的长度.

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为$[a, b]$. 曲线 $y=f(x)$上相应于$[a, b]$上任一小区间$[x, x+dx]$的一段弧的长度, 可以用该曲线在点$(x, f(x))$处的切线上相应的一小段的长度来近似代替. 而切线上这相应的小段的长度为

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx,$$

从而得弧长元素(即弧微分)

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

以 $\sqrt{1+y'^2}dx$ 为被积表达式, 在闭区间$[a, b]$上作定积分, 便得所求的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.$$

在曲率一节中，我们已经知道弧微分的表达式为 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$，这也就是弧长元素. 因此

例 11 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.

解：$y'=x^{\frac{1}{2}}$，从而弧长元素

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x}dx.$$

因此，所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}]_a^b=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例 12. 计算悬链线 $y=c\mathrm{ch}\frac{x}{c}$ 上介于 $x=-b$ 与 $x=b$ 之间一段弧的长度.

解：$y'=\mathrm{sh}\frac{x}{c}$，从而弧长元素为

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}dx=\mathrm{ch}\frac{x}{c}dx.$$

因此，所求弧长为

$$s=\int_{-b}^b\mathrm{ch}\frac{x}{c}dx=2\int_0^b\mathrm{ch}\frac{x}{c}dx=2c[\mathrm{sh}\frac{x}{c}dx]_0^b=2c\mathrm{sh}\frac{b}{c}.$$

（2）参数方程情形

设曲线弧由参数方程 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ ($\alpha\le t\le\beta$)给出，其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数. 因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$dx=\varphi'(t)dt$，所以弧长元素为

$$ds=\sqrt{1+\frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}}\varphi'(t)dt=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

例 13. 计算摆线 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$的一拱($0\le\theta\le2\pi$)的长度.

解：弧长元素为

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta.$$

所求弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a[-2\cos\frac{\theta}{2}]_0^{2\pi}=8a.$$

（3）极坐标情形

设曲线弧由极坐标方程

$$r=r(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$$

给出，其中 $r(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数. 由直角坐标与极坐标的关系可得

$x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$($\alpha\le\theta\le\beta$).

于是得弧长元素为

$$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

从而所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

例 14. 求阿基米德螺线$\rho=a\theta\,(a>0)$相应于θ 从 0 到 2π 一段的弧长.

解: 弧长元素为

$$ds=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}d\theta.$$

于是所求弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].$$

§6. 3 定积分在物理上的应用

一、变力沿直线所作的功

例 1 把一个带$+q$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处, 它产生一个电场. 这个电场对周围的电荷有作用力. 由物理学知道, 如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方, 那么电场对它的作用力的大小为

$$F=k\frac{q}{r^2}\quad (k \text{ 是常数}).$$

当这个单位正电荷在电场中从 $r=a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b(a<b)$处时, 计算电场力 F 对它所作的功.

例 1′ 电量为$+q$ 的点电荷位于 r 轴的坐标原点 O 处它所产生的电场力使 r 轴上的一个单位正电荷从 $r=a$ 处移动到 $r=b(a<b)$处求电场力对单位正电荷所作的功.

提示: 由物理学知道, 在电量为$+q$ 的点电荷所产生的电场中, 距离点电荷 r 处的单位正电荷所受到的电场力的大小为$F=k\frac{q}{r^2}$ (k 是常数).

解: 在 r 轴上, 当单位正电荷从 r 移动到 $r+dr$ 时,

电场力对它所作的功近似为$k\frac{q}{r^2}dr$,

即功元素为$dW=k\frac{q}{r^2}dr$.

于是所求的功为

$$W=\int_a^b\frac{kq}{r^2}dr=kq[-\frac{1}{r}]_a^b=kq(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}).$$

例 2. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体. 在等温条件下, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个活塞(面积为 S)从点 a 处推移到点 b 处. 计算在移动过程中, 气体压力所作的功.

解: 取坐标系如图, 活塞的位置可以用坐标 x 来表示. 由物理学知道, 一定量的气体在等温条件下, 压强 p 与体积 V 的乘积是常数 k, 即

$$pV=k \text{ 或 } p=\frac{k}{V}.$$

解: 在点 x 处, 因为 $V=xS$, 所以作在活塞上的力为

$$F=p\cdot S=\frac{k}{xS}\cdot S=\frac{k}{x}.$$

当活塞从 x 移动到 $x+dx$ 时, 变力所作的功近似为 $\frac{k}{x}dx$,

即功元素为 $dW=\frac{k}{x}dx$.

于是所求的功为

$$W=\int_a^b\frac{k}{x}dx=k[\ln x]_a^b=k\ln\frac{b}{a} .$$

例 3. 一圆柱形的贮水桶高为 $5m$, 底圆半径为 $3m$, 桶内盛满了水. 试问要把桶内的水全部吸出需作多少功?

解: 作 x 轴如图. 取深度 x 为积分变量. 它的变化区间为[0, 5], 相应于[0, 5]上任小区间$[x, x+dx]$的一薄层水的高度为 dx. 水的比重为 9.8kN/m^3, 因此如 x 的单位为 m, 这薄层水的重力为 $9.8\pi\cdot 3^2dx$. 这薄层水吸出桶外需作的功近似地为

$$dW=88.2\pi x\cdot dx,$$

此即功元素. 于是所求的功为

$$W=\int_0^5 88.2\pi x dx=88.2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^5=88.2\pi\cdot\frac{25}{2}\text{ (kj)}.$$

二、水压力

从物理学知道, 在水深为 h 处的压强为 $p=\gamma h$, 这里 γ 是水的比重. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处, 那么, 平板一侧所受的水压力为

$$P=p\cdot A.$$

如果这个平板铅直放置在水中, 那么, 由于水深不同的点处压强 p 不相等, 所以平板所受水的压力就不能用上述方法计算.

例 4. 一个横放着的圆柱形水桶, 桶内盛有半桶水. 设桶的底半径为 R, 水的比重为 γ,
计算桶的一个端面上所受的压力.

解: 桶的一个端面是圆片, 与水接触的是下半圆. 取坐标系如图.

在水深 x 处于圆片上取一窄条, 其宽为 dx , 得压力元素为

$$dP=2\gamma x\sqrt{R^2-x^2}dx .$$

所求压力为

$$P=\int_0^R 2\gamma x\sqrt{R^2-x^2}dx=-\gamma\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2-x^2)$$

$$=-\gamma[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^R=\frac{2r}{3}R^3 .$$

三、引力

从物理学知道, 质量分别为 m_1、m_2, 相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2} ,$$

其中 G 为引力系数, 引力的方向沿着两质点连线方向.

如果要计算一根细棒对一个质点的引力, 那么, 由于细棒上各点与该质点的距离是变化的, 且各点对该质点的引力的方向也是变化的, 就不能用上述公式来计算.

例 5. 设有一长度为 l 、线密度为ρ的均匀细直棒, 在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M. 试计算该棒对质点 M 的引力.

例 5′. 求长度为 l、线密度为ρ的均匀细直棒对其中垂线上距棒 a 单位处质量为 m 的质点 M 的引

<table>
<tr><td colspan="2">力.
解: 取坐标系如图, 使棒位于 y 轴上, 质点 M 位于 x 轴上, 棒的中点为原点 O. 由对称性知, 引力在垂直方向上的分量为零, 所以只需求引力在水平方向的分量. 取 y 为积分变量, 它的变化区间为 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$. 在 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ 上 y 点取长为 dy 的一小段, 其质量为 ρdy, 与 M 相距 $r=\sqrt{a^2+y^2}$. 于是在水平方向上, 引力元素为
$$dF_x=G\frac{m\rho dy}{a^2+y^2}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+y^2}}=-G\frac{am\rho dy}{(a^2+y^2)^{3/2}}.$$
引力在水平方向的分量为
$$F_x=-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}G\frac{am\rho dy}{(a^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{2Gm\rho l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

授课时间	第　6 周	课　次	第　11,12 次
章　节 名　称	**第七章　微分方程**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：　微分方程的概念及可分离变量微分方程，齐次方程的解法。 2，能力目标：掌握微分方程的解法，熟练应用。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：微分方程的解法。 难点：各个公式的熟练应用。		

教学步骤及内容：

第一节　微分方程的基本概念

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究. 因此如何寻找出所需要的函数关系，在实践中具有重要意义. 在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的情况，有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式. 这样的关系就是所谓微分方程. 微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数来，这就是解微分方程.

例 1 一曲线通过点(1, 2)，且在该曲线上任一点 $M(x, y)$处的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$. 根据导数的几何意义，可知未知函数 $y=y(x)$应满足关系式(称为微分方程)

$$\frac{dy}{dx}=2x. \qquad (1)$$

此外，未知函数 $y=y(x)$还应满足下列条件:

$x=1$ 时, $y=2$，简记为 $y|_{x=1}=2$. (2)

把(1)式两端积分，得(称为微分方程的通解)

$$y=\int 2x dx，即\ y=x^2+C, \qquad (3)$$

其中 C 是任意常数.

把条件“$x=1$ 时, $y=2$”代入(3)式，得

$2=1^2+C$,

由此定出 $C=1$. 把 $C=1$ 代入(3)式，得所求曲线方程(称为微分方程满足条件 $y|_{x=1}=2$ 的解):

$y=x^2+1$.

例 2 列车在平直线路上以 20m/s(相当于 72km/h)的速度行驶；当制动时列车获得加速度$-0.4\mathrm{m/s^2}$. 问开始制动后多少时间列车才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程?

解 设列车在开始制动后 t 秒时行驶了 s 米. 根据题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4. \qquad (4)$$

此外，未知函数 $s=s(t)$还应满足下列条件：$t=0$ 时，$s=0$，$v=\frac{ds}{dt}=20$. 简记为 $s|_{t=0}=0$，$s'|_{t=0}=20$. (5)

把(4)式两端积分一次，得

$$v=\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1; \qquad (6)$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \qquad (7)$$

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

把条件 $v|_{t=0}=20$ 代入(6)得

$$20=C_1;$$

把条件 $s|_{t=0}=0$ 代入(7)得 $0=C_2$.

把 C_1, C_2 的值代入(6)及(7)式得

$$v=-0.4t+20, \qquad (8)$$

$$s=-0.2t^2+20t. \qquad (9)$$

在(8)式中令 $v=0$, 得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50\,(s).$$

再把 $t=50$ 代入(9), 得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(m).$$

解 设列车在开始制动后 t 秒时行驶了 s 米,

$$s''=-0.4, \text{ 并且 } s|_{t=0}=0, s'|_{t=0}=20.$$

把等式 $s''=-0.4$ 两端积分一次, 得

$$s'=-0.4t+C_1, \text{ 即 } v=-0.4t+C_1(C_1 \text{ 是任意常数}),$$

再积分一次, 得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2\ (C_1, C_2 \text{ 都 } C_1 \text{ 是任意常数}).$$

由 $v|_{t=0}=20$ 得 $20=C_1$, 于是 $v=-0.4t+20$;

由 $s|_{t=0}=0$ 得 $0=C_2$, 于是 $s=-0.2t^2+20t$.

令 $v=0$, 得 $t=50(s)$. 于是列车在制动阶段行驶的路程 $s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(m)$.

几个概念:

微分方程: 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程, 叫微分方程.

常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程, 叫常微分方程.

偏微分方程: 未知函数是多元函数的微分方程, 叫偏微分方程.

微分方程的阶: 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫微分方程的阶.

$$x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2,$$

$$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=\sin 2x,$$

$$y^{(n)}+1=0,$$

一般 n 阶微分方程:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0.$$

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

微分方程的解: 满足微分方程的函数(把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫做该微分方程的解. 确切地说, 设函数 $y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶连续导数, 如果在区间 I 上,

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)]=0,$$

那么函数 $y=\varphi(x)$就叫做微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解.

通解: 如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解叫做微分方程的通解.

初始条件: 用于确定通解中任意常数的条件, 称为初始条件. 如

$x=x_0$ 时, $y=y_0$, $y'=y'_0$.

一般写成

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0\ ,\ \ y'\Big|_{x=x_0}=y'_0\ .$$

特解: 确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解. 即不含任意常数的解.

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题.

如求微分方程 $y'=f(x,\ \ y)$满足初始条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题, 记为

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}.$$

积分曲线: 微分方程的解的图形是一条曲线, 叫做微分方程的积分曲线.

例 3 验证: 函数

$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$

是微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$$

的解.

解 求所给函数的导数:

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt\ ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\ .$$

将 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 及 x 的表达式代入所给方程, 得

$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+ k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$

这表明函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 满足方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$, 因此所给函数是所给方程的解.

例 4 已知函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt(k\neq 0)$是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$ 的通解, 求满足初始条件

$x|_{t=0}=A,\ x'|_{t=0}=0$

的特解.

解 由条件 $x|_{t=0}=A$ 及 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$, 得

$C_1=A$.

再由条件 $x'|_{t=0}=0$, 及 $x'(t)=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$, 得

$C_2=0$.

把 C_1、C_2 的值代入 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 中，得

$x=A\cos kt$.

第二节 可分离变量的微分方程

1. 求微分方程 $y'=2x$ 的通解. 为此把方程两边积分，得

$y=x^2+C$.

一般地，方程 $y'=f(x)$的通解为 $y=\int f(x)dx+C$ (此处积分后不再加任意常数).

2. 求微分方程 $y'=2xy^2$ 的通解.

因为 y 是未知的，所以积分 $\int 2xy^2dx$ 无法进行，方程两边直

接积分不能求出通解.

为求通解可将方程变为 $\frac{1}{y^2}dy=2xdx$，两边积分，得

$$-\frac{1}{y}=x^2+C\text{，或 }y=-\frac{1}{x^2+C}\text{，}$$

可以验证函数 $y=-\frac{1}{x^2+C}$ 是原方程的通解.

一般地，如果一阶微分方程 $y'=\varphi(x, y)$能写成

$$g(y)dy=f(x)dx$$

形式，则两边积分可得一个不含未知函数的导数的方程

$$G(y)=F(x)+C,$$

由方程 $G(y)=F(x)+C$ 所确定的隐函数就是原方程的通解

一阶微分方程有时也写成如下对称形式:

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$$

在这种方程中，变量 x 与 y 是对称的.

若把 x 看作自变量、y 看作未知函数，则当 $Q(x,y)\neq0$ 时，有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

若把 y 看作自变量、x 看作未知函数，则当 $P(x,y)\neq0$ 时，有

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy=f(x)dx \text{ (或写成 } y'=\varphi(x)\psi(y))$$

的形式, 就是说, 能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy, 另一端只含 x 的函数和 dx, 那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

讨论: 下列方程中哪些是可分离变量的微分方程?

(1) $y'=2xy$, 是. $\Rightarrow y^{-1}dy=2xdx$.

(2) $3x^2+5x-y'=0$, 是. $\Rightarrow dy=(3x^2+5x)dx$.

(3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$, 不是.

(4) $y'=1+x+y^2+xy^2$, 是. $\Rightarrow y'=(1+x)(1+y^2)$.

(5) $y'=10^{x+y}$, 是. $\Rightarrow 10^{-y}dy=10^x dx$.

(6) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. 不是.

可分离变量的微分方程的解法:

第一步 分离变量, 将方程写成 $g(y)dy=f(x)dx$ 的形式;

第二步 两端积分: $\int g(y)dy=\int f(x)dx$, 设积分后得 $G(y)=F(x)+C$;

第三步 求出由 $G(y)=F(x)+C$ 所确定的隐函数 $y=\Phi(x)$ 或 $x=\Psi(y)$

$G(y)=F(x)+C$, $y=\Phi(x)$ 或 $x=\Psi(y)$ 都是方程的通解, 其中 $G(y)=F(x)+C$ 称为隐式(通)解.

例 1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 此方程为可分离变量方程, 分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy=2xdx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 2xdx,$$

即 $\ln|y|=x^2+C_1$,

从而 $y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}$.

因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数, 把它记作 C, 便得所给方程的通解

$$y=Ce^{x^2}.$$

解 此方程为可分离变量方程, 分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy=2xdx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 2xdx,$$

即 $\ln|y|=x^2+\ln C$,

从而 $y=Ce^{x^2}$.

例 2 铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 t=0 时铀的含量为 M_0, 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律.

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$对时间 t 的导数 $\frac{dM}{dt}$.

由于铀的衰变速度与其含量成正比, 故得微分方程

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M,$$

其中$\lambda(\lambda>0)$是常数, λ前的曲面号表示当 t 增加时 M 单调减少. 即 $\frac{dM}{dt}<0$.

由题意, 初始条件为

$$M|_{t=0}=M_0.$$

将方程分离变量得

$$\frac{dM}{M}=-\lambda dt.$$

两边积分, 得 $\int\frac{dM}{M}=\int(-\lambda)dt$,

即 $\ln M=-\lambda t+\ln C$, 也即 $M=Ce^{-\lambda t}$.

由初始条件, 得 $M_0=Ce^0=C$,

所以铀含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律 $M=M_0e^{-\lambda t}$.

例 3 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时速度为零. 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞所受外力为 $F=mg-kv$(k 为比例系数). 根据牛顿第二运动定律 $F=ma$, 得函数 $v(t)$应满足的方程为

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv,$$

初始条件为

$$v|_{t=0}=0.$$

方程分离变量, 得

$$\frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m},$$

两边积分, 得 $\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$,

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1,$$

即 $v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}$ $(C=-\frac{e^{-kC_1}}{k})$,

将初始条件 $v|_{t=0}=0$ 代入通解得 $C=-\dfrac{mg}{k}$,

于是降落伞下落速度与时间的函数关系为 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

例 4 有高为 1m 的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面面积为 1cm^2. 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面高度 h 随时间 t 变化的规律.

解 由水力学知道, 水从孔口流出的流量 Q 可用下列公式计算:

$$Q=\frac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh}\ ,$$

其中 0. 62 为流量系数, S 为孔口横截面面积, g 为重力加速度. 现在孔口横截面面积 S=1cm^2, 故

$$\frac{dV}{dt}=0.62\sqrt{2gh}\ ,\ 或\ dV=0.62\sqrt{2gh}dt\ .$$

另一方面, 设在微小时间间隔$[t, t+\mathrm{d}t]$内, 水面高度由 h 降至 $h+dh(dh<0)$, 则又可得到

$$dV=-\pi r^2 dh,$$

其中 r 是时刻 t 的水面半径, 右端置负号是由于 dh<0 而 dV>0 的缘故. 又因

$$r=\sqrt{100^2-(100-h)^2}=\sqrt{200h-h^2}\ ,$$

所以 $dV=-\pi(200h-h^2)dh.$

通过比较得到

$$0.62\sqrt{2gh}dt=-\pi(200h-h^2)dh\ ,$$

这就是未知函数 $h=h(t)$应满足的微分方程.

此外, 开始时容器内的水是满的, 所以未知函数 $h=h(t)$还应满足下列初始条件:

$$h|_{t=0}=100.$$

将方程 $0.62\sqrt{2gh}dt=-\pi(200h-h^2)dh$ 分离变量后得

$$dt=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh\ .$$

两端积分, 得

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\int(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh\ ,$$

即 $$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}})+C\ ,$$

其中 C 是任意常数.

由初始条件得 $$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(\frac{400}{3}\times100^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\times100^{\frac{5}{2}})+C\ ,$$

$$C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(\frac{400000}{3}-\frac{200000}{5})=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times 10^5 .$$

因此 $$t=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(7\times 10^5-10^3 h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}) .$$

上式表达了水从小孔流出的过程中容器内水面高度 h 与时间 t 之间的函数关系.

第三节 齐次方程

齐次方程:

如果一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 中的函数 $f(x, y)$可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数, 即 $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})$, 则称这方程为齐次方程.

下列方程哪些是齐次方程?

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$ 是齐次方程. $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{(\frac{y}{x})^2-1}$.

(2) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$ 不是齐次方程. $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

(3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$ 是齐次方程. $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

(4) $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 不是齐次方程. $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y-4}{x+y-1}$.

(5) $(2x\,\mathrm{sh}\frac{y}{x}+3y\,\mathrm{ch}\frac{y}{x})dx-3x\,\mathrm{ch}\frac{y}{x}dy=0$ 是齐次方程.

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x\,\mathrm{sh}\frac{y}{x}+3y\,\mathrm{ch}\frac{y}{x}}{3x\,\mathrm{ch}\frac{y}{x}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\mathrm{th}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$$

齐次方程的解法:

在齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 中, 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=ux$, 有

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u) ,$$

分离变量, 得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} .$$

两端积分，得 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$.

求出积分后，再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得所给齐次方程的通解.

例 1　解方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

解　原方程可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1},$$

因此原方程是齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，则

$$y=ux,\quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即 $$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量，得

$$(1-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}.$$

两边积分，得 $u-\ln|u|+C=\ln|x|$,

或写成 $\ln|xu|=u+C$.

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u，便得所给方程的通解

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C.$$

例 2 有旋转曲面形状的凹镜，假设由旋转轴上一点 O 发出的一切光线经此凹镜反射后都与旋转轴平行. 求这旋转曲面的方程.

解　设此凹镜是由xOy面上曲线L: $y=y(x)(y>0)$绕x轴旋转而成，光源在原点. 在L上任取一点$M(x, y)$，作L的切线交x轴于A. 点O发出的光线经点M反射后是一条平行于x轴射线. 由光学及几何原理可以证明$OA=OM$，因为 $OA=AP-OP=PM\cot\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x$,

而 $OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

于是得微分方程 $\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$,

整理得 $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$. 这是齐次方程.

问题归结为解齐次方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$.

令 $\frac{x}{y}=v$, 即$x=yv$, 得 $v+y\frac{dv}{dy}=v+\sqrt{v^2+1}$,

即 $y\frac{dv}{dy}=\sqrt{v^2+1}$,

分离变量, 得 $\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\frac{dy}{y}$,

两边积分, 得 $\ln(v+\sqrt{v^2+1})=\ln y-\ln C$, $\Rightarrow v+\sqrt{v^2+1}=\frac{y}{C}$, $\Rightarrow (\frac{y}{C}-v)^2=v^2+1$,

$\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1$,

以 $yv=x$ 代入上式, 得 $y^2=2C(x+\frac{C}{2})$.

这是以 x 轴为轴、焦点在原点的抛物线, 它绕 x 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$y^2+z^2=2C(x+\frac{C}{2}) .$$

这就是所求的旋转曲面方程.

复习思考题、作业题:

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　7 周	课　次	第 13,14 次
章　节 名　称	**第七章　微分方程**		

授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：　一阶线性微分方程，可降阶的微分方程的解法。 2，能力目标：熟练掌握一阶线性微分方程及可降阶微分方程的解法，熟练应用。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：两个微分方程的解法。 难点：各个公式的熟练应用。		

教学步骤及内容：

第四节　一阶线性微分方程

线性方程:

方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 叫做一阶线性微分方程.

如果 $Q(x)\equiv 0$, 则方程称为齐次线性方程, 否则方程称为非齐次线性方程.

方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 叫做对应于非齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的齐次线性方程.

下列方程各是什么类型方程？

(1) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=0$ 是齐次线性方程.

(2) $3x^2+5x-5y'=0\Rightarrow y'=3x^2+5x$, 是非齐次线性方程.

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$, 是非齐次线性方程.

(4) $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$, 不是线性方程.

(5) $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{x^3}{(y+1)^2}=0$ 或 $\frac{dx}{dy}-\frac{(y+1)^2}{x^3}$, 不是线性方程.

齐次线性方程的解法:

齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 是变量可分离方程. 分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1,$$

或 $$y=Ce^{-\int P(x)dx}\ (C=\pm e^{C_1}),$$

这就是齐次线性方程的通解（积分中不再加任意常数）.

例 1 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 这是一个非齐次线性方程.

先求对应的齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$ 的通解.

分离变量得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$

两边积分得

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$

齐次线性方程的通解为

$y=C(x+1)^2$. 用常数变易法. 把 C 换成 u，即令 $y=u\cdot(x+1)^2$，代入所给非齐次线性方程，得

$$u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)-\frac{2}{x+1}u\cdot(x+1)^2=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

两边积分，得

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

再把上式代入 $y=u(x+1)^2$ 中，即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$

解：这里 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

因为 $$\int P(x)dx=\int(-\frac{2}{x+1})dx=-2\ln(x+1),$$

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{2\ln(x+1)}=(x+1)^2,$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int(x+1)^{\frac{5}{2}}(x+1)^{-2}dx=\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}},$$

所以通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$

例 2 有一个电路如图所示，其中电源电动势为 $E=E_m\sin\omega t$(E_m、ω都是常数)，电阻 R 和电感 L 都是常量. 求电流 $i(t)$.

解 由电学知道，当电流变化时，L 上有感应电动势 $-L\frac{di}{dt}$. 由回路电压定律得出

$$E-L\frac{di}{dt}-iR=0,$$

即 $$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}.$$

把 $E=E_m\sin\omega t$ 代入上式，得

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t.$$

初始条件为 $i|_{t=0}=0$.

方程 $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$ 为非齐次线性方程，其中

$$P(t)=\frac{R}{L},\quad Q(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t.$$

由通解公式，得

$$i(t)=e^{-\int P(t)dt}[\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C]=e^{-\int\frac{R}{L}dt}(\int\frac{E_m}{L}\sin\omega te^{\int\frac{R}{L}dt}dt+C)$$

$$=\frac{E_m}{L}e^{-\frac{R}{L}t}(\int\sin\omega te^{\frac{R}{L}t}dt+C)$$

$$=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

其中 C 为任意常数.

将初始条件 $i|_{t=0}=0$ 代入通解，得 $C=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}$,

因此，所求函数 $i(t)$为

$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

第五节 可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

解法: 积分 n 次

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx+C_1]dx+C_2,$$

$\cdots$.

例 1 求微分方程 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解.

解 对所给方程接连积分三次, 得

$$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1,$$

$$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

这就是所给方程的通解.

或 $$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+2C_1,$$

$$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+2C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3,$$

这就是所给方程的通解.

例 2 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线运动. 设力 F 仅是时间 t 的函数:$F=F(t)$. 在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$, 随着时间 t 的增大, 此力 F 均匀地减小, 直到 $t=T$ 时, $F(T)=0$. 如果开始时质点位于原点, 且初速度为零, 求这质点的运动规律.

解 设 $x=x(t)$表示在时刻 t 时质点的位置, 根据牛顿第二定律, 质点运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t).$$

由题设, 力 $F(t)$随 t 增大而均匀地减小, 且 $t=0$ 时, $F(0)=F_0$, 所以 $F(t)=F_0-kt$; 又当 $t=T$ 时, $F(T)=0$, 从而

$$F(t)=F_0(1-\frac{t}{T}).$$

于是质点运动的微分方程又写为 $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T})$,

其初始条件为 $x|_{t=0}=0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

把微分方程两边积分, 得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1.$$

再积分一次, 得

$$x=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{t^3}{6T})+C_1t+C_2.$$

由初始条件 $x|_{t=0}=0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$,

得 $C_1=C_2=0$.

于是所求质点的运动规律为

$$x=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{t^3}{6T}),\ 0\le t\le T.$$

解 设 $x=x(t)$表示在时刻 t 时质点的位置,

根据牛顿第二定律, 质点运动的微分方程为

$$mx''=F(t).$$

由题设, $F(t)$是线性函数, 且过点$(0, F_0)$和$(T, 0)$,

故 $\frac{F(t)}{F_0}+\frac{t}{T}=1$, 即 $F(t)=F_0(1-\frac{t}{T})$.

于是质点运动的微分方程又写为

$$x''=\frac{F_0}{m}(1-\frac{t}{T}).$$

其初始条件为 $x|_{t=0}=0,\ x'|_{t=0}=0$.

把微分方程两边积分, 得

$$x'=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1,$$

再积分一次, 得

$$x=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{t^3}{6T})+C_2,$$

由初始条件 $x|_{t=0}=0,\ x'|_{t=0}=0$,

得 $C_1=C_2=0$.

于是所求质点的运动规律为

$$x=\frac{F_0}{m}(\frac{1}{2}t^2-\frac{t^3}{6T}),\ 0\le t\le T.$$

二、$y''=f(x, y')$型的微分方程

解法: 设 $y'=p$ 则方程化为

$$p'=f(x, p).$$

设 $p'=f(x, p)$的通解为 $p=\varphi(x,C_1)$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1).$$

原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

例 3 求微分方程

$$(1+x^2)y''=2xy'$$

满足初始条件

$$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3$$

的特解.

解 所给方程是 $y''=f(x, y')$型的. 设 $y'=p$, 代入方程并分离变量后, 有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

两边积分，得

$\ln|p|=\ln(1+x^2)+C$,

即　　$p=y'=C_1(1+x^2)$　$(C_1=\pm e^C)$.

由条件 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$,

所以　　$y'=3(1+x^2)$.

两边再积分，得 $y=x^3+3x+C_2$.

又由条件 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$,

于是所求的特解为

$y=x^3+3x+1$.

三、$y''=f(y, y')$型的微分方程

解法：设 $y'=p$,有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

设方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 的通解为 $y'=p=\varphi(y, C_1)$，则原方程的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例 5 求微分 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解 设 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,

代入方程，得

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0.$$

在 $y\neq0$、$p\neq0$ 时，约去 p 并分离变量，得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}.$$

两边积分得

$\ln|p|=\ln|y|+\ln c$,

即　　$p=Cy$ 或 $y'=Cy(C=\pm c)$.

再分离变量并两边积分，便得原方程的通解为

$\ln\|y\|=Cx+\ln c_1$, 或 $y=C_1e^{Cx}$ $(C_1=\pm c_1)$. 例 5 求微分 $yy''-y'^2=0$ 的通解. 解 设 $y'=p$, 则原方程化为 $$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0,$$ 当 $y\neq0$、$p\neq0$ 时, 有 $$\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p=0,$$ 于是 $p=e^{\int\frac{1}{y}dy}=C_1y$, 即 $y'-C_1y=0$, 从而原方程的通解为 $$y=C_2e^{\int C_1dx}=C_2e^{C_1x}.$$
复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 8 周	课 次	第 15 次
章 节 名 称	**§ 9.1 多元函数的基本概念**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1，知识目标： 掌握关于多元函数的区域、极限以及多元函数概念，掌握多元函数的连续性定理，能够判断多元函数的连续性，能够求出连续函数在连续点的极限。 2，能力目标：掌握多元与一元的区别，熟练应用。		

	3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神
教 学 方 法	讲授
教 学 重 点 难 点	重点：多元函数概念和极限，多元函数的连续性定理。 难点： 计算多元函数的极限。

教学步骤及内容：

一、多元函数的概念

讨论一元函数时，经常用到邻域和区间的概念。由于讨论多元函数的需要，我们首先把邻域和区间概念加以推广，同时还要涉及其它一些概念。

1．邻域

设 $p_0(x_0,y_0)$ 是 xoy 平面上的一个点，δ 是某一正数。与点 $p_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $p(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(P_0)$ 或 $U(P_0,\delta)$，即 $U(P_0,\delta)=\{P\,\|PP_0|<\delta\}$，

也就是 $U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$。

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xoy 平面以上点 $p_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体。

如果去掉领域的中心，称为点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $U_\delta^0(P_0)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，即 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}$.

注: 如果不需要强调邻域的半径 δ, 则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域, 点 P_0 的去心邻域记作 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

2．区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点。如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点（画图 6-1 显示）。显然，E 的内点属于 E。

如果 E 的点都是内点，则称 E 为开集。例如，点集

$E_1=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集。

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点（图 6-2 显示）。E 的边界点的全体称为 E 的边界。例如上例中，E_1

的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$。

设 E 是开集。如果对于 E 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称开集 E 是连通的。

连通的开集称为区域或开区域。例如，$\{(x,y)|x+y>0\}$ 及 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域。

开区域连同它的边界一起，称为闭区域，例如

$$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}\text{及}\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域。

对于点集 E，如果存在正数 K，使一切点 $P\in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K，即

$$|AP|\leqslant k,\ \text{对一切}\ P\in E\ \text{成立},$$

则称 E 为有界点集，否则称为无界点集。例如，$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域，$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是无界开区域。

3． n 维空间

我们知道，数轴上的点与实数有一一对应关系，从而实数全体表示数轴上一切点的集合，即直线。在平面上引入直角坐标系后，平面上的点与二元数组 (x,y) 一一对应，从而二元数组 (x,y) 全体表示平面上一切点的集合，即平面。在空间引入直角坐标系后，空间的点与三元数组（x,y,z）一一对应，从而三元数组（x,y,z）全体表示空间一切点的集合，即空间。一般地，设 n 为取定的一个自然数，我们称 n 元数组（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）的全体为 n 维空间，而每个 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标。n 维空间记为 R^n。

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}\text{。}$$

容易验知，当 n=1，2，3 时，由上式便得解析几何中关于直线（数轴），平面，空间内两点的距离。

前面就平面点集来陈述的一系列概念，可推广到 n 维空间中去。例如，设 $P_0\in R^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta,P\in R^n\}$$

就定义为点 P_0 的 δ 邻域。以邻域概念为基础，可定义内点、边界点、区域、聚点等一系列概念。

4、二元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h。$$

这里，当 r 、 h 在集合 $\{(r,h)|r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就随之确定。

例 2 一定量的理想气体的压强 p 、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数。这里，当 V 、 T 在集合 $\{(V,T)|V>0,T>0\}$ 时， p 的对应值就随之确定。

例 3 设 R 是电阻 R_1 、 R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间具有关系 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，对应值就随之确定。

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，抽象出这些共性就可得出以下二元函数的定义。

定义 1　设 D 是平面上的一个点集。如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x、y 的二元函数（或点 P 的函数），记为 $z=f(x,y)$（或 $z=f(P)$）。点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 也称为因变量。数集 $\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的值域。

z 是 x,y 的函数也可记为 $z=z(x,y)$， $z=\Phi(x,y)$ 等等。

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数。一般的，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，则可类似地可以定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 。n 元函数也可简记为 $u=f(P)$，这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ 。当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数。当 $n\geq 2$ 时，n 元函数就统称为多元函数。

关于多元函数定义域，与一元函数类似，我们作如下约定：在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时，就以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域。例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x+y)|x+y>0\}$（如图），就是一个无界开区域；又如，

$z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x+y)|x^2+y^2\le 1\}$（如图），这是一个闭区域。

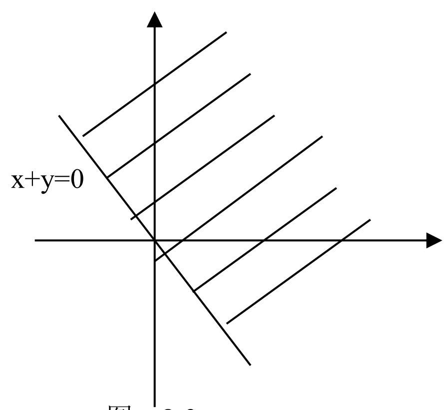


图 8-3

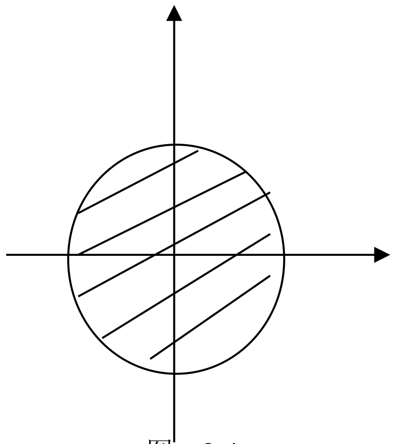


图 8-4

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D。对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$。这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$。当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形（图 8-5）。通常我们也说二元函数的图形是一张曲面。

例如，由空间解析几何知道，线形函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面；由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在圆点、半径的为 a 球面，它的定义域是圆形闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$。 在 D 的内部任一点 (x,y) 处，这函数有两个对应值，一个为 $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，另一个为— $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$。因此，这是多值函数。我们把它分成两个单值函数：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，前者表示上半球面，后者表示下半球面。以后除了对多元函数另做声明外，总假定所讨论的函数是单值的；如果遇到多值函数，可以把它拆成几个单值函数后再分别加以讨论。

二、二元函数的极限

我们先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限。

这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$。

与一元函数的极限概念类似，如果在$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的过程中，对应的函数值$f(x,y)$无限接近一个确定的常数A，我们就说 A 是函数$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限。下面用“$\varepsilon-\delta$”语言描述这个极限概念。

定义 2　设函数$f(x,y)$在区域D内有定义，$P_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点，A是常数。如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点$P(x,y)\in D$，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数A为函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的（二重）极限，记作　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，

或　　$f(x,y)\to A$（$P\to P_0$）。

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限。

例 4　设$f(x,y)=\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$，（$x^2+y^2\neq 0$），求证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$。

证　因为 $|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 5\sqrt{x^2+y^2}$，所以，对任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5},$，则当$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$时，总有

$|f(x,y)-0|\le\varepsilon,$所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=0$　。

我们必须注意，所谓二重极限存在，是指$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x,y)$时，函数都无限接近于 A。因此，如果$P(x,y)$以某一种特殊方式，例如沿着一条直线或定曲线趋于$P_0(x,y)$时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在。但是反过来，如果当$P(x,y)$以不同方式趋于$P_0(x,y)$时，函数趋于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在。下面用例子来说明这种情形。

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

显然，当点$P(x,y)$沿x轴趋于点$(0,0)$时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$；又当点$P(x,y)$沿$y$轴

趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$。

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等,但是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 并不存在．这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2y^2}=\frac{k}{1+k^2}。$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的.

以上关于二元函数的极限概念,可相应的推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去。

关于多元函数极限的运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 5　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解：这里 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\big|x<0\}$ 和区域 $D_2=\{(x,y)\big|x>0\}$ 内都有定义，$P_0(0,2)$ 同时为 D_1 及 D_2 的边界点。但无论在 D_1 内还是在 D_2 内考虑，下列运算都是正确的：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2} y=1\cdot 2=2。$$

例 5　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解：$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2。$$

例 6　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解：$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}.}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}[\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}]^2\cdot\frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}}=1\cdot 0=0$$

三、二元函数的连续性

明白了函数极限的概念，就不难说明多元函数的连续性。

定义 3 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点且 $P_0\in D$。如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续。

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点连续，那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 内的连续函数。

以上关于二元函数的连续性概念，可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去。

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的间断点。这里顺便指出：如果在区域 D 内某些孤立点，或者沿 D 内某些曲线，函数 $f(x,y)$ 没有定义，但在 D 内其余部分都有定义，那么这些孤立点或这些曲线上的点，都是函数 $f(x,y)$ 的不连续点，即间断点。

前面已经讨论过的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限不存在，所以点 $(0,0)$ 是该函数的一个间断点。二元函数的间断点可以形成一条曲线，例如函数

$$z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是间断点。

与闭区域上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质。

性质 1（最大值和最小值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上一定有最大值和最小值。这就是说，在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值，即对于一切 P∈D, 有

$$f(P_2)\le f(P)\le f(P_1).$$

性质 2（介值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值，

则它在D上取得介于这两个值之间的任何值至少一次。特殊地，如果μ是函数在D上的最小值m和最大值M之间的一个数，则在D上至少有一点Q，使得$f(Q)=\mu$。

一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则， 可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数。多元连续函数的复合函数也是连续函数。

与一元的初等函数相类似，多元初等函数是可用一个式子所表示的多元函数，而这个式子是由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的（这里指出，基本初等函数是一元函数，在构成多元初等函数时，它必须与多元函数复合）。例如，

$$\frac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$$

是两个多项式之商，它是多元初等函数。又例如$\sin(x+y)$是由基本初等函数$\sin\mu$与多项式$\mu=x+y$复合而成的，它也是多元初等函数。

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合的连续性，再考虑到多元多项式及基本初等函数的连续性，我们进一步可以得出如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域。

由多元初等函数的连续性，如果要求它在点P_0处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 7 求$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$是初等函数，它的定义域为$D=\{(x,y)|x\neq0,y\neq0\}$。

因D不是连通的，故D不是区域。但$D_1=\{(x,y)|x>0,y>0\}$是区域，且$D_1\subset D$ ，所以D是函数$f(x,y)$的一个定义区域。因$P_0(1,2)\in D_1$，故

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

如果这里不引进区域D_1，也可用下述方法判定函数$f(x,y)$在点$P_0(1,2)$ 处是连续的：因P_0是$f(x,y)$的定义域D的内点，故存在P_0的某一邻域$U(P_0)\subset D$，而任何邻域都是区域，所以$U(P_0)$是$f(x,y)$的一个定义区域，又由于$f(x,y)$是初等函数，因此$f(x,y)$在点P_0处连续。

一般地，求$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$，如果$f(P)$是初等函数，且$P_0$是$f(P)$的定义域的内点，则$f(P)$ 在点P_0处连续，于是$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$。

例 8 求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解：函数$f(x,y)=\dfrac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是初等函数，而点$P_0(1,0)$在其定义域内，所以$f(x,y)$在点$P_0$处连续。

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\cos(x-e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=1.$$

小结：本节在一元函数的基础上，讨论多元函数的基本概念。讨论中我们以二元函数为主，针对二元函数的极限及连续予以重点介绍。从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　8 周	课　次	第 16 次
章　节 名　称	**§9.2　偏导数**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2

教　学 目　的 要　求	1，知识目标： 偏导数的定义，判断二元函数偏导数的存在性，计算二元、多元函数的偏导数。 2，能力目标：能熟练求多元函数的偏导数。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神
教　学 方　法	讲授
教　学 重　点 难　点	重点：偏导数的定义，判断二元函数偏导数的存在性，计算二元、多元函数的偏导数。 难点： 判断二元函数偏导数的存在性，计算多元函数的偏导数。

教学步骤及内容：

一、导数的定义

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数概念。对于多元函数同样需要讨论它的变化率。但多元函数的自变量不止一个，因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多。在这一节里，我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率。以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看作常量），这时它就是 x 的一元函数，这函数对 x 的导数，就称为二元函数 z 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义　设函数 $z = f\ (x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有关于 x 的偏增量，记为 Δz_x，即

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

如果　$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad f_x\,(x_0, y_0)$$

即　$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

类似地，函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \qquad (2)$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ ，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ ，$z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$

于 E 。如果函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x、y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ，z_x 或 $f_x(x,y)$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作

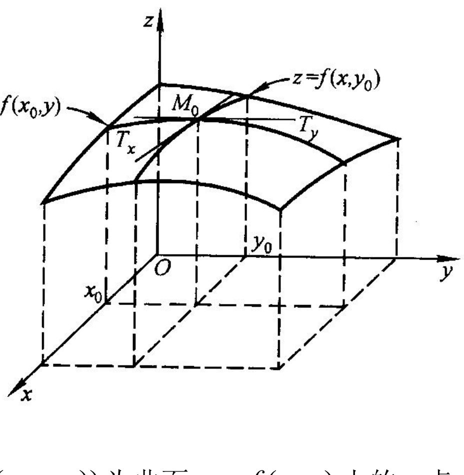
$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y \quad 或 \quad f_y(x,y)$$

偏导数的概念还可以推广到二元以上的函数。例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

其中 (x,y,z)是函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域的内点。它们的求法也仍旧是一元函数的微分法问题。

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数有下述几何意义。



设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$，则导数 $\frac{d}{dx}f(x,y_0)|_{x=x_0}$， 即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率（见图 8-6）。同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义

是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率。

我们已经知道，如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续。但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续。这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$,但不能保证点 P 按任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$ 。例如，函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点（0，0）对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同样有

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

但是我们在第一节中已经知道这函数在点（0，0）并不连续。

二、偏导数的计算

由偏导数的概念可知，$f\ (x,y)$ 在点处对 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x\ (x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数 $f_x\ (x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f_y\ (x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y\ (x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值。就象一元函数的导函数一样，以后在不至于混淆的地方也把偏导函数简称为偏导数。

至于实际求 $z=f(x,y)$ 的偏导数，并不需要用新的方法，因为这里只有一个自变量在变动，另一个自变量是看作固定的，所以仍就是一元函数的微分法问题。求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数；求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量而对 y 求导数。

例 1 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1, 2)处的偏导数。

解 把 y 看作常量，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$

把 x 看作常量，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

将 (1, 2)代入上面的结果，就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\cdot 1+3\cdot 2=8，\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\cdot 1+2\cdot 2=7。$$

例 2　求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$

例 3 设 $z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$,求证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$

证　因为，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$。

所以　$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2z$

例 4 求 $u=x^{\frac{y}{z}}$.的偏导数。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$。

证　因为　$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$,

所以　$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z$

例 5　已知理想气体的状态方程 $pV=RT$ (R 为常量) ，求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证　因为　$p=\frac{RT}{V}$, $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$;　$V=\frac{RT}{p}$, $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$;

$T=\frac{pV}{R}$, $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$;

所以　$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$

三　高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)\ ,$$

那么在 D 内 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 都是 x，y 的函数。如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数。按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中第二、三个偏导数称为混合偏导数。同样可得三阶、四阶、以及 n 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

例 6　设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$。

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$ ，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$ ，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=18x^2-18xy$；

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6\ y$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 这不是偶然的。事实上，我们有下述定理。

定理　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关。这定理的证明从略。

对于二元以上的函数，我们也可以类似地定义高阶偏导数。而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关。

例 7 函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$， 求二阶偏导数。

解：由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$，于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

例 8 证明函数 $u=\frac{1}{r}$，满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

因此 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

例 8 中这个方程都叫做拉普拉斯(Laplace)方程，它是数学物理方程中一种很重要的方程。

小结：本节在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数（以二元函数为重点）偏导数的定义及存在条件和求法，这是多元函数微分学的基础。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第 9 周	课 次	第 17,18 次	
章 节 名 称	**§ 9.3 全微分**			
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）		教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1，知识目标： 学习和掌握多元函数（以二元函数为主）全微分的定义，掌握二元函数可微与偏导数存在之间的关系，会求多元函数的全微分。 2，能力目标：能熟练求多元函数的全微分。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神			
教 学 方 法	讲授			
教 学 重 点 难 点	重点：可微与偏导数存在之间的关系，多元函数的全微分。 难点： 计算多元函数的全微分。			

一、全微分的定义

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓全增量的问题下面以二元函数为例进行讨论

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某一邻域内有定义，并设 $P`(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ 为函数在点 P 对应于自变量增量 Δx 、Δy 的全增量，记作 Δz ，即

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

一般说来，计算全增量△z 比较复杂.与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量 Δx 、Δy 的线性函数来近似的代替函数的全增量 Δz , 从而引入如下定义

定义　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (1)$$

可表示为 $$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \qquad (2)$$

其中 A、B 不依 Δy 赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分，记作 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y。$$

如果函数在区域 D 内每一点处都可微分，那末称这函数在 D 内可微分。

在第二节中曾指出，多元函数在某点的各个偏导数即使都存在，却不能保证函数在该点连续。但是，由上述定义可知，如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，那末函数在该点必定连续。事实上，这时由（2）式可得

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=\lim_{\rho\to 0}[A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)]=0,$$

即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=\lim\limits_{\rho\to 0}[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)]=0$ 从而

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$。因此函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处连续。

二、可微分的条件

下面讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分的条件。

定理 1（必要条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，则该函数在点 $P(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。　（3）

证　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分。于是，对于点 P 的某个邻域的任意一点 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$，（2）式总成立。特别当 $\Delta y=0$ 时（2）式也应成立，这时 $\rho=|\Delta x|$，所以（2）式成为

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|)。$$

上式两边各除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$ 而取极限，就得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A,$$

从而偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$存在，且等于$A$。 同样可证$\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$。所以（3）式成立。证毕。

由于自变量的增量等于自变量的微分，即$\Delta x=dx,\Delta y=dy$，于是习惯上$z=f(x,y)$的全微分

表示为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$。

例 1 讨论$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处的偏导数存在性及可微性。

解：由偏导数的定义，有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

即$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$在点$(0,0)$处的两个偏导数都存在。但是函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微，这是由于

$$\Delta z-[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y]=\sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

从而$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$。

如果选取点$P(0+\Delta x,0+\Delta y)$沿直线$y=x$趋于点$(0,0)$，则

$$\lim_{\Delta y=\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta y=\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是，$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y]}{\rho}\neq 0$。

由全微分定义可知，函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处不可微。

由此可见，偏导数存在是可微的必要条件，而不是充分条件。

定理 2（充分条件）　如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$P(x,y)$连续，则函数在该点可微分。

证　因为我们只限于讨论在某一区域内有定义的函数（对于偏导数也如此），所以假定偏导数在

点 $P(x,y)$ 连续，就含有偏导数在该点的某一邻域内必然存在的意思（以后凡说到偏导数在某一点连续均应如此理解）。设点 $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点，考察函数的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]。$$

在第一个方括号内的表达式，由于 $y+\Delta y$ 不变，因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量。于是，应用拉格朗日中值定理，得到

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\Delta x$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) \qquad (0<\theta<1)$$

又假设，$f_x(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 连续，所以上式可写为

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x, \tag{4}$$

其中 ε_1 为 Δx 、Δy 的函数，且当 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 时，$\varepsilon_1 \to 0$。

同理可证第二个方括号内的表达式可写为

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_2\Delta y, \tag{5}$$

其中 ε_2 为 Δy 的函数，且当 $\Delta y \to 0$ 时，$\varepsilon_2 \to 0$ 。

由（4)、(5）式可见，在偏导数连续的假定下，全增量△z 可以表示为

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y。 \tag{6}$$

容易看出

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|,$$

它是随着 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 即 $\rho \to 0$ 而趋于零。

这就证明了 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的。

以上关于二元函数全微分的定义及微分的必要条件和充分条件，可以完全类似的推广到三元和三元以上的多元函数。

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理。

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形。例如，如果三元函数$u=\phi(x,y,z)$可以微分，那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

1　计算函数$z=x^2+y^2$的全微分.

解　因为$\frac{\partial z}{\partial x}=2\ xy$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，所以$dz=2\ xydx+(x+2y)dy$.

例 2　计算函数$z=e^{xy}$在点$(2,1)$处的全微分.

解　因为　$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{ye}^{\mathrm{xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{xe}^{\mathrm{xy}}$　　$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2$,　$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2$,

所以　　$dz=e^2dx+2e^2dy$.

例 3 计算函数$u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$的全微分.

解　因为　　$\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz}$,

所以　　$du=dx+(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz})dy+ye^{yz}dz$.

全微分在近似计算中的应用

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

$$\Delta z\approx dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

例 4 计算$(1.04)^{2.02}$的近似值。

解：设$f(x,y)=x^y$，$\because f_x(x,y)=yx^{y-1},f_y(x,y)=x^y\ln x$

取$x_0=1,y_0=2,\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$，$f_x(1,2)=2,f_y(1,2)=0,f(1,2)=1$

<table>
<tr><td colspan="5">所以 $\therefore (1.04)^{2.02} \approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02 = 1.08$ 。

小结：本节在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数（以二元函数为重点）全微分的定义及存在条件和求法，也可以简单介绍全微分在近似计算中的应用。</td></tr>
<tr><td colspan="5">复习思考题、作业题：</td></tr>
<tr><td colspan="5">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

授课时间	第　10　周	课　次	第 19 次	
章　节 名　称	**§ 9.4　多元复合函数的求导法则**			
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）		教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：　掌握多元函数的求导法则，会求多元函数的导数，掌握全微分形式不变性。 2，能力目标：能熟练掌握多元函数的求导法则　。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神			
教　学 方　法	讲授			
教　学 重　点 难　点	重点：针对多元函数的表达状态（参数方程、复合函数），能够求其导函数。 难点：　复合函数的求导。			

定理　**如果函数** $u=\phi(t)$ **及** $v=\psi(t)$ **都在点** t **可导，函数** $z=f(u,v)$ **在对应点** (u,v) **具有连续偏导数，则复合函数** $z=f[\phi(t),\psi(t)]$ **在点** t **可导，且**

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \qquad (1)$$

证　设t获得增量Δt，这时$u=\phi(t)$、$v=\Psi(t)$的对应增量为Δu、Δv，由此，函数$z=f(u,v)$对应地获得增量Δz．根据假定，函数$z=f(u,v)$在点(u,v)具有连续偏导数，于是由第三节公式(6.8)有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\,\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\Delta v+\varepsilon_1\,\Delta u+\ \ \Delta u+\varepsilon_2\,\Delta v,$$

这里，当$\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$时，$\varepsilon_1\to 0$，$\varepsilon_2\to 0$.

将上式两边各除以Δt，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon_1\,\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_1\,\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

因为当$\Delta t\to 0$时，$\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$，$\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{du}{dt}$，$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\to\dfrac{dv}{dt}$，所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{dv}{dt}$$

即证复合函数$z=f[\phi(t),\psi(t)]$在点t可导，且其导数可用公式(1)计算．证毕.

用同样的方法，可把定理推广到复合函数的中间变量多于两个的情形．例如，设$z=f(u,v,w),\ u=\phi(t)$、$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$复合而得复合函数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{dt}. \tag{2}$$

在公式(1)及(2)中的导数$\dfrac{dz}{dt}$称为全导数.

推论　如果$u=\phi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)存在偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4}$$

类似地，设$u=\phi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$及$w=\omega(x,y)$都在点(x,y)具有对x及对y的偏导数，函数$z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且可用下列公式计算：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6}$$

如果 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而 $u=\phi(x,y)$ 具有偏导数，则复合函数 $z=f[\phi(x,y),x,y]$，令 $v=x$，$w=y$，因此 $\frac{\partial v}{\partial x}=1$，$\frac{\partial w}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$\frac{\partial w}{\partial y}=1$，从而由公式 (5) 及 (6) 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意　这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是当自变量 y 看作不变而对 x 的偏导数，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(u,x,y)$ 中的 u 及 y 看作不变而对 x 的偏导数。$\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别。

例 1　设 $z=u^v$，而 $u=\sin t$，$v=\cos t$．求全导数 $\frac{dz}{dt}$．

解　$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}=vu^{v-1}\cdot\cos t+u^v\ln u\cdot(-\sin t)$

$=(\sin t)^{\cos t}(\cos t\cot t-\sin t\ln\sin t).$

例 2　设 $z=uv+\cos^2 t$，而 $u=e^t$，$v=\sin t$，求全导数 $\frac{dz}{dt}$．

解　$\frac{dz}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)-\sin 2t$

例 3　设 $z=e^{uv}$，而 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$．

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(xv-yu).$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(yv+xu).$

例 4 设 $z=xe^y+y\varphi(u)$, 而 $u=\sin(x+y)$, $\varphi(u)$ 为可导函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$．

解：令 $f(x,y,u)=xe^y+y\varphi(u)$, 而 $u=\sin(x+y)$, 由复合函数求导法则有

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=e^y+y\varphi'(u)\cdot\cos(x+y)==e^y+y\cos(x+y)\varphi'(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=xe^{y}+\varphi(u)+y\cos(x+y)\varphi'(u)$$

例 5　设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解　令 $u=x+y+z, v=xyz$，则 $w=f(u,v)$.

为表达简便起见，引入以下记号：　$f'_1=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$，　$f''_{12}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}$，

这里下标 1 表示对第一个变量 u 求偏导数，下标 2 表示对第二个变量 v 求偏导数，同理有 f'_2、f''_{11}、f''_{22}　等等。

因所给函数由 $w=f(u,v)$ 及 $u=x+y+z$，$v=xyz$ 复合而成，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1+yz\,f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}（f'_1+yz\,f'_2）=\frac{\partial f'_1}{\partial z}+y\,f'_2+yz\frac{\partial f'_2}{\partial z}.$$

求 $\frac{\partial f'_1}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial f'_2}{\partial z}$ 时，应注意 f'_1 及 f'_2 仍旧是复合函数，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial z}=\frac{\partial f'_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{11}+xy\,f''_{12},$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial z}=\frac{\partial f'_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{11}+xyf''_{22}$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+xy\,f''_{12}+yf'_2+yzf''_{21}+xy^2zf''_{22}$$

$$=f''_{11}+y(x+z)f''_{12}+xy^2zf''_{22}+yf'_2.$$

例 5　设 $u=f(x,y)$ 的二阶偏导数连续，把下列表达式转换成极坐标系中的形式：　(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$；　(2)　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解　由直角坐标与极坐标间的关系式　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

可把函数$u=f(x,y)$换成极坐标r及θ的函数：

$$u=f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(r,\theta).$$

现在要将式子 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$用 r 、 θ 及函数$u=F(r,\theta)$对$r$ 、θ的偏导数来表示．为此，要求出$u=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。这里$u=f(x,y)$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$复合而成，应用复合函数求导法则，得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

两式平方后相加，得： $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$

再求二阶偏导数，得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}。$$

同理可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}$

$$-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}。$$

两式相加，得：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$。

全微分形式不变性　设函数$z=f(u,v)$具有连续偏导数，则有全微分

$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$. 如果 u、v 又是 x、y 的函数 $u=\phi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$，且这两个函数也具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$ 的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式（3）和（4）给出，把公式（3）和（4）中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}dz&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.\end{aligned}$$

由此可见，无论 z 是自变量 u、v 的函数或者中间变量 u、v 的函数，它的全微分形式是一样的。这个性质叫做全微分形式不变性。

例 6　利用全微分形式不变性解本节的例 3：设 $z=e^{uv}$，而 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　$dz=d(e^{uv})=ve^{uv}du+ue^{uv}dv$，而

$$du=d(\ln\sqrt{x^2+y^2})=\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$$

$$dv=d(\arctan\frac{y}{x})=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

代入后归并含 dx 及 dy 的项，得

$$dz=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(xv-yu)dx+\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(yv+xu)dy$$

于是，由全微分的表达式，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(xv-yu).\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(yv+xu).$$

练习：设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,(1+2x^2\sin^2 y)\,e^{x^2+y+z^2\sin^2 y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=2(y+x^4\sin y\cos y)\,e^{x^2+y\;+x^4\sin^2 y}$$

小结：本节要将一元函数微分学中复合函数的求导法则推广到多元复合函数。多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中起着重要作用。本节主要针对几类普遍存在的复合函数的求导方法进行了介绍。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教 学 后 记	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 10 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 20 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">§9.5 隐函数的求导公式</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1，知识目标： 掌握由一个方程和方程组确定的隐函数求导公式，熟练计算隐函数的导数。
2，能力目标：能熟练求隐函数导数的方法。
3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。
4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲授</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：由一个方程确定的隐函数求导方法。
难点： 隐函数的高阶导函数的计算。</td></tr>
</table>

一、一个方程的情形

在第二章第六节中我们已经提出了隐函数的概念，并且指出了不经过显化直接由方程

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

求它所确定的隐函数的方法。现在介绍隐函数存在定理，并根据多元复合函数的求导法来导出隐函数的导数公式.

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad （2）$$

公式（2）就是隐函数的求导公式

这个定理我们不证。现仅就公式(2)作如下推导。

将方程(1)所确定的函数 $y=f(x)$ 代入，得恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$,

其左端可以看作是 x 的一个复合函数，求这个函数的全导数，由于恒等式两端求导后仍然恒等，即得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在(x_0,y_0)的一个邻域，在这个邻域内 $F_y\neq 0$，于是得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x,y)$ 的二阶偏导数也都连续，我们可以把等式(2)的两端看作 x 的复合函数而再一次求导，即得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yz}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

例 1　验证方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点(0,1)的某一邻域内能唯一确定一个单值且有连续导数、当 x=0 时，$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在 x=0 的值。

解 设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F_x=2x, F_y=2y$，$F(0,1)=0,\quad F_y(0,1)=2\neq 0$．因此由定理 1 可知，方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点(0,1)的某邻域内能唯一确定一个单值且有连续导数、当 x=0 时，$y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$。

下面求这函数的一阶和二阶导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1。$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数.既然一个二元方程(1)可以确定一个一元隐函数，那末一个三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

就有可能确定一个二元隐函数。

与定理 1 一样，我们同样可以由三元函数 $F(x,y,z)$的性质来断定由方程 $F(x,y,z)$=0 所确定的二元函数 $z=(x,y)$ 的存在，以及这个函数的性质。这就是下面的定理。

隐函数存在定理 2　设函数 $F(x,y,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)$=0 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{4}$$

这个定理我们不证.与定理 1 类似，仅就公式(4)作如下推导.

由于 $F(x,y,\ f(x,y))\equiv 0$, 将上式两端分别对 x 和 y 求导，应用复合函数求导法则得

$F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$。

因为F_z连续，且$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,所以存在点(x_0,y_0,z_0)的一个邻域，在这个邻域内$F_z\neq 0$，于是得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$。

例 2　设$e^z-xyz=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：设$F(x,y,z)=e^z-xyz$，由公式(4)可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}；\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}$$

于是　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{yz}{e^z-xy})=\frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(e^z-xy)-y(e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x)}{(e^z-xy)^2}$$

将$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$代入上式，得：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2y^2z}{(e^z-xy)^3}$

练习：设$x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设$F\ (x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则$F_x=2x$，$F_z=2z-4$.应用公式(4)，得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$。再一次$x$对求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

二、方程组的情形

下面我们将隐函数存在定理作另一方面的推广。我们不仅增加方程中变量的个数。而且增加方程的个数，例如，考虑方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,z)=0.\end{cases}\tag{5}$$

这时，在四个变量中，一般只能有两个变量独立变化，因此方程组(5)就有可能确定两个二元函数。在这种情形下，我们可以由函数F、G的性质来断定由方程组(5)所确定的两个二元函数的存在，以及它们的性质。我们有下面的定理。

隐函数存在定理 3　设函数 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内所有偏导数都连续，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)式):

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，使得 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,u_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_v & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.\quad (6)$$

这个定理我们不证.与前两个定理类似，下面仅就公式(6)作如下推导。

由于

$$F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,$$

$$G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,$$

将恒等式两边分别对 x 求导，应用复合函数求导法则得

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

这是关于 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，由假设可知在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一个邻域内，系数行列式

$$J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0,$$

从而可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$，　$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$.

同理，可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$， $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$.

例 3 设方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-uv=0,\\ xy-u^2+v^2=0\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 根据所求的偏导数可知，变量 u,v 可看作 x,y 的函数，由（6）式可以求出偏导数。也可以用上面的方法求得。下面我们利用后一种方法来做。

将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases}v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=y.\end{cases}$$

从而，解得 $(u^2+v^2\neq 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}2x & u\\ y & -2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v & u\\ 2u & -2v\end{vmatrix}}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}v & 2x\\ 2u & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}v & u\\ 2u & -2v\end{vmatrix}}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)},$$

同理，将所给的方程两边对 y 求导，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xu+4yv}{2(u^2+v^2)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4yu-xv}{2(u^2+v^2)}.\ (u^2+v^2\neq 0)$$

例 4 验证方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 的某一邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续导数的函数 $y=y(x),z=z(x),$ 并求 $\dfrac{dy}{\partial x},\dfrac{dz}{\partial x}$。

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,\ G(x,y,z)=x+y+z,$ 由于 $F_x=2x,$ $F_y=2y,\ F_z=2z,\ G_x=1,\ G_y=1,\ G_z=1$ 在点 $P(1,-2,1)$ 的某一邻域内连续，且 $F(1,-2,1)=0,\ G(1,-2,1)=0,$ 而 $J=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}=2(y-z)$ 在点 $P(1,-2,1)$ 处不为零，由定理 3 可知，在点 $P(1,-2,1)$ 的某一邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续导数的函数 $y=y(x),z=z(x)$。

将所给方程的两边对 x 求导并移项，得 $\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1. \end{cases}$

解得：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z}$ $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$ $\quad (y-z\neq 0)$

小结：本节在前面已提出隐函数概念的基础上，根据多元复合函数的求导法导出隐函数的求导公式，给出了隐函数存在定理 1、2、3，使我们能够计算有一个方程或方程组确定的隐函数的导数。

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　11 周	课　次	第 21，22 次
章　节 名　称	**§ 9.6　多元函数微分学的应用** **§ 9.8 多元函数的极值及其求法**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：　学习和掌握多元函数在几何上的应用，会求出空间曲线的切线与法平面方程、曲面的切平面与法线方程；掌握多元函数极值的求法以及拉格朗日乘数法的应用。 2，能力目标：能熟练掌握多元函数在几何上的应用。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		

教　学 方　法	讲授
教　学 重　点 难　点	重点：空间曲线的切线与法平面方程，曲面的切平面与法线方程，多元函数极值 难点：多元函数极值的求法以及拉格朗日乘数法

一、微分法在几何上的应用

1　空间曲线的切线与法平面

设空间曲线Γ的参数方程为 $x=\varphi(t), y=\phi(t), z=\omega(t),$ 这里假定式(1)的三个函数都可导。

在曲线上取对应于 $t=t_0$ 的一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 及对应于 $t=t_0+\Delta t$ 的邻近一点 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$。根据解析几何，曲线的割线 MM' 的方程是

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

当 M' 沿着Γ趋于M时，割线 MM' 的极限位置MT就是曲线Γ在点 M 处的切线(图6.7).用△t除上式的各分母，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

令 $M'\to M$ 这时 $(\Delta t\to 0)$, 通过对上式取极限，即得曲线在点 M 处的**切线方程**为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\phi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \qquad (1)$$

这里当然要假定 $\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不能都为零.如果个别为零，则应按空间解析几何有关直线的对称式方程的说明来理解。

切线的方向向量称为曲线的切向量。向量 $T=\{\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

就是曲线Γ在点 M 处的一个切向量。

通过点 M 而与切线垂直的平面称为曲线在点 M 处的**法平面**，它是通过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 而以T为法向量的平面，因此这法平面的方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\phi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

(2)

例1　求螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 在点 $t_0=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线及法平面方程。

解　因为 $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$，从而，$t_0=\dfrac{\pi}{3}$ 所对应的曲线切向量为 $T=\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{1}{2}a,b\}$，曲线为$M_0(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{\pi}{3}b)$，于是，切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{z-\frac{\pi}{3}b}{b},$$

法平面方程为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a(x-\dfrac{a}{2})+\dfrac{1}{2}a(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)+b(z-\dfrac{\pi}{3}b)=0,$

即 $$3\sqrt{3}x-3ay-6bz+2\pi b^2=0$$

如果空间曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}y=\varphi(x),\\ z=\psi(x)\end{cases}$

其中$\varphi(x),\psi(x)$都在 $x=x_0$ 处可导，取 x 为参数，这时曲线 Γ 的方程为

$$x=x, y=\varphi(x), z=\psi(x)$$

从而曲线在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量为$T=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$，于是曲线在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}, \tag{3}$$

在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法平面方程为

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0 \tag{4}$$

一般地，如果曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

点$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线 Γ 上的一个点，由隐函数存在定理 3 可知，当 F、G 具有连续偏导数，且

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F_y, F_z\\ G_y, G_z\end{vmatrix}\neq 0$$

时，此方程组在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内确定了一组函数 $y=y(x),\quad z=z(x)$. 且

$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}$, 从而，曲线在点 M_0 处的切向量为 $T=\{1,\frac{dy}{dx}|_{M_0},\frac{dz}{dx}|_{M_0}\}$，

其中

$$\frac{dy}{dx}|_{M_0}=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}},\qquad \frac{dz}{dx}|_{M_0}=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}},$$

于是，曲线在点 M_0 处的切线方程为 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dx}|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dx}|_{M_0}}$, （5）

曲线 Γ 在点 M_0 处的法平面方程为

$$(x-x_0)+\frac{dy}{dx}|_{M_0}(y-y_0)+\frac{dz}{dx}|_{M_0}(z-z_0)=0. \qquad (6)$$

例 2 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 (1,-2,1)处的切线及法平面方程。

解 这里可直接利用公式(5)及(6)来解，但下面我们依照推导公式的方法来做。将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases}y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=-x,\\ \frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1.\end{cases}$$

由此得 $\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-x & z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}$.

从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0$, $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1$.

于是，曲线的切向量为 $T=\{1,0,-1\}$，故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$(x-1)+0\times(y+2)-(z-1)=0$， 即 $x-z=0.$

2 曲线的切平面与法线

设曲面Σ由方程为$F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面Σ上的一点，并设函数$F(x,y,z)$的偏导数在点M_0处连续且不同时为零.在曲面Σ上，通过点M_0任意作一条光滑曲线Γ（图 6.8），设曲线Γ的参数方程

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \tag{7}$$

当$t=t_0$对应于点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，且$x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$不全为零，则曲线Γ在点M_0处的切向量为$T=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$，因为曲线Γ在曲面Σ上，所以曲线上点的坐标满足曲面方程。即$F[x(t),y(t),z(t)]=0$

又因为$F(x,y,z)$的偏导数在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处连续，而$x'(t_0),y'(t_0),\ z'(t_0)$均存在，所以上式两端在$t=t_0$处可对$t$求全导数，得

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

设向量$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$，由向量的内积公式可知上式表示$\vec{n}\cdot T=0$。即切向量$T$与$\vec{n}$垂直。由于曲线$\Gamma$的任意性，所以在曲面$\Sigma$上过点$M_0$的任意曲线在点$M_0$处的切线都垂直向量$\vec{n}$。于是这些切线都在过点$M_0$的同一个平面上，称该平面为曲面$\Sigma$在点$M_0$处的切平面。

显然，向量$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$是切平面的一个法向量，称为曲面$\Sigma$的一个法向量。从而，**切平面方程为**

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

通过点M_0且垂直于切平面的直线，称为曲面在点M_0处的法线。于是法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

特别地，如果曲面方程为$z=f(x,y)$，函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有连续的偏导数，则令

$F(x,y,z)=f(x,y)-z$,

从而 $F_x(x,y,z)=f_x(x,y)$， $F_y(x,y,z)=f_y(x,y)$, $F_z(x,y,z)=-1$ 。于是曲面在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的一个法向量为

$$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$$

所以，切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

即 $$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (8)$$

而法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (9)$$

这里顺便指出，方程(8)右端恰好是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，而左端是切平面上点的竖坐标的增量.因此，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面上点的竖坐标的增量.

如果用α、β、γ表示曲面的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即使得它与 z 轴的正向所成的角γ是一锐角，则法向量为

$$\vec{n}=\{-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1\}$$

于是，法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

其中， f_x,f_y 分别表示 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 。

例 3　求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程。

解　设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$,

$$\vec{n}=\{F_x,\ F_y,\ F_z\}=\{y,x,e^z-1\},\quad \vec{n}|_{(2,1,0)}=\{1,2,0\}.$$

所以曲面在点(2,1,0)处的切平面方程为 $(x-2)+2(y-1)=0,$

即 $$x+2y-4=0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$，即 $\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}\\ z=0\end{cases}$

例 4 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点(2 , 1 , 4)处的切平面及法线方程。

解 $n=\{z_x,z_y,-1\}=\{2x,2y,-1\}$，$n|_{(2,1,4)}=\{4,2,-1\}$。

于是，曲面在点(2,1,4)处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0.$$

即 $$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为 $$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

练习：求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1,2,3)处的切平面及法线方程。

解 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，

$n=\{F_x, F_y, F_z\}=\{2x,2y,2z\}$，　$n|_{(1,2,3)}=\{2,4,6\}$.

所以在点(1,2,3)处此球面的切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$，　即 $x+2y+3z-14=0$，

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，　即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

由此可见，法线经过原点(即球心).

二、多元函数的极值及其求法

1 多元函数的极值及最大值、最小值

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，如果当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0)$ 时，有

$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极大值 $f(x_0,y_0)$；如果当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0)$ 时，有

$f(x,y)>f(x_0,y_0)$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极小值 $f(x_0,y_0)$．极大值、极小值统称为极值。使函数取得极值的点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为极值点。

例 1 函数 $z=(x-2)^2+y^2-3$ 在点 $P_0(2,0)$ 处有极小值 $f(2,0)$。因为当 $P(x,y)\in \overset{\circ}{U}(P_0)$ 时，$(x-2)^2+y^2>0$，从而 $f(x,y)>f(2,0)$。

例 2 函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0，0）处有极大值。因为在点（0，0）处函数值为零，而对于点（0，0）的任一邻域内异于（0，0）的点，函数值都为负，点（0，0，0）是位于 xOy 平面下方的锥面 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点。

例 3 函数 $z=xy$ 在点（0，0）处既不取得极大值也不取得极小值。因为在点（0，0）处的函数值为零，而在点（0，0）的任一邻域内，总有使函数值为正的点，也有使函数值为负的点。

以上关于二元函数的极值概念，可推广到 n 元函数。设 n 元函数 $u=(P)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 P_0 的任何点都适合不等式

$$f(P)<f(P_0) \qquad (f(P)>f(P_0)),$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极大值（极小值）$f(P_0)$。

二元函数的极值问题，首先讨论极值存在的必要条件：

定理 1（必要条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数存在，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极值，则有 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$。

证 不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值。依极大值的定义，在点 (x_0,y_0) 的某邻域内异于 (x_0,y_0) 的点都适合不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$

特殊地，在该邻域内取 $y=y_0$，而 $x\neq x_0$ 的点，也应适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)$$

这表明一元函数 (x,y_0) 在 $x=x_0$ 处取得极大值，因此必有 $f_x(x_0,y_0)=0$

类似地可证 $f_y(x_0,y_0)=0$。

从几何上看，这时如果曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面，则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面 $z-z_0=0$。

凡是能使 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点，从定理 1 可知，具有偏导数的函数的极值点必定是驻点。但是函数的驻点不一定是极值点，例如，点（0，0）是函数 $z=xy$ 的驻点，但是函数在该点并无极值。

怎样判定一个驻点是否是极值点呢 ？下面的定理回答了这个问题。

定理 2（充分条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不取极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论。

这个定理现在不证。利用定理 1、2，我们把具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的求法叙述如下：

第一步 解方程组 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，求得一切实数解，即可以得到一切驻点。

第二步 对于每一个驻点 (x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值 A，B 和 C。

第三步 定出 $AC-B^2$ 的符号，按定理 2 的结论判定 (x_0,y_0) 是否是极值、是极大值还是极小值。

例 4 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解 先解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y \quad , \end{cases}$

求得驻点为（1,0）、（1,2）、（-3,0）、（-3,2）。

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=6y+6$$

在点(1,0) 处，$AC-B^2=12\cdot 6>0$ 又 $A>0$，所以函数在处有极小值；

在点(1,2) 处，$AC-B^2=12\cdot(-6)<0$，所以(1,2)不是极值；

在点(-3,0) 处，$AC-B^2=-12\cdot 6<0$，所以(-3,0)不是极值；

在点(-3,2) 处，$AC-B^2=-12\cdot(-6)>0$ 又 $A<0$ 所以函数在(-3,2)处有极大值(-3,2)=31。

讨论函数的极值问题时，如果函数在所讨论的区域内具有偏导数，则由定理 1 可知，极值只可能在驻点处取得。然而，如果函数在个别点处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但也可能是极值点。例如在例 2 中，函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0,0）处的偏导数不存在，但该函数在点（0，0）处却具有极大值。因此，**在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，，那末对这些点也应当考虑。**

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值。

我们知道，如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值。这种使函数取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内部，也可能在 D 的边界上。我们假定，函数在 D 上连续，在 D 内可微分且只有有限个驻点，这时如果函数在 D 的内部取得最大值（最小值），那末这个最大值（最小值）也是函数的极大值（极小值）。

因此，在上述假定下，求函数的最大值和最小值的一般方法是：将函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值。但这种做法，由于要求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值，所以往往相当复杂。在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数 $f(x,y)$ 的最大值（最小值）一定在 D 的内部取得，而函数在 D 内只有一个驻点，那末可以肯定该驻点的函数值就是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值（最小值）。

例 5　某厂要用铁板作成一个体积为 V 的无盖长方体水箱，问怎样选取长、宽、高，才能使用料最省。

解　设水箱的长为 x，宽为 y，高为 z，已知 $xyz=V$，从而 $z=\dfrac{V}{xy}$，水箱的表面积为

$$S=xy+2(x\cdot\frac{V}{xy}+y\cdot\frac{V}{xy})=xy+2V(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$$

所求材料最省，就是求表面积 S 取得最小值问题。

解方程组$\begin{cases} S_x = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ S_y = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$，得 $x = y = \sqrt[3]{2V}$，即驻点为$(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$。

由问题的实际意义可知，表面积 S 的最小值一定存在，现在 D 内只有一个驻点，所以当 $x = \sqrt[3]{2V}, y = \sqrt[3]{2V}$ 时，S 取得最小值。这时 $z = \dfrac{V}{xy} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$，于是当水箱的底是边长为 $\sqrt[3]{2V}$ 的正方形，高为 $\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ 时所用的材料最省。

从这个例子还可看出，在体积一定的长方体中，以立方体的表面积为最小。

例 6　有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它两边折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽。问怎样折法才能使断面的面积最大？

解　设折起来的边为 x cm，倾角为 α (图 6.9)，那末梯形断面的下底长为 $24 - 2x$，上底长为 $24 - 2x + 2x\cos\alpha$，高为 $x\sin\alpha$，所以断面面积

$$A = \frac{1}{2}(24 - 2x + 2x\cos\alpha + 24 - 2x)\cdot x\sin\alpha,$$

即
$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\sin\alpha\cos\alpha,\quad (0 < x < 12, 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2})$$

可见，断面面积 A 是 x 和 α 的二元函数，这就是目标函数。下面求使这函数取得最大值的点(x, α)。

令
$$\begin{cases} A_x = 24\sin a - 4x\sin a + 2x\sin a\cos a = 0, \\ A_a = 24x\cos a - 2x^2\cos a + x^2(\cos^2 a - \sin^2 a) = 0. \end{cases}$$

由于 $\sin\alpha \ne 0$、$x \ne 0$，上述方程组可化为

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos a = 0, \\ 24\cos a - 2x\cos a + x(\cos^2 a - \sin^2 a) = 0. \end{cases}$$

解这方程组，得

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\quad x = 8(cm)$$

根据题意可知断面面积的最大值一定存在，并且在 $D{:}0 < x < 12$，$0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ 内取得。通过计算得知 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时的函数值比 $\alpha = 60^\circ$，$x = 8(cm)$ 时的函数值为小。又函数在 D 内只有一个驻点，因此可以断定，当 $x = 8cm$，$\alpha = 60^\circ$ 时，就能使断面的面积最大。

2　条件极值、拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，并无其它条件，所以有时候称为**无条件极值**。但在实际问题中，有些极值问题除了限制在定义域内，还需要满足一定的附加条件，这样的极值称为条件极值。例如，求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积问题。设长方体的三棱的长为x,y,z，则体积$V=xyz$。又因假定表面积为a^2，所以自变量x,y,z还必须满足附加条件$2(xy+yz+xz)=a^2$。

但在很多情形下，将条件极值化为无条件极值并不这么简单。我们另有一种直接寻求条件极值的方法，可以不必先把问题化到无条件极值的问题，这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法。

现在我们来寻求函数 $z=f(x,y)$ 在满足条件$\varphi(x,y)=0$下取得极值的必要条件。

拉格朗日乘数法　要求函数$z=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的极值，可先构造辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

其中λ为某一常数，求其对x与y的一阶偏导数，并使之为零，然后与条件$\varphi(x,y)=0$联立

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\phi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\phi_y(x,y)=0, \\ \phi(x,y)=0. \end{cases}$$

由这方程组解出x，y及λ，则其中x，y就是函数$f(x,y)$在附加条件下$\phi(x,y)=0$的可能极值点的坐标。

最后，根据问题的具体意义判定所求得的点是否为极值点。

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形。例如，要求函数$u=f(x,y,z,t)$在附加条件$\phi(x,y,z,t)=0$及$\psi(x,y,z,t)=0$下的极值，可以先构成辅助函数

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\phi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t)$$

其中λ_1，λ_2均为常数，求其一阶偏导数，并使之为零，然后与(9)中的两个方程联立起来求解，这样得出的x、y、z、t就是函数$f(x,y,z,t)$在附加条件(9)下的可能极值点的坐标。

至于如何确定所求得的点是否极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

例 7 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积。

解　设长方体的三棱长为x,y,z，　则问题就是在条件

$$\psi(x,y,z,t)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \qquad (1)$$

下，求函数 $V=xyz$ 　$(x>0，y>0，z>0)$

的最大值。构成辅助函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$$

求其对x、y、z的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases} yz+2(y+z)=0 \\ xz+2(x+z)=0 \\ xy+2(y+z)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

再与(1)联立求解。

因x、y、z都不等于零，所以由(2)可得$\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+z}{y+z}$，$\dfrac{y}{z}=\dfrac{x+y}{x+z}$.

由以上两式解得　$x=y=z$

将此代入式(1)，便得　$x=y=z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

这是唯一可能的极值点。因为由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得。也就是说，表面积为a^2的长方体中，以棱长为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$的正方体的体积为最大，最大体积$V=\dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3$。

小结：本节首先介绍了空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线方程，然后研究多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值问题。最后介绍了利用拉格朗日乘数法求条件极值的方法及应用。

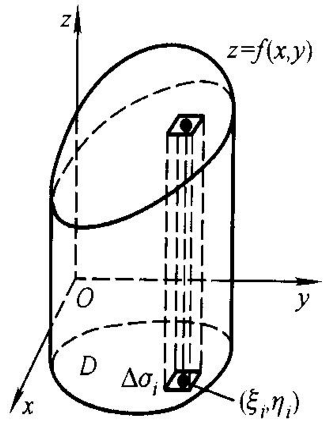
复习思考题、作业题：

下次课预习要点	
教学后记	

授课时间	第 12 周	课次	第 23 次
章节名称	**§ 10.1　二重积分的概念与性质**		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	1，知识目标：　使学生了解二重积分的概念及二重积分的几何意义；掌握二重积分的性质。 2，能力目标：能熟练了解二重积分的概念及二重积分的几何意义。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教学方法	讲授		
教学重点难点	重点：二重积分的性质 难点：二重积分的性质		

一、二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积



设有一立体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 D, 它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 它的顶是曲面 $z=f(x,y)$ 这里 $f(x,y)\geq 0$ 且在 D 上连续（如图）。 这种立体叫做曲顶柱体. 现在我们来讨论如何计算曲顶柱体的体积.

首先, 用一组曲线网把 D 分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\cdots,\Delta\sigma_n$$

分别以这些小闭区域的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分为 n 个细曲顶柱体. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点 (ξ_i,η_i)， 以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高而底为 $\Delta\sigma_i$ 的平顶柱体的体积为 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

于是，这个平顶柱体体积之和可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值，即

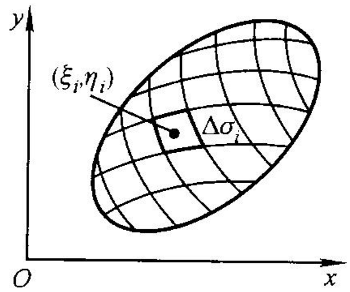
$$V\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

为求得曲顶柱体体积的精确值, 将分割加密, 只需取极限, 即 n 个小闭区域的直径中的最大值（记为 λ ）趋于零时，上述和式的极限值为

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2. 平面薄片的质量.

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D, 它在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$, 这里 $\rho(x, y)>0$ 且在 D 上连续. 现在要计算该薄片的质量 M. 。



用一组曲线网把 D 分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n.$$

把各小块的质量近似地看作均匀薄片的质量:

$$\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i\ .$$

各小块质量的和作为平面薄片的质量的近似值:

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

将分割加细, 取极限,令 n 个小区域的直径中的最大值（记为 λ ）趋于零时，得到平面薄片的质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ .$$

虽然上述两个问题的实际意义不同，都可以归结为同一形式的和式的极限，因此：

定义 1　设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\cdots,\Delta\sigma_n\ ,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.如果对区域 D 的任意一种分割法及对点 (ξ_i,η_i) 的任意取法，当各小闭区域的直径中的最大值λ趋于零时, 这和式的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数, $f(x,y)d\sigma$ 叫做被积表达式,$d\sigma$ 叫做面积元素, x,y 叫做积分变量, D 叫做积分区域, $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和.

直角坐标系中的面积元素:

如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D, 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$的边长为Δx_i和Δy_i, 则$\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$, 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dxdy$，而把二重积分记作

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

二重积分的存在性: 当 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续时, 积分和的极限是存在的,　也就是说函数 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分必定存在. 我们总假定函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续, 所以 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分都是存在的.

二重积分的几何意义: 如果 $f(x,y)\ge 0$, 被积函数 $f(x,y)$ 可解释为曲顶柱体的在点$(x,\ y)$处的竖坐标, 所以二重积分的几何意义就是柱体的体积. 如果 $f(x,y)$ 是负的, 柱体就在 xOy 面的下方, 二重积分的绝对值仍等于柱体的体积, 但二重积分的值是负的.

二. 二重积分的性质

性质 1 被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面，即

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma \quad （k\text{为常数}）$$

性质 2 函数的和（或差）的二重积分等于各个函数二重积分的和（或差），

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma .$$

性质 3 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，则在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma .$$

性质 4 $\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma$（$\sigma$为 D 的面积）.

性质 5 如果在 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$， 则有不等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma .$$

特别地，由于 $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$，所以

$$|\iint_D f(x,y)d\sigma| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma .$$

性质 6 设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则有

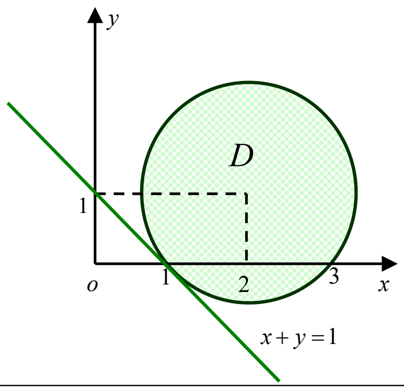
$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma .$$

性质 7 （二重积分的中值定理）设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点$(\xi,\ \eta)$使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma .$$

例 1 不作计算估计 $I=\iint_D (4x^2+4y^2+9)d\sigma$ 的值，其中 D 是圆域：$x^2+y^2\le 4$.

解：D 的面积为 $\sigma=\pi(2)^2=4\pi$. 由于 $9\le 4x^2+4y^2+9\le 25$，所以有性质 6 有，$36\pi\le \text{I}\le 100\pi$.



例 2 比较积分 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小，其中 D 是圆域：$(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$.

解： 积分域 D 的边界为圆周：

$(x-2)^2+(y-1)^2=2$，它与 x 轴交于点 $(1,0)$，与直线 $x+y=1$ 相切，而圆域 D 位于直线的上方，故在 D 上 $x+y\geq 1$，从而 $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$ 由性质 5 有 $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$
复习思考题、作业题：
下次课预习要点

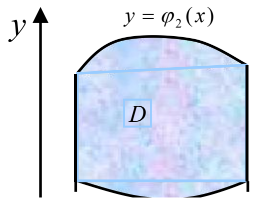
教　学 后　记	

授课时间	第　12 周	课　次	第 24 次
章　节 名　称	**§10.2　二重积分的计算法**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	2
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：　使学生掌握利用直角坐标及极坐标计算二重积分的方法。 2，能力目标：能熟练计算二重积分。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：将二重积分化为二次积分 难点：将二重积分化为二次积分		

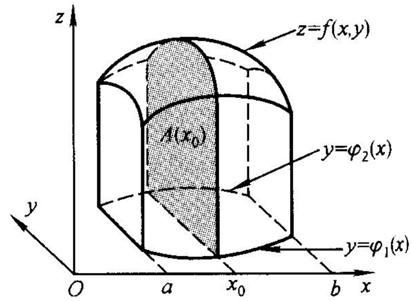
一、利用直角坐标系计算二重积分

利用二重积分的几何意义来建立计算公式。假定 $f(x,y)\ge 0$，积分区域 D 为 D=$\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$，称为 X 型区域如图，其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续。

现在利用平行于 yoz 平面的平面 $x=x_0(x_0\in[a,b])$ 去截曲顶柱体，其截面是一个以 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底，曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形。由定积分的几何意义可知，截面面积为



$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$$



根据平行截面面积为已知的立体体积的方法，得曲顶柱体体积为

$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$ 从而有等式

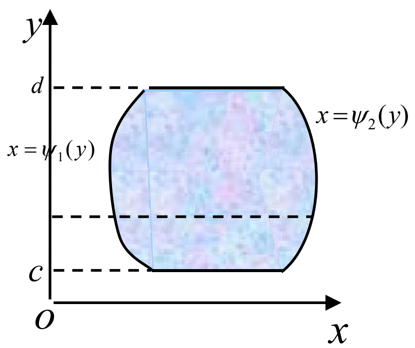
$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx \qquad (1)$$

上式右端的两个定积分:先对 y，后对 x 积分，称之为累次积分，这个累次积分可记作 $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ 即 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

类似地，如果积分区域 D 可以表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,$$

$$\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

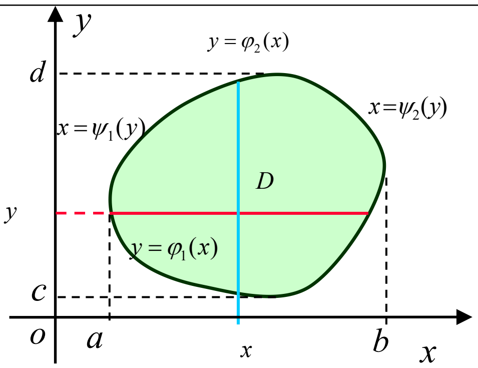


称为 $Y-$ 型区域（如图），其中函数 $\psi_1(y),\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，那么就有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx]dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

这就是先对 x，后对 y 积分的累次积分。

注：（1）有的情况下积分区域既是 $X-$型区域又是 $Y-$型区域（如右图），不妨设为 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,$

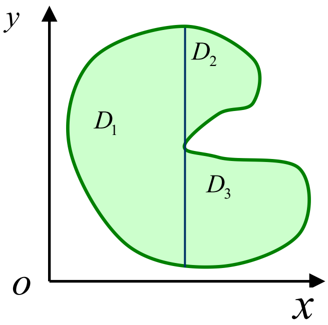


$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}=\{(x,y)|c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,.$$

为计算方便，可以**选择积分次序**，在必要时也可**交换积分次序**.



（2）若积分区域较复杂，可将其分成若干个互不相交的 $X-$型区域或 $Y-$型区域．如右图中：$D=D_1+D_2+D_3$，则有 $\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}$.

（3）利用被积函数的奇偶性及积分区域 D 的对称性，常会大大化简二重积分的计算.

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且 D 关于 x 轴对称，位于 x 轴上方的部分记为 D_1，则在 D 上

若 $f(x,-y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$；

若 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$.

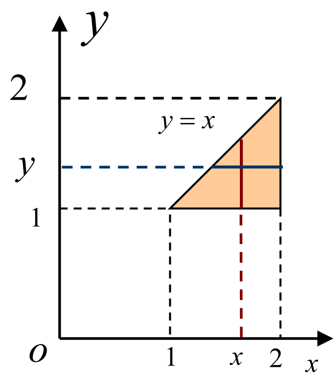
当区域关于 y 轴对称，函数关于变量 x 有奇偶性时有类似的结果.

在利用这种方法时，要同时兼顾到**被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性和积分区域 D 的对称性**两方面.

例 1 计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$,其中 D 是

(1) 由直线 $y=1,x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域;

(2) 由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.



解：（1）解法 1． 将 D 看作 X–型区域，则 $D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$. 于是

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x\mathrm{d}x$$

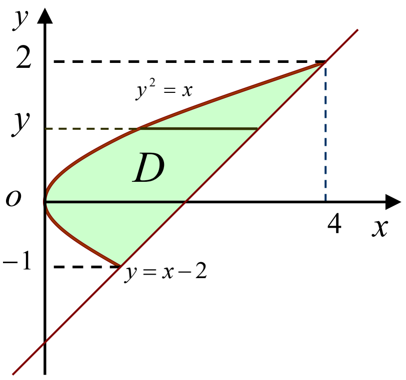
$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}.$$

解法 2. 将 D 看作 Y–型区域， 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\1\le y\le 2\end{cases}$. 于是，

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 xy\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}.$$

(**2** 为计算简便，先对 x 后对 y 积分，则

$D:\begin{cases}y^2\le x\le y+2\\-1\le y\le 2\end{cases}$. 于是，



$$I=\int_{-1}^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^2\left[y(y+2)^2-y^5\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^2=\frac{45}{8}.$$

例 2 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是直线 $x=2$、$y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

解： 首先画出 D 的图形（如图 7.10）。由图可知 D 是 X–型区域，即：

$$D=\{(x,y)\mid\frac{1}{x}\le y\le x,1\le x\le 2\}$$

所以 $I=\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2\left[\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{x^2}{y^2}dy\right]dx=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]\Big|_{\frac{1}{x}}^x dx=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}$

如果利用 Y–型区域，就必须将 D 分成两部分，比较麻烦。

例 3. 求两个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$， $x^2+z^2=a^2$ 相交部分的体积。

解：利用立体关于坐标平面的对称性（如图 7.11-7.12)，所求的体积为第一卦线体积的 8 倍。第一卦限部分的底为

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a\}$$

它的顶为柱面 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ ，于是

$$V=8\iint_{D}\sqrt{a^2-x^2}dxdy=8\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}dy$$

$$=8\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=8\left[a^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a\right]=8\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)=\frac{16a^3}{3}$$

例 4 设 D 由曲线 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域，计算 $\iint_{D}x^2e^{-y^2}dxdy$ 。

解: 先对 x 后对 y 积分，有

$$\iint_{D}x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-y^2}y^3dy$$

$$=-\frac{1}{6}\left[y^2e^{-y^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-y^2}dy^2\right]=-\frac{1}{6e}-\frac{1}{6}\left(e^{-y^2}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

注：若先对 y 后对 x 积分就不能计算了！

例 5（地科） 计算二重积分 $\iint_{D}x^2ydxdy$，其中区域 D 是由 $y=0, x^2+y^2=1$ 所围成的上半平面中的图形。

解：$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\}$

因此 $\iint_{D}x^2ydxdy=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2ydy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2(1-x^2)dx=\frac{2}{15}$

例 6（地科） 设 D 是由直线 $y=x$, 抛物线 $y=x^2$ 所围的区域，求

$$\iint_{D}(2-x-y)dxdy$$

解：X-区域：$D=\{(x,y)\mid x^2\le y\le x, 0\le x\le 1\}$

Y-区域：$D=\{(x,y)\mid y\le x\le\sqrt{y}, 0\le y\le 1\}$ $\quad\frac{11}{60}$

例 7（地科） 设 D 是以 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域，求 $\iint_{D}e^{-y^2}dxdy$

解：先对 x 后对 y 积分，有

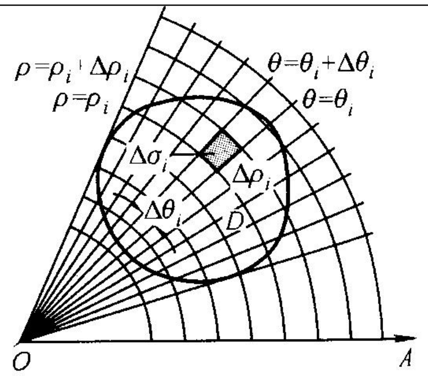
$$\iint_{D}e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}).$$

二、利用极坐标计算二重积分

有些二重积分, 积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便, 且被积函数用极坐标变量ρ 、θ 表达比较简单. 这时我们就可以考虑利用极坐标来计算二重积分 $\iint_{D}f(x,y)d\sigma$.

我 们 知 道 二 重 积 分 的 定 义 为：

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



下面我们来研究这个和的极限在极坐标系中的形式.

假设以从极点 O 出发的一族射线及以极点为中心的一族同心圆（$r=$常数）构成的网将区域 D 分为 n 个小闭区域，小闭区域的面积为:

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\cdot\Delta\theta_i-\frac{1}{2}\cdot r_i^2\cdot\Delta\theta_i=\frac{1}{2}(2r_i+\Delta r_i)\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i$$

$$=\frac{r_i+(r_i+\Delta r_i)}{2}\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i=\overline{r_i}\Delta r_i\Delta\theta_i,$$

其中$\overline{r_i}$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值. 在这个小的闭区域内取圆周 $r=\overline{r_i}$ 上的一点$(\overline{r_i},\overline{\theta}_i)$，该点的直角坐标若为$(\xi_i,\eta_i)$，则由直角坐标与极坐标之间的关系有$\xi_i=\overline{r_i}\cos\overline{\theta}_i,\eta_i=\overline{r_i}\sin\overline{\theta}_i$。于是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\overline{r_i}\cos\overline{\theta},\overline{r_i}\sin\overline{\theta}_i)\overline{r_i}\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i$$

所以 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

即 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

若积分区域 D 可表示成：

$\{(r,\theta)\,|\,\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$，（如图 7.15）

其中$\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$连续，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

或 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr]d\theta$$

特别地，若积分区域 D 可以表示成：

$\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\varphi(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$，（如图 7.16）

则 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

如果区域 D 是一条把原点 O 包围在其内部的封闭曲线所围成，即 D 表示为（图 7.17）

$\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\varphi\ (\theta),0\le\theta\le 2\pi\}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

例 8. 计算 $I=\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}dxdy$，其中区域 D 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$ 所围成.

解　令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$，则在极坐标系中 D 可以表示为

$0\le r\le a,0\le\theta\le 2\pi$，于是

$$I=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_D e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}[\int_0^a e^{-r^2}rdr]d\theta=\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^a d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

注意：本题如果用直角坐标计算，由于积分 $\int e^{-x^2}dx$ 不能用初等函数表示，所以算不出来。我们可以利用上面的结果来计算工程上常用的反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 。

设 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0\}$，$S=\{(x,y)|0\le x\le R,0\le y\le R\}$

$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2R^2,x\ge 0,y\ge 0\}$，显然，$D_1\subset S\subset D_2$

而被积函数满足 $e^{-x^2-y^2}>0$，故 $\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy$

再利用例 8 的结果有 $\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$，$\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$，

$$\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^R dx\int_0^R e^{-x^2-y^2}dy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy$$

$$=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right)=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

故不等式改写成：$\frac{\pi}{4}\xleftarrow{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})<\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})\xrightarrow{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}$

所以当 $R\to+\infty$ 时有 $\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$，即 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

例 9 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积.

解　由对称性，立体体积为第一卦限部分的四倍.

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy,$$

其中 D 为半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 及 x 轴所围成的闭区域.

在极坐标系中 D 可表示为 ：$0\le r\le a\cos\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，所以

$$V=4\iint_D \sqrt{4a^2-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{32}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{32}{3}a^2(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$$

例 10 求由双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围成的区域的面积 A。

解：原方程在极坐标下为 $r^2=2a^2\cos2\theta$，由对称性（如图 7.19），

$$A=4\iint_D d\sigma=4\iint_D rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos2\theta}}rdr=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta=2a^2.$$

例 11（地科） 计算 Poisson 积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$。

解：因为无法作初等函数 e^{-x^2} 的原函数，所以不能直接进行积分。但是由于

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$$

其中 D 为整个坐标平面，由于被积函数和积分区域的对称性，只要计算它在第一象限 D_1 上的积分，

因为 $D_1=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le+\infty,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

所以 $I^2=4\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdr=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_0^{\infty}=\pi$

因此 $I=\sqrt{\pi}$。

注意：使用极坐标变换计算二重积分的原则：

(1)、积分区域的边界曲线易于用极坐标方程表示（ 含圆弧,直线段 ）；

(2)、被积函数表示式用极坐标变量表示较简单（ 含 $(x^2+y^2)^{\alpha}$，α 为实数 ）。

复习思考题、作业题：

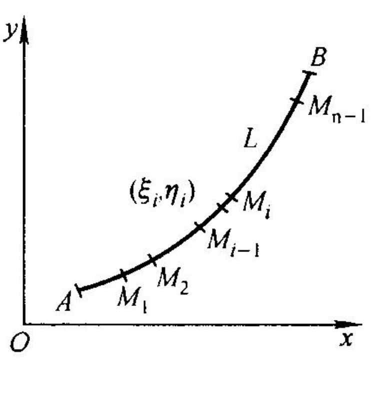
下次课预习要点	
教 学 后 记	

授课时间	第 13 周	课 次	第 25 次
章 节 名 称	**§ 11.1 对弧长的曲线积分**		
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学 时数	2
教 学 目 的 要 求	1，知识目标：使学生掌握对曲线的弧长的计算。 2，能力目标：能熟练计算二重积分。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教 学 方 法	讲授		
教 学 重 点 难 点	重点：对弧长的计算 难点： 对弧长的计算		

我们已经把定积分的概念推广到了重积分，被积函数是二元函数或三元函数，积分区域是平面区域或空间区域，积分概念还可以推广到曲线积分和曲面积分。本章将介绍曲线积分、曲面积分的概念、应用、计算方法，以及它们和重积分之间的联系。

一、 对弧长的曲线积分的概念与性质

金属曲线的质量: 设有一有限长的金属曲线 C，其上不均匀地分布着质量，因此金属曲线 C 的线密度是变量。设其在 xOy 面内的一段曲线弧 L，它的端点是 A,B,在 L 上任一点 (x,y) 处，它的线密度为 $\rho(x,y)$，现在要计算这金属曲线 C 的质量 M.



把曲线分成 n 小段, $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$($\Delta s_i$ 也表示弧长);任取$(\xi_i, \eta_i)\in\Delta s_i$, 得第 i 小段质量的近似值 $\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，于是整个物质曲

线的质量近似为$M\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

令$\lambda=\max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n\}\to 0$，则整个物质曲线的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

这种和的极限在研究其它问题时也会遇到.

定义　设L为xOy面内的一条光滑曲线弧，函数$f(x, y)$在L上有界. 在L上任意插入一点列A_1, A_2, $\cdots$, A_{n-1}把L分在n个小段. 设第i个小段的长度为Δs_i，又(ξ_i, η_i)为第i个小段上任意取定的一点，作乘积$f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$，($i$=1, 2,$\cdots$, n)，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，如果当各小弧段的长度的最大值$\lambda\to 0$，这和式的极限总存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在曲线弧$L$上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作$\int_L f(x,y)ds$，即

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段.

曲线积分的**存在性**：当$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)ds$是存在的.以后我们总假定$f(x,y)$在L上是连续的.

根据对弧长的曲线积分的定义,曲线 C 的质量就是曲线积分$\int_L \rho(x,y)ds$的值，其中$\rho(x, y)$为线密度.

对弧长的曲线积分的推广到积分弧段为空间曲线的情况:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果L(或Γ)是分段光滑的，则规定函数在L(或Γ)上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分的和. 例如设L可分成两段光滑曲线弧L_1及L_2，则规定

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds.$$

闭曲线积分：如果L是闭曲线，那么函数$f(x,y)$在闭曲线L上对弧长的曲线积分记作$\oint_L f(x,y)ds$.

对弧长的曲线积分的性质:

性质 1　设c_1、c_2为常数，则

$$\int_L [c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)]ds = c_1\int_L f(x,y)ds + c_2\int_L g(x,y)ds;$$

性质 2 若积分弧段 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds;$$

性质 3 设在 L 上 $f(x, y)\le g(x, y)$，则 $\int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds$.

特别地，有 $|\int_L f(x,y)ds| \le \int_L |f(x,y)|ds$

二、对弧长的曲线积分的计算法

若曲线 L 的参数方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$，

则质量元素为 $f(x,y)ds = f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$，

曲线的质量为 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$.

即 $$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

定理 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 其中 $\phi(t),\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\phi'^2(t),+\varphi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta) \qquad (1)$$

应注意的问题：定积分的下限 α 一定要小于上限 β.

讨论:

(1) 若曲线 L 的方程为 $y=\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$

则 $$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx. \qquad (2)$$

(2) 若曲线 L 的方程为 $x=\varphi(y)$ $(c\le y\le d)$

则 $$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{\varphi'^2(y)+1}dy. \qquad (3)$$

(3) 若曲 Γ 的方程为 $x=\phi(t), y=\varphi(t), z=\omega(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt \qquad (4)$$

例 8.1 计算 $\int_L xyds$，其中 L 为椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ 在第一象限的部分。

解：由公式：$\int_L xyds=\int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t}dt.$$

$$\overset{u=\cos 2t}{=}\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u}du=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b}.$$

例 8.2 计算$\int\limits_L yds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点$\left(1,\sqrt{2}\right)$与点$\left(2\ ,2\right)$之间的一段弧.

解：由 $y=\sqrt{2x}$ 得 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$，由公式（2）可知

$$\int\limits_L yds=\int_1^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int_1^2\sqrt{1+2x}dx=\frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}})$$

例 8.3 计算$\int_L(x+y)ds$，L 为连接三点 $O\left(0,0\right)$，$A\left(1,0\right)$，$B\left(1,1\right)$的直线段。

解：$\int_L(x+y)ds=\int_{L(OA)}(x+y)ds+\int_{L(AB)}(x+y)ds+\int_{L(BO)}(x+y)ds=2+\sqrt{2}$

例 8.4 计算曲线积分$\int_\Gamma\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中$\Gamma$为螺旋线 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，$z=bt$ 的第一圈（上相应于 t 从 0 到达 2π 的一段弧.）

解：$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=\sqrt{a^2+b^2}dt$，由（4）式有

$$\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2\pi b}{a}$$

练习：计算半径为 R、中心角为 2α的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I(设线密度为μ=1).

解 取坐标系如图所示, 则 $I=\int_L y^2ds$.

曲线 L 的参数方程为

$x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$ $(-\alpha\leq\theta<\alpha)$.

于是 $I=\int_L y^2ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}d\theta$

$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta d\theta=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

小结: 用曲线积分解决问题的步骤:

(1)建立曲线积分;

(2)写出曲线的参数方程 (或直角坐标方程) , 确定参数的变化范围;

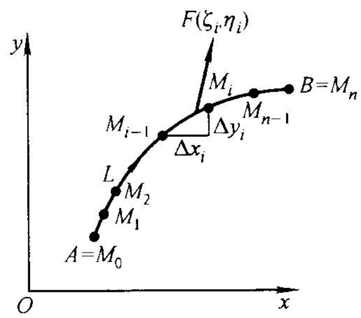
(3)将曲线积分化为定积分;

(4)计算定积分.	
复习思考题、作业题：	
下次课预习要点	
教学后记	

授课时间	第 13 周	课次	第 26 次
章节名称	**§11.2 对坐标的曲线积分**		
授课方式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）	教学时数	2
教学目的要求	1，知识目标：使学生掌握对坐标的曲线积分的概念、性质:；熟练对坐标的曲线积分的计算。 2，能力目标：能熟练掌握对坐标的曲线积分的计算。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教学方法	讲授		
教学重点难点	重点：对坐标的曲线积分的概念、计算 难点： 对坐标的曲线积分的概念、计算，两类曲线积分的联系		

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

变力沿曲线作功 设一个质点在 xOy 面内在变力 $\boldsymbol{F}(x, y)=P(x, y)\boldsymbol{i}+Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 的作用下从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 试求变力 $\boldsymbol{F}(x, y)$所作的功.



用曲线 L 上的点

$A=A_O(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ ， $\dots A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$, $A_n(x_n,y_n)=B$ 把 L 分成 n 个小弧段,取其中有向线段 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ ，由于 $A_{i-1}A_i$ 光滑且很短，可以用有向线段 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=(\Delta x_i)i+(\Delta y)j$ 来近似代替它，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ， $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ ， 在 $A_{i-1}A_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i) 处力

$F(\xi_i,\eta_i)=P(\xi_i,\eta_i)i+Q(\xi_i,\eta_i)j$ 来近似代替这小弧段上各点处的力，这样，变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿小弧段 $A_{i-1}A_i$ 所作的功 ΔW_i 可近似地等于常力 $F(\xi_i,\eta_i)$ 沿直线段 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 所作的功：

$$\Delta W_i\approx F(\xi_i,\eta_i)\,\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $$\Delta W_i\approx P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

于是 $$W=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\ \Delta W_i\approx\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\ [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

定义 设 L 为 xOy 面内从点 A 到点 B 的一条有线光滑曲线弧，函数 $P(x,y)$， $Q(x,y)$ 在 L 上有界。用 L 上的点 $A=A_O(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$ ， $A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$,

$A_n(x_n,y_n)=B$ 把 L 分成 n 个有向小弧段 $A_{i-1}A_i$ ，设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ， $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ ，点 (ξ_i,η_i) 为 $A_{i-1}A_i$ 上任意取定的点。如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda\to0$ 时， $\sum_{i=1}^{n}\ [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i]$ 的极限存在（不依赖于曲线的分割与中间点的取法），则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx$.类似地，如果 $\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\ [Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$ 存在，则称此极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y 的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)dy$ 。对坐标的曲线积分也叫第二类曲线积分. 即

$$\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\ [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i]$$

$$\int_L Q(x,y)dy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\ [Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

其中 $P(x,y)$， $Q(x,y)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段。

说明：1、为了指明方向，对坐标的曲线积分也记作 $\int_{L(AB)}P(x,y)dx$,

$\int_{L(AB)} Q(x,y)dy$，L(AB)表示曲线弧由 A 到 B.

2、当 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续时，$\int_L P(x,y)dx$，$\int_L Q(x,y)dy$ 都存在。

3、对坐标的曲线积分常以两种曲线积分的组合形式出现，即

$$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$$

简记为 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 或 $\int_L Pdx+Qdy$

定义的推广: 可以推广到积分弧段为空间有向曲线弧 Γ 的情形：

$$\int_L P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i\ ,$$

$$\int_L Q(x,y,z)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i\ ,$$

$$\int_L R(x,y,z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\ .$$

简写成: $\int_\Gamma P(x,y,z)dx+\int_\Gamma Q(x,y,z)dy+\int_\Gamma R(x,y,z)dz$

$$=\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\ .$$

对坐标的曲线积分的性质:

(1) 如果把 L 分成 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2} Pdx+Qdy\ .$$

(2) 设 L 是有向曲线弧, $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_{-L} P(x,y)dx+Q(x,y)d=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\ .$$

二、对坐标的曲线积分的计算:

定理: 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$在有向曲线弧 L 上连续，L 的参数方程为$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t)\end{cases}$，当参数 t 单调地由$\alpha$变到$\beta$时,点 $M(x,y)$从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, $\varphi(t)$, $\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\phi'^2(t),+\varphi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\varphi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\varphi(t)]\varphi'(t)\}dt$$

证明： 在 L 上取一列点 $A=A_O,A_1\ldots A_{n-1}$，$A_n=B$

它们对应于一列单调变化的参数值 $\alpha=t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n=\beta$

根据对坐标的曲线积分的定义，有 $\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

因为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})$，由微分中值定理，在 t_{i-1} 与 t_i 之间至少存在一点 τ_i，使 $\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})=\phi'(\tau_i)\Delta\tau_i$，即 $\Delta x_i=\phi'(\tau_i)\Delta t_i$，由于 $\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的值与 (ξ_i,η_i) 的选取无关，则有：

$$\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\phi(\tau_i),\varphi'(\tau_i))\phi(\tau_i)\Delta t_i \text{存在，}$$

且有 $\int_L P(x,y)dx=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt$

同理有 $\int_L Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt$

注：

1、 下限 a 对应于 L 的起点, 上限 β 对应于 L 的终点, α 不一定小于 β.

2、 若空间曲线 Γ 由参数方程 $x=\varphi\quad t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 给出, 那么曲线积分

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)]\quad +R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

其中 α 对应于 Γ 的起点, β 对应于 Γ 的终点.

3、L 的方程为 $y=\phi(x)$，则参数方程可认为是 $\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x)\end{cases}$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$$

其中 a 对应于 L 的起点, b 对应于 L 的终点.

同理，L 的方程为 $x=\psi(y)$，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\{P[\psi(y),y]\psi'(y)+Q[\psi(y),y]\}dy$$

其中 c 对应于 L 的起点, d 对应于 L 的终点.

例 8.5. 计算曲线积分 $\int_L(x^2+2xy)dy$，L 为逆时针方向的上半椭圆：

$x = a\cos t, y = b\sin t$，$0 \le t \le \pi$。

解：$\int_L \left(x^2 + 2xy\right)dy = \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t) b\cos t dt$

$= a^2 b\int_0^{\pi} \cos^3 t dt + 2ab^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\sin t dt = \frac{4}{3}ab^2$

例 8.6 计算曲线积分 $I = \int_L 2xy^2 dx + x^3 dy$，其中 L 为从 $o(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段。（1）$y=x$, (2) $y=x^2$ **(3)** $y = x^{\frac{1}{3}}$。

解：（1）$\frac{3}{4}$；**（2）**$\frac{11}{15}$；**（3）**$\frac{17}{20}$

例 8.7 计算 $\oint_{ABCDA} e^{x^2+y^2}\frac{dx+dy}{(|x|+|y|)e^{-2|xy|}}$，其中 ABCDA 是以 A（1,0），B（0,1），C（-1,0），D（0，-1）为顶点的正方形围线。

解：正方形 ABCDA 围线的方程为$|x|+|y|=1$，故

$$\oint_{ABCDA} e^{x^2+y^2}\frac{dx+dy}{(|x|+|y|)e^{-2|xy|}} = \oint_{ABCDA} e^{(|x|+|y|)^2}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} = e\oint_{ABCDA} dx+dy$$

$$\oint_{ABCDA} dx+dy = \int_{AB} dx+dy + \int_{AB} dx+dy + \int_{BC} dx+dy + \int_{CD} dx+dy + \int_{DA} dx+dy$$

=0-2+0+2=0

所以 $\oint_{ABCDA} e^{x^2+y^2}\frac{dx+dy}{(|x|+|y|)e^{-2|xy|}}$**=0。**

例 8.8 计算 $\int_L xydx + (x-y)dy + x^2 dz$，其中 L 是螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 从 $B(-a, 0, \pi b)$ 到 $A(a,0,0)$ 的一段。

解：$\int_L xydx + (x-y)dy + x^2 dz$

$= \int_{\pi}^{0} (-a^3\cos t\sin^2 t + a^2\cos^2 t - a^2\cos t\sin t + a^2 b\cos^2 t)dt$

$= -\frac{1}{2}\pi a^2(1+b)$

例 8.9 从 A 站到 B 站为一水平弯道，在平面坐标系 xoy 中为曲线 L：$y = \frac{1}{2}x^2$，已知机车牵引力大小为 $k = 4.5\times 10^6$ 牛顿，求列车从 A 站到 B 站时，机车所做的功。

解：将列车视为一质点，则机车所做的功相当于质点在 F 作用下从点 A 移动到点 B 时变力 F 所做的功。F 的大小不变，方向改变，F 在点 M 处的方向为点 M 处 L 的切线方向。由导数的几何意

义，切线斜率 $\tan\theta = f'(x) = x$，设切线的单位向量为 l，则

$$l = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\vec{i} + \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\vec{j}$$

于是 $F = kl = \dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}\vec{i} + \dfrac{kx}{\sqrt{1+x^2}}\vec{j}$

所以变力 F 所做的功为

$$W = \int_L \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{kx}{\sqrt{1+x^2}}dy = k\int_{20}^{140}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}})dx$$

$= 4.3204353\times10^{10}$（Nm）

三、两类曲线积分之间的联系

由定义，得

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

其中 $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$，$\dfrac{dy}{ds} = \cos\beta$ 为有向曲线弧 L 上点 (x,y) 处切线方向的方向余弦。

事实上，我们认定曲线的切线方向对应于弧长 s 增加的方向，并设曲线 L 的长度 $\overset{\frown}{AB} = l$，则曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \phi(s) \end{cases}$ $(0 \le s \le l)$。

由对坐标曲线积分的计算法，得

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_0^l \left\{ P[x(s), y(s)]\frac{dx}{ds} + Q[x(s), y(s)]\frac{dy}{ds} \right\}$$

$$= \int_0^l \left\{ P\left[x(s), y(s)\right]\cos\alpha + Q\left[x(s), y(s)\right]\cos\beta \right\}ds \quad (1)$$

又由对弧长曲线积分的计算方法，得

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$= \int_0^l \left\{ P\left[x(s), y(s)\right]\cos\alpha + Q\left[x(s), y(s)\right]\cos\beta \right\}ds \quad (2)$$

故有 $\displaystyle\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$

类似地，空间曲线 Γ 上两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

$$=\int_{\Gamma}\{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}ds=\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

其中 $\boldsymbol{F}=\{P, Q, R\}$，$r_0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为有向曲线弧$\Gamma$上点$(x, y, z)$处单位切向量, $d\boldsymbol{r}=r_0\,ds=\{dx, dy, dz\}$.

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　0　周	课　次	第　次
章　节 名　称	**§ 11.3 格林公式及应用**		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	
教　学 目　的 要　求	熟练掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求全微分的原函数。		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：格林公式及其应用 难点：　应用格林公式计算对坐标的曲线积分		

一、格林公式

单连通与复连通区域:

设 D 为平面区域, 如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D, 则称 D 为平面单连通区域, 否则称为复连通区域.

对平面区域 D 的边界曲线 L, 我们规定 L 的正向如下: 当观察者沿 L 的这个方向行走时, D 内在他近处的那一部分总在他的左边.

区域 D 的边界曲线 L 的方向: 当沿着边界曲线 L 正向（逆时针方向）运动时，区域 D 永远位于它的左侧。

定理 1　设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy \qquad (1)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

证明: 仅就 D 即是 X一型的又是 Y一型的区域情形进行证明.

设 $D=\{(x, y)|\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x), a\le x\le b\}$. 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 所以由二重积分的计算法有

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\}dx=\int_a^b\{P[x,\varphi_2(x)]-P[x,\varphi_1(x)]\}dx.$$

另一方面, 由对坐标的曲线积分的性质及计算法有

$$\oint_L Pdx=\int_{L_1}Pdx+\int_{L_2}Pdx=\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]dx+\int_b^a P[x,\varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi_1(x)]-P[x,\varphi_2(x)]\}dx.$$

因此

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\oint_L Pdx.$$

设 $D=\{(x, y)|\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y), c\le y\le d\}$. 类似地可证

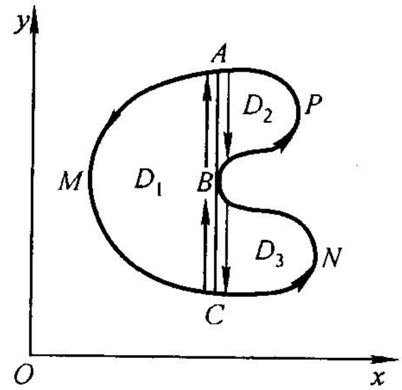
$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint_L Qdx.$$

由于 D 即是 X一型的又是 Y一型的, 所以以上两式同时成立, 两式合并即得

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy.$$

一般情形，即闭区域 D 不满足以上条件，可以在 D 内引进一条或几条辅助曲线，将 D 分成有限个部分闭区域，是每个部分闭区域都满足上述条件即可。

注 1：例如，若区域 $D=D_1+D_2+D_3$，边界 $\widehat{MNPM}$，由格林公式有



$$\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\widehat{MCBAM}} Pdx+\theta dy$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\widehat{ABPA}} Pdx+\theta dy$$

$$\iint\limits_{D_3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\widehat{BCNB}} Pdx+\theta dy$$

$$\therefore \iint_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + \theta dy$$

2、对复连通区域 D, 格林公式右端应包括沿区域 D 的全部边界的曲线积分, 且边界的方向对区域 D 来说都是正向.

设区域 D 的边界曲线为 L, 取 $P=-y$, $Q=x$, 则由格林公式得

$$2\iint_D dxdy = \oint_L xdy - ydx \text{, 或 } A = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx .$$

例 8.10 设 L 是任意一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xydx + x^2 dy = 0 .$$

证: 令 $P=2xy$, $Q=x^2$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$. 因此, 由格林公式有

$\oint_L 2xydx + x^2 dy = \pm \iint_D 0 dxdy = 0$. (为什么二重积分前有“±”号?)

例 8.11.椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta (0 \le t \le 2\pi)$ 所围成图形的面积 A.

分析: 只要 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, 就有 $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \iint_D dxdy = A$.

解: 设 D 是由椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 所围成的区域. 令 $P=-\frac{1}{2}y$, $Q=\frac{1}{2}x$, 则

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

于是由格林公式, $A = \iint_D dxdy = \oint_L -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy = \frac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta) d\theta = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab.$$

例 8.12 应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_L \left(x^3 + xy\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$$

其中 L 是区域 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ 的正向边界。

解: $\oint_L \left(x^3 + xy\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + xy\right) \right] dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^1 dy = \frac{1}{2}$$

例 8.13 计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$取正向。

解：令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$． 则当 $x^2+y^2\neq0$ 时，

有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$．

记 L 所围成的闭区域为 D． 当$(0, 0)\notin D$ 时，由格林公式得$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$；

当$(0, 0)\in D$ 时，在 D 内取一圆周 l: $x^2+y^2=r^2(r>0)$． 由 L 及 l 围成了一个复连通区域 D_1，应用格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

其中 l 的方向取逆时针方向.

于是 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi.$

练习： 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $O(0, 0), A(1, 1), B(0, 1)$为顶点的三角形闭区域.

分析：要使$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$，只需 $P=0$，$Q=xe^{-y^2}$．

解：令 $P=0$，$Q=xe^{-y^2}$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$． 因此，由格林公式有

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int\limits_{OA+AB+BO} xe^{-y^2}dy=\int\limits_{OA} xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

设 G 是一个开区域，$P(x, y)$、$Q(x, y)$在区域 G 内具有一阶连续偏导数． 如果对于 G 内任意指定的两个点 A、B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1、L_2，等式 $\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$ 恒成立，则称曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在 G 内与路径无关，否则说与路径有关.

设曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在 G 内与路径无关，L_1 和 L_2 是 G 内任意两条从点 A 到点 B 的曲线，则有

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy,$$

因为

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy \Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_2} Pdx+Qdy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2^-} Pdx+Qdy=0 \Leftrightarrow \oint_{L_1+(L_2^-)} Pdx+Qdy=0,$$

这里 L_1+(-L_2)一条有向闭合曲线，曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关相当于沿 G 内任意闭曲线 L 的曲线积分 $\oint_L Pdx+Qdy$ 等于零.

定理 2　设开区域 G 是一个单连通域, 函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 G 内具有一阶连续偏导数, 则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立.

证：　充分性易证:

若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, 由格林公式, 对任意闭曲线 L,

有　$\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$.

必要性:　用反证法，设对于 G 内任一闭曲线 L，都有 $\int_L Pdx+Qdy=0$，而在 G 内至少存在一点 $M_0\in G$, 使 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\eta\neq 0$, 不妨设 $\eta>0$, 则由 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 的连续性, 存在 M_0 的一个 δ 邻域 $U(M_0, \delta)$, 使在此邻域内有 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geq\frac{\eta}{2}$. 于是沿邻域 $U(M_0, \delta)$边界 l 的闭曲线积分

$$\oint_l Pdx+Qdy=\iint\limits_{U(M_0,\delta)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\geq\frac{\eta}{2}\cdot\pi\delta^2>0,$$

这与闭曲线积分为零相矛盾, 因此在 G 内 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

注: 1、定理要求, 区域 G 是单连通区域, 且函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 G 内具有一阶连续偏导数. 如果这两个条件之一不能满足, 那么定理的结论不能保证成立.

2、破坏函数 P、Q 及 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续性的点称为奇点.

练习 计算 $\int_L 2xydx+x^2dy$,其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0, 0)$到 $B(1, 1)$的一段弧.

解: 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$ 在整个 xOy 面内都成立。

所以在整个 xOy 面内, 积分 $\int_L 2xydx+x^2dy$ 与路径无关.

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_{OA}2xydx+x^2dy+\int_{AB}2xydx+x^2dy=\int_0^1 1^2dy=1.$$

讨论: 设 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L 的方向为逆时针方向, 问 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$ 是否一定成立?

提示: 这里 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ 和 $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)不连续. 因为当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$,所以如果(0, 0)不在 L 所围成的区域内, 则结论成立, 而当(0, 0)在 L 所围成的区域内时, 结论未必成立.

三、二元函数的全微分求积

曲线积分在 G 内与路径无关, 表明曲线积分的值只与起点从点(x_0, y_0)与终点(x, y)有关.

如果 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关, 则把它记为 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$

即 $\int_L Pdx+Qdy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$.

若起点(x_0, y_0)为 G 内的一定点, 终点(x, y)为 G 内的动点, 则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$$

为 G 内的的函数.

二元函数 $u(x, y)$的全微分为 $du(x, y)=u_x(x, y)dx+u_y(x, y)dy$.

表达式 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 与函数的全微分有相同的结构, 但它未必就是某个函数的全微分.

那么在什么条件下表达式 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某个二元函数 $u(x, y)$的全微分呢? 当这样的二元函数存在时怎样求出这个二元函数呢?

定理 3 设开区域 G 是一个单连通域, 函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 G 内具有一阶连续偏导数, 则 $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x, y)$的全微分的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立.

证明: 必要性: 假设存在某一函数 $u(x, y)$, 使得

$$du=P(x, y)dx+Q(x, y)dy,$$

则有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

因为$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$连续, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, 即$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

充分性: 因为在 G 内$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

在 G 内与路径无关. 在 G 内从点(x_0, y_0)到点(x, y)的曲线积分可表示为

考虑函数 $u(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

因为 $$u(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx=P(x,y).$$

类似地有$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, 从而 $du=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$. 即 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是某一函数的全微分

.

求原函数的公式:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx.$$

例 8.15 算曲线积分

$$\int_L \left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

其中 L 为通过三点（0, 0），,（0, 1）和（1, 2）的圆周。

例 8.16 验证: 在整个 xOy 面内, $3x^2y^2dx+2x^3ydy$ 是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解 这里 $P=3x^2y^2$, $Q=2x^3y$.

因为 P、Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以在整个 xOy 面内，$3x^2y^2dx+2x^3ydy$ 是某个函数的全微分.

取积分路线为从 $O(0, 0)$到 $A(x, 0)$再到 $B(x, y)$的折线，则所求函数为

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}3x^2y^2dx+2x^3ydy=0+\int_0^y 2x^3ydy=x^3y^2\Big|_0^y=x^3y^2.$$

例 8.17 证明曲线积分 $\int_L\left(x^2+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y\right)dy$ 与路径无关，并求曲线积分。

思考与练习:

1.在单连通区域 G 内，如果 $P(x, y)$和 $Q(x, y)$具有一阶连续偏导数，且恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，那么

(1)在 G 内的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是否与路径无关?

(2)在 G 内的闭曲线积分 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是否为零?

(3) 在 G 内 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是否是某一函数 $u(x, y)$的全微分?

2.在区域 G 内除 M_0 点外，如果 $P(x, y)$和 $Q(x, y)$具有一阶连续偏导数，且恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$G_1$ 是 G 内不含 M_0 的单连通区域，那么

(1)在 G_1 内的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是否与路径无关?

(2)在 G_1 内的闭曲线积分 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是否为零?

(3) 在 G_1 内 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 是否是某一函数 $u(x, y)$的全微分?

3. 在单连通区域 G 内，如果 $P(x, y)$和 $Q(x, y)$具有一阶连续偏导数，$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$，但 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 非常简单，那么

(1)如何计算 G 内的闭曲线积分?

(2)如何计算 G 内的非闭曲线积分?

(3)计算 $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，其中 L 为逆时针方向的上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$,

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教 学 后 记	

授课时间	第 14 周	课 次	第 27,28 次		
章 节 名 称	**§11.4 对面积的曲面积分**				
授 课 方 式	理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）			教学 时数	4
教 学 目 的 要 求	1，知识目标：使学生理解对面积的曲面积分的概念及性质；掌握对面积的曲面积分的计算。 2，能力目标：能熟练掌握对面积的曲面积分的计算。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神				
教 学 方 法	讲授				
教 学 重 点 难 点	重点：对面积的曲面积分的概念、性质、计算 难点： 对面积的曲面积分的计算				

教学步骤及内容：

一、对面积的曲面积分的概念与性质

物质曲面的质量问题:

设Σ为面密度非均匀的物质曲面, 其面密度为$\rho(x, y, z)$, 求其质量: 把曲面分成 n 个小块: ΔS_1, ΔS_2 , · · ·, ΔS_n (ΔS_i 也代表曲面的面积); 求质量的近似值: $\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ ((ξ_i, η_i, ζ_i)是ΔS_i 上任意一

点);取极限求精确值: $M=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ (λ为各小块曲面直径的最大值).

定义　设曲面Σ是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$在Σ上有界. 把Σ任意分成 n 小块: $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ (ΔS_i 也代表曲面的面积), 在ΔS_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i), 如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分, 记作 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i .$$

其中 $f(x, y, z)$叫做被积函数, Σ叫做积分曲面.

对面积的曲面积分的存在性:

我们指出当$f(x, y, z)$在光滑曲面Σ上连续时对面积的曲面积分是存在的. 今后总假定$f(x, y, z)$在Σ上连续.

根据上述定义面密度为连续函数$\rho(x, y, z)$的光滑曲面Σ的质量M可表示为$\rho(x, y, z)$在Σ上对面积的曲面积分: $M=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$ 。

如果Σ是分片光滑的我们规定函数在Σ上对面积的曲面积分等于函数在光滑的各片曲面上对面积的曲面积分之和. 例如设Σ可分成两片光滑曲面Σ_1及Σ_2(记作$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$)就规定

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS .$$

对面积的曲面积分的性质:

(1)设 c_1、c_2 为常数, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}[c_1f(x,y,z)+c_2g(x,y,z)]dS=c_1\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS+c_2\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)dS ;$$

(2)若曲面Σ可分成两片光滑曲面Σ_1及Σ_2, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS ;$$

(3)设在曲面Σ上$f(x, y, z)\le g(x, y, z)$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS\le\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)dS ;$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}dS=A$, 其中 A 为曲面Σ的面积.

二、对面积的曲面积分的计算

设曲面Σ的由方程$z=z(x, y)$给出, Σ在xOy面上的投影区域为D, 那么由第七章第五节二重积分的应

用（曲面的面积 P65）可知曲面的面积元素为

$$dA=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy,$$

根据元素法，所以有：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy.$$

化曲面积分为二重积分：设曲面Σ由方程 $z=z(x, y)$给出，Σ在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x, y)$在 D_{xy} 上具有连续偏导数，被积函数 $f(x, y, z)$在Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy. \qquad (1)$$

如果积分曲面Σ的方程为 $y=y(z, x)$，D_{zx} 为Σ在 zOx 面上的投影区域，则函数 $f(x, y, z)$在Σ上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z^2(z,x)+y_x^2(z,x)}dzdx. \qquad (2)$$

如果积分曲面Σ的方程为 $x=x(y, z)$，D_{yz} 为Σ在 yOz 面上的投影区域，则函数 $f(x, y, z)$在Σ上对面积的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}dydz \qquad (3)$$

例 8.18 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS$，其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

解：由被积函数与曲面的对称性，所求积分等于两倍上半球面Σ_1上的积分。即：

$$\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=2\oiint_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS$$

Σ_1 的方程是：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，从而面积微元为

$$dA=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$，曲面Σ_1在 xoy 面上的投影区域 D 为：

$x^2+y^2\le a^2$，由公式（1）有

$$\oiint_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\iint_{D}\frac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{a^3r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=2\pi a^4$$

于是 $\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=4\pi a^4$ 。

如果利用曲面的方程将被积函数化简，并利用球面的面积公式，有

$$\oiint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\oiint_{\Sigma}a^2dS=a^2\oiint_{\Sigma}dS=4\pi a^4$$

例 8.19 设高度为 H，底半径为 R 的直圆柱的质量是均匀分布的（设面密度为 $\mu=1$），求它对底面中心处质量为 m 的质点的引力。

练习：（课后练习题 1、2）

1、 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部.

解 Σ的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，D_{xy}： $x^2+y^2\le a^2-h^2$.

因为 $z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$， $z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy$

$$=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{rdr}{a^2-r^2}=2\pi a[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

提示: $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

2、 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS$，其中Σ是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.

解 整个边界曲面Σ在平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 及 $x+y+z=1$ 上的部分依次记为Σ_1、Σ_2、Σ_3 及Σ_4，于是

$$\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS=\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_2}xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_3}xyzdS+\iint\limits_{\Sigma_4}xyzdS$$

$$=0+0+0+\iint\limits_{\Sigma_4}xyzdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}xy(1-x-y)dxdy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}y(1-x-y)dy=\sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

提示: Σ_4: $z=1-x-y$,

$$dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy.$$

复习思考题、作业题：

<table>
<tr><td colspan="6">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>授课时间</td><td>第　0 周</td><td>课　次</td><td colspan="3">第次</td></tr>
<tr><td>章　节
名　称</td><td colspan="5">§11. 5 对坐标的曲面积分</td></tr>
<tr><td>授　课
方　式</td><td colspan="3">理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）</td><td>教学
时数</td><td></td></tr>
<tr><td>教　学
目　的
要　求</td><td colspan="5">对坐标曲面积分的概念、性质、存在条件及其计算；两类曲面积分的关系</td></tr>
<tr><td>教　学
方　法</td><td colspan="5">讲授</td></tr>
<tr><td>教　学
重　点
难　点</td><td colspan="5">重点：对坐标曲面积分的概念、性质、存在条件及其计算
难点：　对坐标曲面积分的计算</td></tr>
</table>

一、对坐标的曲面积分的概念与性质

有向曲面: 通常我们遇到的曲面都是双侧的. 例如由方程 $z=z(x, y)$ 表示的曲面分为上侧与下侧. 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为曲面上的法向量, 在曲面的上侧 $\cos\gamma>0$, 在曲面的下侧 $\cos\gamma<0$. 闭曲面有内侧与外侧之分.

类似地, 如果曲面的方程为 $y=y(z, x)$,则曲面分为左侧与右侧, 在曲面的右侧 $\cos\beta>0$, 在曲面的左侧 $\cos\beta<0$. 如果曲面的方程为 $x=x(y, z)$, 则曲面分为前侧与后侧, 在曲面的前侧 $\cos\alpha>0$, 在曲面的后侧 $\cos\alpha<0$.

设Σ是有向曲面. 在Σ上取一小块曲面ΔS, 把ΔS投影到 xOy 面上得一投影区域, 这投影区域的面积记为$(\Delta\sigma)_{xy}$.假定ΔS上各点处的法向量与 z 轴的夹角γ的余弦 $\cos\gamma$有相同的符号(即 $\cos\gamma$都是正的或都是负的). 我们规定ΔS在 xOy 面上的投影$(\Delta S)_{xy}$为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma>0\\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \cos\gamma<0\\ 0 & \cos\gamma\equiv 0\end{cases},$$

其中 $\cos\gamma\equiv 0$ 也就是$(\Delta\sigma)_{xy}=0$ 的情形. 类似地可以定义ΔS在 yOz 面及在 zOx 面上的投影$(\Delta S)_{yz}$及$(\Delta S)_{zx}$.

流向曲面一侧的流量: 设稳定流动的不可压缩流体的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x, y, z)=(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

给出, Σ是速度场中的一片有向曲面, 函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$都在Σ上连续, 求在单位时间内流向Σ指定侧的流体的质量, 即流量Φ.

如果流体流过平面上面积为 A 的一个闭区域，且流体在这闭区域上各点处的流速为(常向量) $\boldsymbol{v}$，又设 $\boldsymbol{n}$ 为该平面的单位法向量，那么在单位时间内流过这闭区域的流体组成一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体.

当 $(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，这斜柱体的体积为 $A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

当 $(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时，显然流体通过闭区域 A 的流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量 Φ 为零，而 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故 $\Phi=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$;

当 $(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$，这时我们仍把 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 称为流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量，它表示流体通过闭区域 A 实际上流向 $-\boldsymbol{n}$ 所指一侧，且流向 $-\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量为 $-A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$. 因此，不论 $(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})$ 为何值，流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量均为 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

把曲面 Σ 分成 n 小块：ΔS_1，ΔS_2，· · ·，ΔS_n(ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积). 在 Σ 是光滑的和 $\boldsymbol{v}$ 是连续的前提下，只要 ΔS_i 的直径很小，我们就可以用 ΔS_i 上任一点 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 处的流速

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)=P(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{j}+R(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其它各点处的流速，以该点 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 处曲面 Σ 的单位法向量

$$\boldsymbol{n}_i=\cos\alpha_i\ \boldsymbol{i}+\cos\beta_i\ \boldsymbol{j}+\ \cos\gamma_i\ \boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其它各点处的单位法向量. 从而得到通过 ΔS_i 流向指定侧的流量的近似值为 $\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,n)$

于是，通过 Σ 流向指定侧的流量

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i\,,$$

但 $\cos\alpha_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{yz}$，$\cos\beta_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{zx}$，$\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{xy}$，

因此上式可以写成

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]\,;$$

令 $\lambda\to0$ 取上述和的极限，就得到流量 Φ 的精确值. 这样的极限还会在其它问题中遇到. 抽去它们的具体意义，就得出下列对坐标的曲面积分的概念.

定义　设 Σ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x,\ y,\ z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积). 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，$(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to0$ 时，$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ 总存在，则称此极限为函数 $R(x,\ y,\ z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、y 的曲面积分:，记作 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$，

即 $$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

类似地有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}.$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

其中 $R(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ叫做积分曲面.

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

对坐标的曲面积分的存在性: P,Q,R 在**光滑的曲面Σ上连续。**

对坐标的曲面积分的简记形式:

在应用上出现较多的是

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

流向Σ指定侧的流量Φ可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

一个规定: 如果Σ是分片光滑的有向曲面, 我们规定函数在Σ上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑曲面上对坐标的曲面积分之和.

对坐标的曲面积分的性质:

对坐标的曲面积分具有与对坐标的曲线积分类似的一些性质. 例如

(1) 如果把Σ分成Σ_1和Σ_2, 则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

(2) 设Σ是有向曲面, $-\Sigma$表示与Σ取相反侧的有向曲面, 则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

这是因为如果$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$是$\Sigma$的单位法向量, 则$-\Sigma$上的单位法向量是 $-\boldsymbol{n}=(-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma)$.

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$=-\iint_{\Sigma}\{P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\}dS$$
$$=-\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

二、对坐标的曲面积分的计算法

将曲面积分化为二重积分: 设积分曲面Σ由方程 $z=z(x, y)$给出的, Σ在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 函数 $z=z(x, y)$在 D_{xy}上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$在Σ上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\ ,$$

其中当Σ取上侧时, 积分前取"+"; 当Σ取下侧时, 积分前取"−".

这是因为, 按对坐标的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\ .$$

当Σ取上侧时, cos $\gamma>0$, 所以$(\Delta S_i)_{xy}=(\Delta\sigma_i)_{xy}$.

又因(ξ_i, η_i, ζ_i)是Σ上的一点, 故$\zeta_i=z(\xi_i, \eta_i)$. 从而有

$$\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}=\sum_{i=1}^{n}R[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)](\Delta\sigma_i)_{xy}\ .$$

令$\lambda\to 0$取上式两端的极限, 就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\ .$$

同理当Σ取下侧时, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\ .$$

因为当Σ取上侧时, $\cos\gamma>0$, $(\Delta S_i)_{xy}=(\Delta\sigma_i)_{xy}$. 当$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in$Σ时, $\zeta_i=z(\xi_i, \eta_i)$. 从而有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)](\Delta\sigma_i)_{xy}=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\ .$$

同理当Σ取下侧时, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\ .$$

这是因为 n=(cosα, cosβ, cosγ) $=\pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\{-z_x,-z_y,1\}$,

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\cos\gamma dS=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

类似地, 如果Σ由 $x=x(y, z)$给出, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz.$$

如果Σ由 $y=y(z, x)$给出, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint\limits_{D_{zx}}Q[x,y(z,x),z]dzdx.$$

应注意的问题: 应注意符号的确定.

例 1、计算对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy$，其中曲面Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部下侧。

解：下半球面的方程为 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，因Σ是下半球面下侧，故取负号，$D_{xy}:x^2+y^2\le R^2$，所以

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2z(x,y)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^R r^5\sqrt{a^2-r^2}dr=\frac{2}{105}\pi a^7$$

例 2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$ ，其中Σ是长方体Ω的整个表面的外侧，Ω=((x, y, z) |0≤x≤a, 0≤y≤b, 0≤z≤c).

解: 把Ω的上下面分别记为Σ_1和Σ_2; 前后面分别记为Σ_3和Σ_4; 左右面分别记为Σ_5和Σ_6.

Σ_1: $z=c$ ($0\le x\le a$, $0\le y\le b$) 的上侧;

Σ_2: $z=0$ ($0\le x\le a$, $0\le y\le b$) 的下侧;

Σ_3: $x=a$ ($0\le y\le b$, $0\le z\le c$) 的前侧;

Σ_4: $x=0$ ($0\le y\le b$, $0\le z\le c$) 的后侧;

Σ_5: $y=0$ ($0\le x\le a$, $0\le z\le c$) 的左侧.

Σ_6: $y=b$ ($0\le x\le a$, $0\le z\le c$) 的右侧;

除Σ_3、Σ_4外, 其余四片曲面在 $y0z$ 面上的投影为零, 因此

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz=\iint\limits_{\Sigma_3} y^2dydz+\iint\limits_{\Sigma_4} x^2dyd=\iint\limits_{D_{yz}} a^2dydz-\iint\limits_{D_{yz}} 0dydz=a^2bc\ .$$

类似地可得

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2dzdx=b^2ac\,,\quad \iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=c^2ab\,.$$

于是所求曲面积分为$(a+b+c)abc$.

练习:(P114。3) 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$, 其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0$, $y\geq 0$ 的部分.

解 把有向曲面Σ分成以下两部分:

Σ_1: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$的上侧,

Σ_2: $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$的下侧.

Σ_1和Σ_2在 xOy 面上的投影区域都是 D_{xy}: $x^2+y^2\leq 1\,(x\geq 0,\ y\geq 0)$.

于是 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy+\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{2}{15}\,.$$

三、两类曲面积分之间的联系

设积分曲面Σ由方程 $z=z(x,\ y)$给出的, Σ在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 函数 $z=z(x,\ y)$在 D_{xy}上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x,\ y,\ z)$在Σ上连续.

如果Σ取上侧, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\,.$$

另一方面, 因上述有向曲面Σ的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,,\quad \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,,\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,,$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS=\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy\,.$$

由此可见, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS .$$

如果Σ取下侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy .$$

但这时 $\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, 因此仍有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS ,$$

类似地可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS ,$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\beta dS .$$

综合起来有

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS ,$$

其中 $\cos\ \alpha$、$\cos\ \beta$、$\cos\ \gamma$是有向曲面Σ上点$(x,\ y,\ z)$处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可写成如下向量的形式:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}dS ,\ 或 \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma} A_n dS ,$$

其中 $\boldsymbol{A}=(P,\ Q,\ R)$, $\boldsymbol{n}=(\cos\ \alpha,\ \cos\ \beta,\ \cos\ \gamma)$是有向曲面Σ上点$(x,\ y,\ z)$处的单位法向量, $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS=(dydz,\ dzdx,\ dxdy)$, 称为有向曲面元, A_n为向量 $\boldsymbol{A}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影.

例 3　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$, 其中Σ是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解　由两类曲面积分之间的关系, 可得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha dS=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy .$$

在曲面Σ上,

提示: 曲面上向下的法向量为$(x,\ y,\ -1)$)

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} ,\ \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} ,\ dS=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy .$$

故 $$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)rdr=8\pi.$$

解：由两类曲面积分之间的关系，可得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot x-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot(-1)\}dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2dxdy+\iint_{x^2+y^2\le 4}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)rdr=8\pi.$$

提示： $\iint_{x^2+y^2\le 4}\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2dxdy=0$

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　0 周	课　次	第 次
章　节名　称	**§11.6 高斯公式，斯托克斯公式**		
授　课方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学时数	
教　学目　的要　求	了解高斯公式，会用高斯公式计算第二类曲面积分； 了解斯托克斯公式，会用斯托克斯公式计算第二类曲线积分。		
教　学方　法	讲授		
教　学重　点难　点	重点：高斯公式的应用 难点：高斯公式的应用		

利用格林公式可将平面闭区域上的二重积分转化为其边界曲线上的曲线积分；高斯公式则将空间闭区域上的三重积分表示成为其边界曲面上的曲面积分。

一、高斯公式

定理 1 设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\,,$$

或 $$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\,。$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧， $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是Σ在点(x, y, z)处得法向量的方向余弦。

简要证明 设Ω是一柱体，上边界曲面为Σ_1: $z=z_2(x, y)$，下边界曲面为Σ_2:　$z=z_1(x, y)$，侧面为柱面Σ_3, Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧; Σ_3 取外侧.

根据三重积分的计算法，有

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy\,.$$

另一方面，有

$$\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy\,,$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma_3} R(x,y,z)dxdy = 0,$$

以上三式相加，得

$$\oiint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} \{R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy \ .$$

所以 $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy \ .$$

类似地有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz \ ,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx \ ,$$

把以上三式两端分别相加，即得高斯公式.

例 1 利用高斯公式计算曲面积分（P116）

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 - yz)dydz - 2x^2 ydzdx + zdxdy$$

其中Σ是三个坐标面与平面 $x = a, y = a, z = a (a > 0)$ 所围成立方体表面的外侧.

例 2 计算 $\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中Σ为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧。

练习：1、(P117:1) 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz$，其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧.

解 这里 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y - z \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \ , \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \ .$$

由高斯公式，有

$$\oiint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)dydz$$

$$= \iiint_{\Omega} (y-z)dxdydz = \iiint_{\Omega} (\rho\sin\theta - z)\rho d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)dz=-\frac{9\pi}{2}.$$

2 (P118:2)计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h$ ($h>0$)之间的部分的下侧，cosα、cosβ、cosγ是Σ上点(x, y, z)处的法向量的方向余弦.

解　设Σ_1为 $z=h(x^2+y^2\leq h^2)$的上侧，则Σ与Σ_1一起构成一个闭曲面，记它们围成的空间闭区域为Ω，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)dz=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}zdz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}(h^2-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{2}\pi h^4$$

提示: $\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y)dz=0$.

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}h^2dxdy=\pi h^4$,

因此 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4$.

例 3　设函数 $u(x, y, z)$和 $v(x, y, z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数，证明

$$\iiint\limits_{\Omega}u\Delta vdxdydz=\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz,$$

其中Σ是闭区域Ω的整个边界曲面，$\frac{\partial v}{\partial n}$为函数 $v(x, y, z)$沿Σ的外法线方向的方向导数，符号 $\Delta=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯算子. 这个公式叫做格林第一公式.

证: 因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 cosα、cosβ、cosγ是Σ在点(x, y, z)处的外法线向量的方向余弦. 于是曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\oiint\limits_{\Sigma}u(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma)dS$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}[(u\frac{\partial v}{\partial x})\cos\alpha+(u\frac{\partial v}{\partial y})\cos\beta+(u\frac{\partial v}{\partial z})\cos\gamma]dS.$$

利用高斯公式, 即得

$$\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\iiint_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial v}{\partial z})]dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega} u\Delta v dxdydz+\iiint_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dxdydz\,,$$

将上式右端第二个积分移至左端便得所要证明的等式。

二、斯托克斯公式（曲面Σ上的曲面积分与沿着Σ的边界曲线所做的曲线积分之间的联系。）

定理 2　设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面, Γ的正向与Σ的侧符合右手规则, 函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在曲面Σ(连同边界)上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

记忆方式:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz\,,$$

或

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz\,,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲面Σ的单位法向量.

例 4　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz\,,$$

其中Γ是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ 的表面所得的截痕, 若从 x 轴的正向看去取逆时针方向.

解　取Σ为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的上侧被Γ所围成的部分, Σ的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 即 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 按斯托克斯公式, 有

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS\,.$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\Sigma}dS=-2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy,$$

其中 D_{xy} 为Σ在 xOy 平面上的投影区域, 于是 $I=-6\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-6\cdot\frac{3}{4}=-\frac{9}{2}$.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=-2\iint\limits_{\Sigma}(y+z)dydz+(x+z)dzdx+(x+y)dxdy$$

提示 : $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=-\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)$. $dS=\sqrt{1^2+1^2+1^2}dxdy$.

$$I=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\Sigma}dS=-2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=-6\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-\frac{9}{2}$$

例 5 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint\limits_{\Gamma}zdx+xdy+ydz$, 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.

解 按斯托克斯公式, 有

$$\oint\limits_{\Gamma}zdx+xdy+ydz=\iint\limits_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy.$$

由于Σ的法向量的三个方向余弦都为正, 又由于对称性, 上式右端等于 $3\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma$, 其中 D_{xy} 为 xOy 面上由直线 $x+y=1$ 及两条坐标轴围成的三角形闭区域, 因此

$$\oint\limits_{\Gamma}zdx+xdy+ydz=\frac{3}{2}.$$

解 设Σ为闭曲线Γ所围成的三角形平面, Σ在 yOz 面、zOx 面和 xOy 面上的投影区域分别为 D_{yz}、D_{zx} 和 D_{xy}, 按斯托克斯公式, 有

$$\oint\limits_{\Gamma}zdx+xdy+ydz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy=\iint\limits_{D_{yz}}dydz+\iint\limits_{D_{zx}}dzdx+\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=3\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{3}{2}.$$

讨论: 如果Σ是 xOy 面上的一块平面闭区域, 斯托克斯公式将变成什么?

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　15　周	课　次	第 29,30 次
章　节 名　称	**§12.1 常数项级数的概念与性质**		

授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件. 2，能力目标：能熟练判断级数的敛散性。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：级数收敛与发散概念，尤其是级数收敛的必要条件 难点：用级数收敛性及基本性质判别一些级数收敛性问题.		

教学步骤及内容：

一.　常数项级数的概念

通过实际的例子（学生原有的知识背景：计算圆的面积），抽象内容和具体例子的结合，比较自然地引入级数的基本概念

定义 1 设有数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n\cdots$，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 为常数项级数，简称常数项级数。

其中 u_n 称为级数的通项(或一般项或第 n 项)；$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 称为级数的部分和(或前 n 项和)；$\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列.

由部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性有：

定义 2 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，且极限值为 s，即 $\lim_{n\to\infty} S_n=s$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限值 s 称为此级数的和,此时

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n= u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

当 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在时，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当级数收敛时，其部分和 S_n 与级数的和 S 近似相等，它们的差 $S-S_n$ 称为级数的余项，记为

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

例 1　讨论如下几何级数（又称为等比级数）的敛散性。

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

解 如果$|q| \neq 1$，则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

当$|q| < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$，几何级数收敛；

当$|q| > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，几何级数发散；

当$q = 1$时，$S_n = na$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，几何级数发散；

当$q = -1$时，这时级数成为$a - a + a - a + a - \cdots$，其部分和为

$$S_n = \begin{cases} 0\text{，当}n\text{为偶数时；} \\ a\text{，当}n\text{为奇数时，} \end{cases}$$

所以此时S_n的极限不存在，级数发散。

根据以上的讨论，可以得到几何级数的敛散性：

当$|q| < 1$时，几何级数收敛，且其和$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q| \geq 1$时，几何级数发散.

例 2 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1\bullet 2} + \dfrac{1}{2\bullet 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots$的敛散性.

解：由于 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$，所以，$S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$

于是级数收敛于和 1.

例 3 正整数构成的的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$是发散的。

例 4 判定级数$0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots + 0.000\cdots 3 + \cdots$的敛散性。

例 5 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性.

解 该级数的前n项的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$，所以级数收敛。

二、无穷级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S、W，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=S\pm W$

证明:设Σu_n、Σv_n和$\Sigma(u_n\pm v_n)$的部分和分别为S_n、σ_n和τ_n,

则 $\tau_n=S_n\pm\sigma_n\to s\pm\sigma$ $(n\to\infty)$.

从而得到:两个收敛的级数可以逐项相加和逐项相减.

发散的级数不满足此条性质,例如

当$a\neq0$时,级数Σa和$\Sigma(-a)$都发散,但$\Sigma[a+(-a)]=0$.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（发散），k为任一常数且$k\neq0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛（发散），且收敛时有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。

证明:设Σu_n和Σku_n的部分和分别为S_n和σ_n,则$\sigma_n=kS_n$.

由 $S_n\to s$,得 $\sigma_n=kS_n\to ks\,(n\to\infty)$

又当$k\neq0$时,若$\{S_n\}$不存在极限,则$\{S_n\}$也不存在极限.

即级数的每一项同乘以一个非零常数，其敛散性不变.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2^n}$ 的敛散性.

解 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}7\times\frac{1}{2^n}$ 而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2^n}$ 收敛，由性质 2 得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2^n}$也收敛.

性质 3 在级数的前面加上、去掉或改变有限项，不影响级数的敛散性．但是级数收敛时，两级数的和未必相同。

证明:只需证明“在级数的前面部分去掉或加上有限项,不会改变级数的敛散性”,其它情形(即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形)都可以看成在级数的前面部分先去掉有限项,然后再加上有限项的结果.

将级数 $u_1+u_2+\cdots+u_k+\ u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$ 的前 k 项去掉, 得新级数:

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

设 Σu_n 的部分和为 S_n, 则新级数的部分和为

$$\sigma_n=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}=S_{n+k}-S_k$$

由于 S_k 为常数, 所以 $\{\sigma_n\}$ 和 $\{S_{n+k}\}$ 同时收敛或同时发散. 同样可以证明在级数的前面加上有限项, 也不会改变级数的敛散性.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则对其各项间任意添加括号后所得的级数仍收敛，且其和不变.

注意 当原级数收敛时，任意括号后所得到新级数也收敛，反之则不然．如果加括号后的级数收敛，则原来级数未必收敛.

例如，将发散级数 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$ 的相邻两项加括号，则

$$(a-a)+(a-a)+\cdots+(a-a)+\cdots=0$$

得到的新级数收敛．然而，重新加括号

$$a-(a-a)-(a-a)-\cdots-(a-a)-\cdots=a$$

得到的新级数不收敛。

三、级数收敛的必要条件

级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则极限 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

证明: 设 Σu_n 的部分和为 S_n, 且 $S_n\to s\,(n\to\infty)$,

则 $u_n=S_n-S_{n-1}\to s-s=0\,(n\to\infty)$

由此可知, 若 $u_n \not\to 0 \quad (n\to\infty)$, 则级数 Σu_n 必定发散.

它的逆否命题是：**若级数一般项不趋向于零，该级数发散**．常用来判断一个级数的发散．例如 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

例 7、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$ 发散，$\because \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$

例 8、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n-3^n}$ 发散，$\because \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n-3^n}=-1\neq 0$

复习思考题、作业题：
下次课预习要点

教　学 后　记	

授课时间	第　16　周	课　次	第 31,32 次		
章　节 名　称	§12.2 常数项级数的审敛法				
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）			教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：掌握数项级数收敛性的判别方法. 2，能力目标：能熟练正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，级数的莱布尼兹判别法。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神				
教　学 方　法	讲授				
教　学 重　点 难　点	重点：正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，级数的莱布尼兹判别法，绝对收敛与条件收敛的概念. 难点：任意项级数收敛性的判别方法.				

教学步骤及内容：

一般情况下，利用定义或级数的性质来判别级数的敛散性是很困难的，可否有更简单易行的判别方法呢？由于级数的敛散性可较好地归结为正项级数的敛散性问题，因而正项级数的敛散性判定就显得十分地重要。

一、正项级数及其审敛法

定义 1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的每一项都是非负的（即 $u_n \geq 0$，$n = 1,2,\cdots$），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**.

对于正项级数，由于$u_n \geq 0$，因而$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$

必为单调增加数列，即$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \cdots$

如果部分和数列$\{S_n\}$有界，则由数列极限存在准则知道，单调有界数列必有极限，所以$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$存

在，此时正项级数收敛；反之，若正项级数收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则数列$\{S_n\}$必有界，由此得到如下定理：

定理 1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：它的前$n$项部分和数列$\{s_n\}$有界.

借助于正项级数收敛的充分必要条件，我们可建立一系列具有较强实用性的正项级数审敛法.

1、**（比较审敛法）** 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n\le v_n\quad(n=1,2,\cdots)$

则：1）如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$亦收敛；2）如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$亦发散.

证（1）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛于$\sigma$，且$u_n\le v_n$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$s_n$满足

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\le v_1+v_2+\cdots+v_n\le\sigma$$

即单调增加的部分和数列$\{s_n\}$有上界. 由定理 1 可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则它的前$n$项部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

因$u_n\le v_n$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的前$n$项部分和

$$\sigma_n=v_1+v_2+\cdots+v_n\ge u_1+u_2+\cdots+u_n=s_n$$

所以当$n\to\infty$时$\sigma_n\to+\infty$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

由于级数的每一项同乘以一个非零常数，以及去掉级数的有限项不改变级数的敛散性，因而比较审敛法又可表述如下：

推论 1 设C为正数，N为正整数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且

$u_n\le Cv_n\quad(n=N,N+1,\cdots)$，则：

1） 如$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$亦收敛；2） 如$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$亦发散.

例 1 判定调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots$$

$$>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots++\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是发散的，故有比较判别法知，调和级数发散。

例 2 讨论$p-$级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中$p>0$.

解 （1）若$0<p\le 1$，则$n^p\le n$，可得$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$；又因调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由定理 2 知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.

（2）若$p>1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots\frac{1}{15^p}\right)+\cdots+$$

$$(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p})+\cdots$$

$$\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+(\frac{1}{2^{p-1}})^2+(\frac{1}{2^{p-1}})^3+\cdots+(\frac{1}{2^{p-1}})^{n-1}+\cdots$$

$$s_{2^n-1}\le\frac{1-(\frac{1}{2^{p-1}})^n}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}\le\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}(p>1,\frac{1}{2^{p-1}}<1)$$

即 s_{2^n-1} 有上界，又对任意 n 有 $n\le 2^{n-1}$，所以 $s_n\le s_{2^n-1}$，故 s_n 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p>1$）是收敛的。

综上讨论，**当 $0<p\le 1$ 时，$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是发散的；当 $p>1$ 时，$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是收敛的**. $p-$级数是一个很重要的级数，在解题中往往会充当比较审敛法的比较对象，其它的比较对象主要有几何级数、调和级数等.

例 3 判定级数的敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots$$

解：因为 $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots)$,故收敛。

例 4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$ 的敛散性.

解 （1）当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 的通项 $\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 是一个公比为 $\frac{1}{a}$ 的等比级数，且 $\frac{1}{a}$<1，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛；

（2）当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 的通项 $\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

（3）当 $a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 的通项 $\frac{1}{1+a^n}>\frac{1}{2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

例 5 设$a_n \le b_n \le c_n (n=1,2,\cdots)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛.

证 因$a_n \le b_n \le c_n$，$n=1,2,\cdots$，可得$0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$；而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛，由级数收敛的性质知$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$收敛，再由比较审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$收敛. 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n - a_n) + a_n]$$

故可得级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛.

例 6 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$的敛散性。

（$1-\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \le 2(\frac{\pi}{2n})^2 = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$）

推论 2*（比较审敛法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为两个正项级数，如果两级数的通项u_n, v_n满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$ ，则

1） 当$0 < l < +\infty$时，同时收敛或同时发散；

2） 当$l = 0$时，如果$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

3） 当$l = +\infty$时，如果$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散。

证 由极限的定义，取$\varepsilon = \frac{l}{2}$，存在着自然数$N$，当$n > N$时，有不等式

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \frac{l}{2}$$

成立，可得$\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3l}{2}$，即$\frac{l}{2}\cdot v_n < u_n < \frac{3l}{2}\cdot v_n$；再由推论 1 即得结论.

练习： 判别级数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-2}$　　　　　　　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$

的敛散性.

解　（1）因 $\frac{n}{n^2-2}>\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-2}$ 发散；

（2）因 $\ln(1+\frac{1}{n^2})<\frac{1}{n^2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 收敛.

2、极限审敛法　**设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，则**

（1）$\lim_{n\to\infty}nu_n=l$ 或 $\lim_{n\to\infty}nu_n=+\infty$。则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（2）若存在 $p>1,$ 使 $\lim_{n\to\infty}n^p u_n$ 存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

例 7　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性。（$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$）。

例 8　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的敛散性。

因为 $\lim_{n\to\infty}n^2\ln(1+\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=\ln e=1$，所以级数收敛。

3、比值审敛法（达朗贝尔判别法）

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$　，　则：

（1）当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）当 $\rho>1$（或 $\rho=+\infty$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性用此法无法判定.

证 （1） 当$\rho<1$时，则可取一足够小的正数ε，使得 $\rho+\varepsilon=r<1$；又因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，据极限的定义，对正数$\varepsilon$，存在自然数$N$，当$n>N$时，使得 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$ 成立，即

$$-\varepsilon+\rho<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\varepsilon+\rho$$

则有$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r$，可得 $u_{n+1}<r\cdot u_n\ \ (n=N+1,\ N+2,\cdots)$

即有

$$u_{N+1}<r\cdot u_N$$

$$u_{N+2}<r\cdot u_{N+1}<r^2\cdot u_N$$

$$u_{N+3}<r\cdot u_{N+2}<r^2u_{N+1}<r^3\cdot u_N$$

$$\cdots$$

则相加有

$$u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots<r\cdot u_N+r^2\cdot u_N+r^3\cdot u_N+\cdots$$

因$0<r<1$，得级数$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$收敛，再由级数得性质得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2） 当$\rho>1$时，存在充分小的正数ε，使得$\rho-\varepsilon>1$，同上由极限定义，当$n>N$时，有$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1$ 即$u_{n+1}>u_n$，因此当$n>N$时，级数$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$的一般项是逐渐增大的，故它不趋向于零，由级数收敛的必要条件知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（3）当$\rho=1$时，级数可能收敛，也可能发散. 如对于$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，不论$p$取何值，总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^p}\bigg/\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$$

但是，该级数却在$p>1$时收敛， $p\leq 1$时发散.

例 9 判定下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n n!}{n^n}(c>0)$

解：（1）因 $u_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)}$，故 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$

由比值审敛法知该级数是收敛的.

（2）因 $u_n=\frac{n^n}{n!}$，故 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$

由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 是发散的.

（3）因 $u_n=n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$，故

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$

由比值审敛法知该级数是收敛的。

（4）因 $u_n=\frac{c^n n!}{n^n}$，$u_{n+1}=\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$ 故

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{c^n n!}=\lim_{n\to\infty}c\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{c}{e}$$

所以 当 $\frac{c}{e}<1$，即 $0\le c<e$ 时，级数收敛；当 $\frac{c}{e}>1$，即 $c>e$ 时，级数发散；当 $\frac{c}{e}=1$，比值审敛法失效。

练习：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}$

解：因 $u_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}$，故 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot2n}{2n\cdot(2n+1)}=1$

用比值法无法确定该级数的敛散性；注意到 $2n>2n-1\ge n$，可得 $(2n-1)\cdot2n>n^2$，即 $\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}<\frac{1}{n^2}$；而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}$ 收敛.

4、根值审敛法或柯西审敛法

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，　则：

（1）当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）当$\rho>1$（或$\rho=+\infty$）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（3）当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性用此法无法判定.

证 （1）当$\rho<1$时，可取一足够小的正数ε，使得 $\rho+\varepsilon=r<1$；据极限的定义，存在自然数N，当$n>N$时有　$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=r$

即$u_n<r^n$；而等比级数$\sum_{n=N+1}^{\infty}r^n$（$0<r<1$）是收敛的，由比较判别法知$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n$收敛；再由级数的性质得级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）当$\rho>1$时，同理存在充分小的正数ε，使得$\rho-\varepsilon>1$，据极限定义，当$n>N$时有$\sqrt[n]{u_n}>\rho-\varepsilon>1$，即$u_n>1$，因此级数的一般项不趋向于零, 由级数收敛的必要条件知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（3）当$\rho=1$时，级数可能收敛，也可能发散. 如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，但

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\text{。}$$

例 10 判定下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中$\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 且$a,b,a_n>0$

解：（1）因$u_n=\dfrac{1}{[\ln(1+n)]^n}$，则$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}=0<1$

故原级数收敛.

（2）因$u_n=(\dfrac{b}{a_n})^n$，则$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$，所以

当$\dfrac{b}{a}<1$，即$b<a$时，原级数收敛；当$\dfrac{b}{a}>1$，即$b>a$时，原级数发散；当$\dfrac{b}{a}=1$，即$b=a$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而原级数发散。

练习：判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$的敛散性.

解 因$u_n=\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$，则$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}}=\dfrac{1}{2}<1$

故原级数收敛.

注：对于利用比值审敛法与根值审敛法失效的情形(即$\rho=1$时)，其级数的敛散性应另寻它法加以判定，通常可用构造更精细的比较级数来判别.

二.交错级数及其审敛法

1. **定义** 2

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$ （u_n＞0）

或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots+(-1)^{n}u_n+\cdots$ （u_n＞0）

为交错级数.

2. **定理 2.(莱布尼茨(Leibniz)定理)**

如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件:

1） $u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$； 2） $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

则级数收敛,且其和 $s\leqslant u_1$,其余项的绝对值满足:$|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证明:设级数的部分和为 S_n,则

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}) \quad (1)$$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n} \quad (2)$$

由条件 1）可知:（1）、（2）两式中括号内两数的差都是非负的,于是 由（1）知: $\{S_{2n}\}$ 单调上升,且 $S_{2n}\geqslant 0$;

由（2）知: $S_{2n}\leqslant u_1$;

根据单调有界数列必有极限可知数列$\{S_{2n}\}$存在极限,记为 s.

且显然 $s\leqslant u_1$.又由于 $S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}$, 而 $u_{2n+1}\to 0,(n\to\infty)$

所以:$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}\to s,(n\to\infty)$.

由于:$S_{2n+1}\to s$, $S_{2n}\to s,(n\to\infty)$,所以:$S_n\to s \quad (n\to\infty)$.

即交错级数收敛,且其和 $s\leqslant u_1$.

又由于此时余项: $r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots)$所以:

$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots$

也是一个交错级数,且满足交错级数的条件,从而且和应小于级数的第一项,即有: $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

例 11 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$的敛散性.

解:由于 $u_n=1/n>1/(n+1)=u_{n+1}$,且 $u_n\to 0,(n\to\infty)$,所以级数收敛.

且知其和 s<1,以 $s_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$代替 s 产生的误差 r_n满足$|r_n|\leqslant 1/(n+1)$.

例 12 断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$的敛散性.

解: 级数为交错级数,

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$;

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则有 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

故当 $x\geqslant 3$ 时,有 $f'(x)\geqslant 0$,从而当 $x\geqslant 3$ 时,$f(x)$单调上升,于是当 $n\geqslant 3$ 时,有 $u_n=\ln n/n >$ $\ln(n+1)/(n+1)=u_{n+1}$.所以该级数收敛.

三. 绝对收敛与条件收敛

设有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数，那么该级数叫做任意项级数．可见，交错级数是任意项级数的一种特殊形式.

对任意项级数，我们给每项加上绝对值符号构造一个正项级数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots,$$

任意项级数的敛散性判定涉及绝对收敛与条件收敛.

定义 3 设有任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛 ； $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是条件收敛。

由任意项级数各项的绝对值组成的级数是正项级数，因此，一切判别正项级数敛散性的方法，都可以用来判别任意项级数是否绝对收敛.

2．定理 3 若 Σu_n 绝对收敛, 则 Σu_n 必定收敛.

证明: 设 Σu_n 绝对收敛, 即 $\Sigma |u_n|$ 收敛.

记: $W_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$, $V_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$.

显然: $0 \leqslant W_n, V_n \leqslant |u_n|$,

由于 $\Sigma |u_n|$ 收敛, 所以正项级数 ΣW_n 和 ΣV_n 收敛.

因为: $u_n= W_n-V_n$, 由级数的性质可知: 级数 Σu_n 收敛.

注: 1）上述定理的逆不成立; 例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

2）对 Σu_n 敛散性的判断, 可以转化为对正项级数 $\Sigma |u_n|$ 的敛散性的判断;

3）当 $\Sigma |u_n|$ 发散时, 不能断定 Σu_n 发散, 但当用比值法或根值法得到正项级数 $\Sigma |u_n|$ 发散时, 则可断定级数 Σu_n 发散. (此时有 $|u_n| \not\to 0, n\to\infty$), 从而 $u_n \not\to 0, (n\to\infty)$

例 13 判断下列级数的敛散性, 并指明是绝对收敛还是条件收敛。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

解:（1） 因为 $|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$，而调和级数（去掉第一项）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散。而原级数为交错级数，且满足莱布尼兹定理，故收敛，所以条件收敛。

（2）由于 $|u_n| = \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{(2^n)^n}{n!} = \frac{[(1+1)^n]^n}{n!} > \frac{(1+n)^n}{n!} > \frac{n^n}{n!} > 1$ （$n>1$）

所以, $|u_n| \not\to 0$, 从而, $u_n \not\to 0$. 即原级数发散.

练习:

1）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 2）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2^n}$

3）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 4）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^n \theta$

解:（1）因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n = e/2 > 1$,

所以 $|u_n| \not\to 0, n\to\infty$, 从而 $u_n \not\to 0, n\to\infty$, 因此原级数发散.

（2）∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{2^{n+1}}\bullet\dfrac{2^n}{2n+1}=1/2<1$,

∴ $\Sigma|u_n|$收敛, 从而原级数绝对收敛.

(3) 因为 $\dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$, 且

$u_n=(1+\dfrac{1}{n+1})\dfrac{1}{\sqrt{n}}>(1+\dfrac{1}{n+2})\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$,

所以此交错级数满足收敛条件, 从而原级数为条件收敛.

4） 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\dfrac{|\sin\theta|^{n+1}}{|\sin\theta|^n}=|\sin\theta|$

所以 当 $|\sin\theta|<1$, 即 $\theta\neq 2k\pi\pm\pi/2$ 时, 级数绝对收敛;
当 $\sin\theta=1$, 即 $\theta=2k\pi+\pi/2$ 时, 级数发散;
当 $\sin\theta=-1$, 即 $\theta=2k\pi-\pi/2$ 时, 级数收敛.

总结:

1．三个重要的级数：

(1) $p-$级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ $p\le 1$（发散） $p>1$（收敛）

(2) 几何级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ $|q|\ge 1$（发散） $|q|<1$（收敛）

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛

2．正项级数的审敛法是：
比较法，比较法的极限形式，比值法

3．交错级数的判定法及绝对收敛，条件收敛

复习思考题、作业题：

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，能否推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛?反之是否成立?

由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，可以推得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$收敛：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n{}^2}{u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛．反之不成立.	
下次课预习要点	
教　学 后　记	

授课时间	第 17　周	课　次	第 33,34 次
章　节 名　称	**§12.3 幂级数**		
授　课 方　式	理论课（√)、实践课（　)、习题题（　)、其它（　）	教学 时数	4
教　学 目　的 要　求	1，知识目标：了解幂级数的收敛域的构造及求法；掌握利用幂级数的性质求和函数，以及利用和函数求某些数项级数的和。 2，能力目标：掌握利用幂级数的性质求和函数，以及利用和函数求某些数项级数的和。 3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。 4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：幂级数收敛域的求法，求和函数 难点：　求幂级数的和函数		

教学步骤及内容：

一、　函数项数的概念

设有定义在区间 I 上的函数列　$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$

由该函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

称作**函数项级数**. 而

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \qquad (2)$$

称为函数项级数（1）的**前 n 项部分和**.

对于确定的值 $x_0 \in I$，如常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \qquad (3)$$

收敛，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，点 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 发散，点 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**发散点**. 函数项级数的全体收敛点的集合称为它的**收敛域**；函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的全体发散点的集合称为它的**发散域**.

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 D，则对 D 内任意一点 x，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛， 其收敛的和自然依赖于 x，即其收敛和应为 x 的函数，记为 $s(x)$；称函数 $s(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数.** $s(x)$ 的定义域就是级数的收敛域，并记为

$$s(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

则在收敛域 D 上有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$. 把 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ 叫做函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**余项**,对收敛域上的每一点 x，有 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

从以上的定义可知，函数项级数在区域上的敛散性问题是指在该区域上的每一点的敛散性，因而其实质还是常数项级数的敛散性问题. 因此我们仍可以用数项级数的审敛法来判别函数项级数的敛散性.

二、 幂级数及其收敛性

1、 幂级数的定义:

函数项级数中最简单且最常见的一类级数是各项均为幂函数的函数项级数，称其为**幂级数**，它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (3)$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称作**幂级数的系数**.

注：幂级数的表示形式也可以是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

它是幂级数的一般形式，作变量代换 $t = x - x_0$ 即可以把它化为(3)的形式.因此在以后的讨论中，如不作特殊说明，我们用幂级数(3)作为主要的讨论对象如：$1+x+x^2+\cdots+\cdots x^n+\cdots$，$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$都是幂级数.

2、 幂级数的收敛域与发散域

x 取数轴上哪些点时幂级数收敛,取哪些点是幂级数发散?这就是幂级数的收敛性问题.

例 1. 考察幂级数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

解：当$|x|<1$时,这级数收敛于和 $\frac{1}{1-x}$；

当$|x|\geqslant 1$时,这级数发散.

因此,这幂级数的收敛区域是开区间$(-1,1)$,发散域是$(-\infty,-1)$及$[1,+\infty]$.

如果 x 在区间$(-1,1)$内取值,则 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n+\cdots$

在这个例中这个幂级数的收敛域是一个区间,

事实上,对于一般的幂级数如下定理:

定理 1(阿贝尔定理)：

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ 时收敛,则适合不等式$|x|<|x_0|$的一切 x,这幂级数收敛且绝对收敛,反之.如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ 时发散,则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切 x 这幂级数发散.

证明:设 x_0 是幂级数(3)的收敛点,即级数 $a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots$收敛.

根据级数收敛的必要条件,有 $\lim_{n\to\infty} a_nx_0^n=0$,于是存在一个常数 M,使得

$|a_nx_0^n|\leqslant M \quad (n=0,1,2,\cdots)$.

这样级数(3)的一般项的绝对值

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n\bullet \frac{x^n}{x_0^n}|= |a_nx_0^n|\bullet|\frac{x}{x_0}|^n\leqslant M|\frac{x}{x_0}|^n$$

因为当$|x|<|x_0|$时,等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} M|\frac{x}{x_0}|^n$收敛 (公比$|\frac{x}{x_0}|<1$),

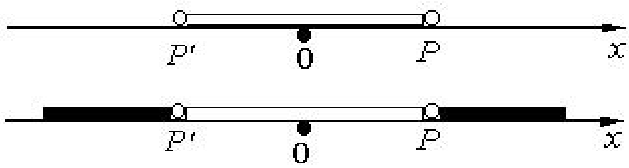
所以级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛，即级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛.

定理的第二部分可用反证法证明：

倘若幂级(3)当 $x=x_0$ 时发散,而有一点 x_1 适合$|x_1|>|x_0|$使级数收敛,则级数当 $x=x_0$ 时应收敛,这与假设矛盾,定理得证.

阿贝尔定理很好地揭示了幂级数的收敛域与发散域的结构：定理 1 的结论表明，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0\neq 0$处收敛，则可断定在开区间$(-|x_0|,|x_0|)$之内的任何$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$必收敛；如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0\neq 0$处发散，则可断定在闭区间$[-|x_0|,|x_0|]$之外的任何$x$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$必发散. 至此断定幂级数的发散点不可能位于原点与收敛点之间（因原点必是幂级数的收敛点）.

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在数轴上既有收敛点(且不仅仅只是原点)，也有发散点，于是，我们可以这样来寻找幂级数的收敛域与发散域. 首先从原点出发，沿数轴向右搜寻，最初只遇到收敛点，然后就只遇到发散点，设这两部分的界点为P，而点P则可能是收敛点，也可能是发散点. 再从原点出发，沿数轴向左方搜寻，相仿也可找到另一个收敛域与发散域的分界点P'；位于点P'与P之间的区域就是幂级数的收敛域，位于这两点之外的区域就是幂级数的发散域，且两个分界点关于原点对称（图 7－4－1）. 至此我们可得到如下重要推论：



推论 1 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$不是仅在一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必存在一个确定的正数R存在，使得

（1）当$|x|<R$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；

（2）当$|x|>R$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散；

（3）当 $x=\pm R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可能收敛，也可能发散.

我们把此正数 R 称作幂级数的**收敛半径**. $(-R,R)$ 称为幂级数的**收敛区间**. 若幂级数的收敛域为 D, 则

$$(-R,R)\subseteq D\subseteq[-R,R]$$

即幂级数的收敛域是收敛区间与收敛端点的并集.

特别地，如果幂级数只在 $x=0$ 处收敛，则规定收敛半径 $R=0$，此时的收敛域为只有一个点 $x=0$；如果幂级数对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，此时的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

3、 幂级数的收敛半径求法

定理 2: 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **系数满足** $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$, 则幂级数的收敛半径:

$$R=\begin{cases}1/\rho, & 0<\rho<+\infty,\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

证明:考察幂级数(3)的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots \qquad (5)$$

这级数相邻两项之比为: $\frac{|\alpha_{n+1}x^{n+1}|}{|\alpha_nx^n|}=|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|\cdot|x|$.

1) 如果 $\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\rho$ ($\rho\neq0$)存在,根据比值审敛法,则:

当 $\rho|x|<1$ 即 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时,级数(5)收敛,从而级数(3)绝对收敛;

当 $\rho|x|>1$ 即 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时,级数(4)发散,并且从某一个 n 开始 $|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|$,因此一般项 $|a_nx^n|\not\to0$

所以 $a_nx^n\not\to0$，从而级数(3)发散,于是收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$.

2) 如果 $\rho=0$,则对任何 $x\neq0$,有 $\frac{|\alpha_{n+1}x^{n+1}|}{|\alpha_nx^n|}\to0$ $(n\to\infty)$,所以级数(5)收敛,从而级数绝对收敛,于是 $R=+\infty$.

3） 如果 ρ=+∞,则对于除 x=0 外的一切 x 值,级数(3)必发散,否则由定理 1 知道将有点 x≠0 使级数(5)收敛,于是 R=0.

定理 3. 如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$， 则幂级数的收敛半径:

$$R=\begin{cases}1/\rho, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

例 2. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$的收敛域。

解：因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$， 所以收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

对于端点 x=1,级数成为交错级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$, 收敛;对于端点 x=-1,级数成为 $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots$,发散;

因此， 收敛域是$(-1,1]$。

例 3. 求幂级数 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$,的收敛区间.

解:因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,

所以收敛半径 R=∞,,从而收敛区间是(-∞,+∞).

例 4. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$的收敛半径(记号 0!=1).

解：因为 $P=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty$,

所以收敛半径 R=0,即级数仅在 x=0 处收敛.

例 5 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$的收敛半径.

解：因为 $P=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{\frac{3}{2}}=1$,故 R=1，收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，收敛；当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，收敛且为绝对收敛。综上所述，原幂级数的收敛域为$[-1,1]$。

例 6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n}$的收敛域。

解：令$t=x+1$，于是，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2n}$，由于$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，$R=1$。

当$t=-1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$为交错级数，收敛；当$t=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散。

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2n}$的收敛域为$[-1,1)$，原级数的收敛域为$[-2,0)$。

例 7 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{2n-1}$的收敛域。

解：级数缺偶次幂的项，定理 2 不能直接应用，根据比值审敛法来求收敛半径：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\frac{x}{2})^{2(n+1)-1}}{(\frac{x}{2})^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}|x|^2=\frac{1}{4}|x|^2$，于是

当$\frac{1}{4}|x|^2<1$, 即$|x|<2$，原级数收敛且为绝对收敛；当$\frac{1}{4}|x|^2>1$, 即$|x|>2$，原级数发散，故原级数收敛半径为$R=2$。当$x=\pm 2$时，原级数成为

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pm 2}{2})^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^{2n-1}$，级数发散。

综上，原级数的收敛域为$(-2,2)$。

练习：1、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间及收敛域。

解：级数缺奇次幂的项，定理 2 不能直接应用，
根据比值审敛法来求收敛半径：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}:\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}\right|=4|x|^2.$$

当$4|x|^2<1$即$|x|<\frac{1}{2}$时级数收敛；　当$4|x|^2>1$即$|x|>\frac{1}{2}$时级数发散，

所以收敛半径$R=\frac{1}{2}$.

2、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛区间.

解：令 t=x-1,则级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n}$.

因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2}$, 所以收敛半径 R=2.

当 t=2 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 这级数发散； 当 t=-2 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,这级数收敛,

因此收敛区间为:-2≤t<2, 即-2≤x-1<2, 或-1≤x<3,
所以原级数的收敛区间为 [-1,3).

3、 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ 的收敛区间.

解：由于 $\lim_{n\to\infty}[\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}]=e$, 因此 R=1/e.

当|x|=1/e 时,由于 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}]^n=e^{-1/2}\not\to 0$
因此级数的收敛区间为 (-1/e,1/e).

三、 幂级数的运算

1. 设幂级数: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$
及 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$
分别在区间 (-R,R) 及 (-R′,R′) 内收敛,
对于这两个幂级数,可以进行下列四则运算:

加法: $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$
$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$.

减法: $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$
$=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots$.

根据收敛级数的基本性质,上面两式在(-R,R)与(-R′,R′)中较小的区间内成立.

乘法: $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$
$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_0b_2+a_2b_0)x^2+$
$\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n+\cdots$

这是两个幂级数的柯西乘积,可以证明上式在(-R,R)与(-R′,R′)中较小的区间内成立.

除法: $$\frac{\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}$$

$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$,

假设 $b_0\neq 0$. 为了决定系数 $c_0, c_1, c_2,\cdots, c_n\cdots$,可以将级数

$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 相乘,

并令乘积中各项系数分别等于级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$中同次幂的系数，即得：

$a_0=b_0c_0,$
$a_1=b_1c_0+b_0c_1,$
$a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2,$
…………………

由这些方程就可以顺序地求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots c_n, \cdots$.

相除后所得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$的收敛区间可能比原来两级数收敛区间小.

2. **幂级数的和函数性质**:

性质 1:设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$的收敛半径为 R(R>0),则其和函数 s(x)在区间(-R,R)内连续；如果幂级数在 x=R(或 x=-R)也收敛,则和函数 s(x)在 x=R 处左连续（或在 x=-R 处有连续）.

性质 2:设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$的和函数 s(x)在收敛区间(-R,R)内是可导的,且有逐项求导公式:

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

其中|x|<R, 逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 3:设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$的和函数 s(x)在收敛区间 (-R,R)内是可积的,且有逐项积分公式:

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

其中|x|<R,逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 8 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数及数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的和.

解 由例 2 （1）的结果知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛域为$(-1,1]$，设其和函数为$s(x)$，即

$$s(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad x\in(-1,1)$$

则由逐项可导性，得

$$s'(x)=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$$

两边积分，即得幂级数得和函数为

$$s(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

再令和函数中的 $x=1$，可得到数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的和为 $\ln 2$.

例 9 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛区间及和函数.

解 （1）由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$，得到收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，一般项不趋于 0，因此它发散；

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$，一般项不趋于 0，它也发散；

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1，1)$.

（2）用传统方法求和函数

设和函数为：$S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

两边由 0 到 x 积分，得

$$\int_0^x S(x)\,dx=x+x^2+x^3\cdots+x^n+\cdots$$

$$=x(1+x+\cdots+x^{n-1}+\cdots)$$

$$=x\left(1+\int_0^x S(x)\,dx.\right)$$

因此，$\int_0^x S(x)\,dx=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1.$

对两边求导，得

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以幂级数的和函数为 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

例 10 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解:此级数的收敛区间为(-1, 1).

设和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$, 则有 $s(0)=1$,

从而: $xs(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

于是 $[xs(x)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=\dfrac{1}{1-x}$ $-1<x<1$.

所以: $xs(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$

从而: $s(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), 0<|x|<1\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$

练习：求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ 的和.

解:设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n}$ 的和函数为 $s(x)$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=1/3$, 所以此级数的收敛半径为:R=3.

当|x|=3 时,级数发散,因此级数的收敛区间为(-3, 3).

于是 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{3}\right)^n=\dfrac{x}{3-x}$ $(|x|<3)$

从而 $[s(x)]'=\left(\dfrac{x}{3-x}\right)'=\dfrac{3}{(3-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{3^n}$.

令 x=1, 得: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n}=\dfrac{3}{4}$.

复习思考题、作业题：

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变？

不一定

<table>
<tr><td colspan="2">

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},\ f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n},$$

它们的收敛半径都是 1， 但它们的收敛域各是$[-1,1],[-1,1),(-1,1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">下次课预习要点</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 18 周</td><td>课 次</td><td colspan="2">第 35,36 次</td></tr>
<tr><td>章 节
名 称</td><td colspan="4">复习课</td></tr>
<tr><td>授 课
方 式</td><td colspan="2">理论课（√）、实践课（ ）、习题题（ ）、其它（ ）</td><td>教学
时数</td><td>4</td></tr>
<tr><td>教 学
目 的
要 求</td><td colspan="4">1，知识目标：复习
2，能力目标：掌握本学期学习内容。
3，素养目标：具备科学的学习态度，严谨的学习精神。
4，课程思政：引导学生形成正确的世界观和价值观，激发学生的爱国精神</td></tr>
<tr><td>教 学
方 法</td><td colspan="4">讲授</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">重点：各个学习知识点。
难点： 各个学习知识点。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学步骤及内容：</td></tr>
</table>

授课时间	第 周	课 次	第 次

章　节 名　称	§ 12.4　函数展开成幂级数		
授　课 方　式	理论课（√）、实践课（　）、习题题（　）、其它（　）	教学 时数	
教　学 目　的 要　求	1、解函数展开成幂级数的充要条件；2、掌握如何将函数展开成幂级数； 3、了解幂级数在近似计算中的应用.		
教　学 方　法	讲授		
教　学 重　点 难　点	重点：5 个基本初等函数的展开式，将函数展开成幂级数 难点：　函数展开成幂级数的间接方法		

教学步骤及内容：

一、　泰勒级数

前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质．但在许多应用中，我们遇到的却是相反的问题：给定函数 $f\left(x\right)$，要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”，也就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f\left(x\right)$，如果能找到这样的幂级数，我们就说，函数在**该区间内能展开成幂级数**，而这个幂级数在该区间内就表达函数 $f\left(x\right)$.

1、泰勒公式

如果 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 的某邻域内有直到 $n+1$ 的导数．则对此邻域内任一 x 有

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$，（其中 ξ 在 x 与 x_0 之间）

上式称为 $f\left(x\right)$ 的 n 阶泰勒展开式或泰勒公式，利用泰勒公式，我们可以用一个关于 $\left(x-x_0\right)$ 的 n 次多项式

$$p_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

（也称为泰勒多项式）来近似的表达函数 $f\left(x\right)$，并可通过余项

$$R_n\left(x\right)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$　估计误差.

在泰勒公式中，当 $x_0=0$ 时，记 $\xi=\theta x$，$0\langle\theta\langle 1$，此时公式成为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式，或称为按 x 的幂展开的泰勒公式.

2、泰勒级数

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(n)}(x)$，…，我们称级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的**泰勒级数**．特别当 $x_0=0$ 时，则称它为 $f(x)$ 的麦克劳林级数．即

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

泰勒级数是泰勒多项式从有限项到无限项的推广，于是，带来了两个问题：一个是该级数在什么条件下收敛，二是该级数是否收敛于函数 $f(x)$，关于这些问题，有下述定理.

定理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零．即　$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$=0。

证　（**必要性**）设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域 $U(x_0)$ 内能展开成泰勒级数，即

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$ 同时把 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式（1）可以写成：

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x) \qquad（3）$$

其中 $S_{n+1}(x)$ 为泰勒级数（2）的前 $n+1$ 项之和，因上式成立，故有

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-S_{n+1}(x))=f(x)-f(x)=0$$

充分性：设 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，对所有的 $x\in U(x_0)$ 都成立，由

$S_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-R_n(x))=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} R_n(x)=f(x)$$

即 $f(x)$ 的 n 阶泰勒级数在 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内收敛，且收敛于函数 $f(x)$。证毕。

特别地，当 $x_0=0$ 时

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为**函数 $f(x)$ 可展开成麦克劳林级数**.

显然，将函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开成泰勒级数，可通过变量替换 $t=x-x_0$，化归为函数 $f(x)=f(t+x_0)=F(t)$ 在 $t=0$ 处的麦克劳林展开. 因此，我们将着重讨论函数的麦克劳林展开.

定理 2 函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式是唯一的.

证 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $(-R,R)$ 内可展开成 x 的麦克劳林级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

其中 a_n 是常数，$n=1,2,\cdots$；由幂级数的逐项求导性，得

$$f'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2x+\cdots+n\cdot a_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+\cdots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdots 1a_n+(n+1)\cdot n\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$$

$$\vdots$$

把 $x=0$ 代入上述等式，即有

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=1\cdot a_1,\quad f''(0)=2\cdot 1\cdot a_2,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=n\cdot(n-1)\cdots 1\cdot a_n,\ \cdots$$

从而

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \cdots$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

它就是函数的麦克劳林展开式. 即函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式仅麦克劳林展开式这一种.

二、 函数展开成幂级数的方法

1、直接展开法

由以上讨论结果可以看出，直接按公式将所给函数 $f\left(x\right)$ 展开成 x 的幂级数的步骤是；

（1） 求出 $f\left(x\right)$ 各阶导数 $f'\left(x\right)$，$f''\left(x\right)$，…，$f^{(n)}\left(x\right)$，…，如果在 x_0（主要讨论 $x_0=0$ 的情形）处某阶导数不存在，就停止进行；

（2） 求函数及各阶导数在 x_0 处的值

$$f\left(x_0\right),f'\left(x_0\right),f''\left(x_0\right),\ldots.,f^{(n)}\left(x_0\right),\ldots;$$

（3） 求出幂级数

$$f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots.+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots$$

的收敛半径 R；

（4） 考察当 x 在收敛区间 $\left(-R,R\right)$ 内时余项 $R_n\left(x\right)$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}\qquad（其中\xi在x与x_0之间）$$

是否为零，如果为零，则第三步求出的幂级数就是函数 $f\left(x\right)$ 的幂级数展开式；如果不为零，幂级数虽然收敛，但它的和并不是所给的函数 $f\left(x\right)$.

例 1 将函数 $f\left(x\right)=e^x$ 展开成 x 的幂级数

解 求出各阶导数

$$f'\left(x\right)=e^x，\ f''\left(x\right)=e^x，\ \cdots，\ f^{(n)}\left(x\right)=e^x，\ \cdots$$

于是 $f\left(0\right)=1$，$f'\left(0\right)=1$，$f''\left(0\right)=1$，…，$f^{(n)}\left(0\right)=1$，…

故得级数 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$

它的收敛半径为$R=+\infty$

对于任何有限数x，ξ （ξ在0与x之间）余项的绝对值为

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$$

因为$e^{|x|}$有限，而$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$是收敛级数的一般项，所以，当$n\to\infty$时，

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}\to 0 \quad \text{即} \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

所以得展开式 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dots \quad (-\infty<x<+\infty)$

例 2 将函数$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

解 求出各阶导数

$$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x, \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\cdots$$

于是，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$，…，顺序循环得这几个数：0，1，0，-1，于是得级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

它的收敛半径$R=+\infty$。

对于任何有限数x，ξ （ξ在0与x之间）余项的绝对值，当$n\to\infty$时极限为零

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{\sin\left[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

于是得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

用同样的方法可证得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} + ... \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

2 间接展开法

以上两个例子是用直接方法（直接按公式 $a_n = \dfrac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}$ 计算幂级数的系数）展开成幂级数的，这种直接方法计算量较大，而且最后要考察余项 R_n 是否收敛于零，这是一件很不容易的事情．下面，我们利用幂级数本身的性质，如四则运算，逐项微分，逐项积分等，把函数 $f\left(x\right)$ 展开成为 x 的幂级数，这样计算简单，而且往往可以避免直接研究余项，根据函数展开的唯一性，可知这与直接方法所得的结果一样．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} + ... \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

如把它逐项微分，就得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} + ... \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

例 3　将函数 $f\left(x\right) = \ln\left(1+x\right)$ 展开成 x 的幂级数．

解　因为 $f'\left(x\right) = \dfrac{1}{1+x}$，而 $\dfrac{1}{1+x}$ 是收敛的几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n$ （$-1 < x < 1$） 的和函数，即

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + \left(-1\right)^n x^n + ... \qquad (-1 < x < 1)$$

所以将上式从 0 到 x 逐项积分，得

$$\ln\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \left(-1\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

此展开式对于 $x=1$ 也是正确的，于是有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$$

例 4　将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中 m 为任意常数.

解:　$f(x)$的各阶导数为

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$,

$\cdots\cdots\cdots$,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

$\cdots\cdots\cdots$,

所以　$f(0)=1, f'(0)=m, f''(0)=m(m-1), \cdots, f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \cdots$ 于是得幂级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

可以证明

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1)$$

为了便于记忆和查阅，现将几个重要函数的 x 幂级数展开式归纳如下：

（1）$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \qquad (-\infty<x<+\infty)$

（2）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... \qquad$（$-\infty<x<+\infty$）

（3）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... \qquad$（$-\infty<x<+\infty$）

（4）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+... \quad (-1<x\le 1)$

（5）$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... \quad (-1<x<1)$

最后，再举一个将函数展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数的例子

例 5 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数

解　因为 $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

用公式表中（2)、（3）得

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{3!}-... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

两式相加，就有

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots\right]\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例 6 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求 $f^n(1)$。

解 方法一：因所求的幂级数具有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的形式，故可如下运算

$$f(x)=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-[-(x-1)]}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4-[-(x-1)]}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-[\frac{-(x-1)}{2}]}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-[\frac{-(x-1)}{4}]}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(x-1)}{2}\right]^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(x-1)}{4}\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right]\cdot(x-1)^n\quad,\quad -1<x<3$$

此式即为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 的关于 $(x-1)$ 的幂级数展开式.

方法二：作变量替换 $t=x-1$，则 $x=t+1$，有

$$f(x)=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{(t+4)(t+2)}$$

$$=\frac{1}{2(t+2)}-\frac{1}{2(t+4)}$$

$$=\frac{1}{4(1+\frac{t}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{t}{4})}$$

因

$$\frac{1}{4(1+\frac{t}{2})}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n，\ -1<\frac{t}{2}<1$$

$$\frac{1}{8(1+\frac{t}{4})}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n，\ -1<\frac{t}{4}<1$$

于是将$t=x-1$代回即得$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$的关于$(x-1)$的幂级数展开式为

$$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n，\ -2<t<2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right]\cdot(x-1)^n，\ -1<x<3$$

根据麦克劳林展开式的系数公式得

$$\frac{f^n(1)}{n!}=(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right]$$

即

$$f^n(1)=n!\cdot(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right]$$

练习 1、将函数$f(x)=4^{x+1}$展开成x的幂级数.

解　因$4^{x+1}=4\cdot e^{x\ln 4}$，利用$e^x$的展开式得

$$4^{x+1}=4\cdot\left[1+\frac{(x\ln 4)}{1!}+\frac{(x\ln 4)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln 4)^n}{n!}+\cdots\right]$$

$$=4+8\ln 2\cdot x+\frac{2^4(\ln 2)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{2^{n+2}(\ln 2)^n}{n!}x^n+\cdots\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

2、将函数$f(x)=\arctan x$展开成x的幂级数.

解　因$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，而$\frac{1}{1+x^2}$可展开式为

$$\frac{1}{1+x^2}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n+\cdots \qquad x\in(-1,1)$$

两边从 0 到 x 逐项积分得

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad x\in(-1,1)$$

因为当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 是收敛的，当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 是发散的，所以 $\arctan x$ 在 $x\in(-1,1]$ 上的幂级数展开式为

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

三、函数的幂级数展开式的应用

1、近似计算

例 9.38 求 e 的近似值，要求误差不超过 10^{-4}。（2.7183）

例 9.39 计算 $\cos 10^0$ 的近似值，要求误差不超过 10^{-4}。（0.9511）

例 9.40 计算 ln 2 的近似值，要求误差不超过 10^{-4}。

解 ： 由前面，令 x=1 可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots .$$

如果取这级数前 n 项和作为 ln2 的近似值，其误差为 $|r_n|\le\frac{1}{n+1}$.

为了保证误差不超过 10^{-4}，就需要取级数的前 10000 项进行计算. 这样做计算量太大了，我们必需用收敛较快的级数来代替它.

把展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\ (-1<x\le 1)$$

中的 x 换成 $-x$，得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\ (1\le x<1),$$

两式相减，得到不含有偶次幂的展开式:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots)\ (-1<x<1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$，解出 $x=\frac{1}{3}$．以 $x=\frac{1}{3}$ 代入最后一个展开式，得

$$\ln 2=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots).$$

如果取前四项作为 ln2 的近似值，则误差为

$$|r_4|=2(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots)\quad<\frac{2}{3^{11}}[1+\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots]$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}<\frac{1}{700000}.$$

于是取 $\ln 2\approx 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7})$.

同样地，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{3}\approx 0.33333,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}\approx 0.01235,\ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\approx 0.00082,\ \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\approx 0.00007.$$

因此得 $\ln 2\approx 0.6931$.

例 9.41 1、 计算定积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx$ 的近似值，要求误差不超过 0.0001（取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419$）.

2、 计算积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，要求误差不超过 0.0001.

解：1、 将 e^x 的幂级数展开式中的 x 换成 $-x^2$，得到被积函数的幂级数展开式

$$e^{-x^2}=1+\frac{(-x^2)}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty).$$

于是，根据幂级数在收敛区间内逐项可积，得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}]dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots).$$

前四项的和作为近似值，其误差为

$$|r_4|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!}<\frac{1}{90000},$$

所以 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!})\approx 0.5205$.

2、 由于 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此所给积分不是反常积分．如果定义被积函数在 x=0 处的值为 1，则它在积分区间[0, 1]上连续.

展开被积函数，有 $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

在区间[0, 1]上逐项积分，得 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots$.

因为第四项 $\frac{1}{7\cdot 7!}<\frac{1}{30000}$,

所以取前三项的和作为积分的近似值: $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}=0.9461$.

2、 欧拉公式

复数项级数: 设有复数项级数

$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\cdots+(u_n+iv_n)+\cdots$

其中 u_n, v_n (n=1, 2, 3, ···)为实常数或实函数. 如果实部所成的级数

$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

收敛于和 u, 并且虚部所成的级数. $v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$

收敛于和 v, 就说复数项级数收敛且和为 $u+iv$.

绝对收敛: 如果级 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ 的各项的模所构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ 绝对收敛.

复变量指数函数: 考察复数项级数 $1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$.

可以证明此级数在复平面上是绝对收敛的, 在 x 轴上它表示指数函数 e^x, 在复平面上我们用它来定义复变量指数函数, 记为 e^z. 即

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots .$$

欧拉公式: 当 x=0 时, $z=iy$, 于是

$$\begin{aligned}e^{iy}&=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots\\&=1+iy-\frac{1}{2!}y^2-i\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+i\frac{1}{5!}y^5-\cdots\\&=(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots)+i(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots)\\&=\cos y+i\sin y.\end{aligned}$$

把 y 定成 x 得 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 这就是欧拉公式.

复数的指数形式: 复数 z 可以表示为

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i}\theta$,

其中 $r=|z|$ 是 z 的模, $\theta=\arg z$ 是 z 的辐角.

三角函数与复变量指数函数之间的联系:

因为 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, 所以

$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$， $e^{x}-e^{-ix}=2i\sin x$.

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})，\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$$

这两个式子也叫做欧拉公式.

复变量指数函数的性质： $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

特殊地，有 $e^{x+iy}=e^{x}\,e^{i\,y}=e^{x}(\cos y+\ i\sin y)$.

复习思考题、作业题：

下次课预习要点

教　学 后　记	